数理解析研究所講究録
第 1948 巻 2015 年 6-14

曲面上の曲線と法可展面

北海道大学大学院理学院
花野井 聡

曲面上の曲線に沿った展直平面族の包絡面を考え，その特異点の分類と幾何学的性質を述べる．ここで, 曲線に接していて曲面に垂直な平面を曲面上の曲線の展直平面と呼ぶ．この包絡面は元の曲面と接平面同士が常に直交する可展面となる．このような可展面を法可展面と呼ぶ．法可展面の特異点の分類において，1 変数関数の開折理論を応用した．

1 準備

1.1 ダルブーフレーム

I を開区間，U を $\mathbb{R}^2$ の開集合とする．埋め込み $\boldsymbol{X}: U \to M; (u,v) \mapsto \boldsymbol{X}(u,v)$ に対して $M = \boldsymbol{X}(U)$ を**正則曲面**とよび，平面上の正則曲線 $\overline{\gamma}: I \to U; t \mapsto (u(t), v(t))$ に対し，空間曲線

$$\gamma = \boldsymbol{X} \circ \overline{\gamma}: I \to M \subset \mathbb{R}^3$$

を考える．γ のパラメータを空間曲線としての弧長 s に取りなおし，その単位速度ベクトルを，

$$\boldsymbol{t}(s) = \boldsymbol{\gamma}'(s)$$

と書く．曲面の単位法線ベクトルを γ 上に制限したものを,

$$\boldsymbol{n}_\gamma(s) = \frac{\boldsymbol{X}_u \times \boldsymbol{X}_v}{\|\boldsymbol{X}_u \times \boldsymbol{X}_v\|} \circ \overline{\gamma}(s)$$

とすると，$\boldsymbol{t}(s) = u'(s)\boldsymbol{X}_u \circ \overline{\gamma}(s) + v'(s)\boldsymbol{X}_v \circ \overline{\gamma}(s)$ なので，$\langle \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{n}_\gamma(s)\rangle = 0$ である．いま，どちらも単位ベクトルであるため,

$$\boldsymbol{b}(s) = \boldsymbol{n}_\gamma(s) \times \boldsymbol{t}(s)$$

とすれば，$\{\boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{b}(s), \boldsymbol{n}_\gamma(s)\}$ は $\mathbb{R}^3$ 内の正規直交系をなす．これは，M 上の γ に沿った**ダルブーフレーム** (*Darboux frame*) とよばれる．さて，$\langle \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{t}(s)\rangle = 1$ より $\langle \boldsymbol{t}'(s), \boldsymbol{t}(s)\rangle = 0$ なので，$\boldsymbol{t}'(s)$ は

$$\boldsymbol{t}'(s) = \kappa_g(s)\boldsymbol{b}(s) + \kappa_n(s)\boldsymbol{n}_\gamma(s)$$

と $\boldsymbol{b}(s)$ と $\boldsymbol{n}_\gamma(s)$ の一次結合として書くことができる．これらの係数について，κ_g は**測地的曲率** (*geodesic curvature*)，κ_n は**法曲率** (*normal curvature*) とよばれ，以下のようになる．

$$\kappa_g(s) = \langle \boldsymbol{t}'(s), \boldsymbol{b}(s)\rangle = \det\left(\boldsymbol{\gamma}'(s), \boldsymbol{\gamma}''(s), \boldsymbol{n}_\gamma(s)\right),$$
$$\kappa_n(s) = \langle \boldsymbol{t}'(s), \boldsymbol{n}_\gamma(s)\rangle = \langle \boldsymbol{\gamma}''(s), \boldsymbol{n}_\gamma(s)\rangle.$$

同様に，$\boldsymbol{b}'(s)$ は $\boldsymbol{t}(s)$ と $\boldsymbol{n}_\gamma(s)$ の一次結合で書くことができるが，$\langle \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{b}(s)\rangle' = \langle \boldsymbol{t}'(s), \boldsymbol{b}(s)\rangle + \langle \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{b}'(s)\rangle$ であり，一方で $\langle \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{b}(s)\rangle = 0$ より $\langle \boldsymbol{t}(s), \boldsymbol{b}(s)\rangle' = 0$ であるため，$\langle \boldsymbol{b}'(s), \boldsymbol{t}(s)\rangle = -\langle \boldsymbol{t}'(s), \boldsymbol{b}(s)\rangle = -\kappa_g(s)$ となる．これを踏まえると，

$$\boldsymbol{b}'(s) = -\kappa_g(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau_g(s)\boldsymbol{n}_\gamma(s)$$

と書くことができる．$\tau_g(s)$ は**測地的捩率** (*geodesic torsion*) とよばれ，

$$\tau_g(s) = \langle \boldsymbol{b}'(s), \boldsymbol{n}_\gamma(s)\rangle = \langle \boldsymbol{n}'_\gamma(s) \times \boldsymbol{t}(s) + \boldsymbol{n}_\gamma(s) \times \boldsymbol{t}'(s), \boldsymbol{n}_\gamma(s)\rangle = \det\left(\boldsymbol{\gamma}'(s), \boldsymbol{n}_\gamma(s), \boldsymbol{n}'_\gamma(s)\right)$$

となる．同様の手法により，

$$\boldsymbol{n}'_\gamma(s) = -\kappa_n(s)\boldsymbol{t}(s) - \tau_g(s)\boldsymbol{b}(s)$$

である．以上まとめると，フレネ・セレ型の公式

$$\begin{cases} \boldsymbol{t}'(s) &= \kappa_g(s)\boldsymbol{b}(s) + \kappa_n(s)\boldsymbol{n}_\gamma(s) \\ \boldsymbol{b}'(s) &= -\kappa_g(s)\boldsymbol{t}(s) + \tau_g(s)\boldsymbol{n}_\gamma(s) \\ \boldsymbol{n}'_\gamma(s) &= -\kappa_n(s)\boldsymbol{t}(s) - \tau_g(s)\boldsymbol{b}(s) \end{cases}$$

が成り立つ．ここで，3 つのベクトルを以下のように定め，

$D_n(s) = -\kappa_n(s)\boldsymbol{b}(s) + \kappa_g(s)\boldsymbol{n}_\gamma(s)$: **法ダルブーベクトル** (normal Darboux vector)
$D_r(s) = \tau_g(s)\boldsymbol{t}(s) + \kappa_g(s)\boldsymbol{n}_\gamma(s)$: **展直ダルブーベクトル** (rectifying Darboux vector)
$D_o(s) = \tau_g(s)\boldsymbol{t}(s) - \kappa_n(s)\boldsymbol{b}(s)$: **接触ダルブーベクトル** (osculating Darboux vector)

それぞれ単位ベクトルにしたものを

$$\overline{D_n} = \frac{-\kappa_n\boldsymbol{b} + \kappa_g\boldsymbol{n}_\gamma}{\sqrt{\kappa_g^2 + \kappa_n^2}}, \quad \overline{D_r} = \frac{\tau_g\boldsymbol{t} + \kappa_g\boldsymbol{n}_\gamma}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}}, \quad \overline{D_o} = \frac{\tau_g\boldsymbol{t} - \kappa_n\boldsymbol{b}}{\sqrt{\kappa_n^2 + \tau_g^2}}$$

と書く．さらに，$(M, \boldsymbol{\gamma})$ の不変量 δ_r, σ_r を以下のように定める：

$$\delta_r(s) = \kappa_n(s) - \frac{\kappa_g(s)\tau'_g(s) - \kappa'_g(s)\tau_g(s)}{\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s)} \quad ,$$

$$\sigma_r(s) = \frac{\tau_g(s)}{\sqrt{\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s)}} + \left(\frac{\kappa_g(s)}{\delta_r(s)\sqrt{\kappa_g^2(s) + \tau_g^2(s)}}\right)'$$

測地的曲率 κ_g，法曲率 κ_n，測地的捩率 τ_g について，次の事実が知られている．

命題 1.1. 1. $\kappa_g(s) \equiv 0$ になるための必要十分条件は，$\boldsymbol{\gamma}$ が M の測地線になることである．

2. $\kappa_n(s) \equiv 0$ になるための必要十分条件は，$\boldsymbol{\gamma}$ が M の漸近線になることである．

3. $\tau_g(s) \equiv 0$ になるための必要十分条件は，$\boldsymbol{\gamma}$ が M の曲率線になることである．

1.2 1変数関数の開折理論

U, V を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．C^∞ 級関数 $f : U \to \mathbb{R}^p, g : V \to \mathbb{R}^p$ について，$\boldsymbol{x}_0 \in U \cap V$ であるような点 $\boldsymbol{x}_0$ に対して，f と g が**点 $\boldsymbol{x}_0$ で同じ写像芽を定める**とは，$U \cap V$ に含まれる $\boldsymbol{x}_0$ の開近傍 W が存在し，$\boldsymbol{x} \in W$ であるような任意の $\boldsymbol{x}$ において $f(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x})$ が成り立つことと定義される．この関係は同値関係であり，f を含む同値類を**写像 f の点 $\boldsymbol{x}_0$ での写像芽** (*map germ*) とよび，$f : (\mathbb{R}^n, \boldsymbol{x}_0) \to (\mathbb{R}^p, f(\boldsymbol{x}_0))$ などと書く．f が C^∞ 級である場合，**可微分写像芽** (*differentiable map germ*) とよぶ．

可微分関数芽 $f : (\mathbb{R}, a) \to (\mathbb{R}, b)$ と $g : (\mathbb{R}, a') \to (\mathbb{R}, b')$ が $\mathcal{R}$ **同値** ($\mathcal{R}$*-equivalent*) であるとは，微分同相写像芽 $\phi : (\mathbb{R}, a') \to (\mathbb{R}, a)$ が存在して，$f \circ \phi(t) = g(t) + (b - b')$ をみたすことをいう．可微分関数芽 $f : (\mathbb{R}, a) \to (\mathbb{R}, b)$ が A_k **型** (A_k *type*) であるとは，$f^{(r)}(a) = 0 (1 \leq r \leq k), f^{(k+1)}(a) \neq 0$ をみたすことをいう．ここで，$f^{(r)}$ は f の r 階導関数をあらわす．A_k 型の関数芽について次のことが知られている [1]

定理 1.2. 可微分関数芽 $f : (\mathbb{R}, a) \to (\mathbb{R}, b)$ が A_k 型であるとき，f は $g(t) = \pm t^{k+1}$ で代表される可微分関数芽 $g : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ に $\mathcal{R}$ 同値である．ただし，g の符号は $f^{(k+1)}(a)$ の符号に対応している．

可微分関数芽 $f : (\mathbb{R}, a) \to (\mathbb{R}, c)$ に対し，可微分関数芽 $F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (a, \boldsymbol{b})) \to (\mathbb{R}, c)$ が $F(t, \boldsymbol{b}) = f(t)$ をみたすとき，F を f の r **次元開折** (r*-dimensional unfolding*) といい，r を F の**開折次元** (*unfolding dimension*) と呼ぶ．$G : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (a, \boldsymbol{b}')) \to (\mathbb{R}, c)$ もまた f の開折であるとき，以下をみたす組 (Φ, ϕ) を G から F への $\mathcal{R}$**-f 開折圏射** ($\mathcal{R}$-f *morphism*) という：

1. Φ は可微分写像芽 $\Phi : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^s, (a, \boldsymbol{b})) \to (\mathbb{R}, a)$ で $\Phi(x, \boldsymbol{b}') = x$ をみたす．

2. ϕ は可微分写像芽 $\phi : (\mathbb{R}^s, \boldsymbol{b}') \to (\mathbb{R}^r, \boldsymbol{b})$ である．

3. 等式 $G(t, \boldsymbol{v}) = F(\Phi(t, \boldsymbol{v}), \phi(\boldsymbol{v}))$ が成り立つ．

さらに，F が f の $\mathcal{R}$ **普遍開折** ($\mathcal{R}$*-versal unfolding*) であるとは，f の任意の開折 G に対して F への $\mathcal{R}$-開折圏射が存在することをいう．$\mathcal{R}$ 普遍開折について次のことが知られている [1]

定理 1.3. $f : (\mathbb{R}, a) \to (\mathbb{R}, c)$ を A_k 型の可微分関数芽，$F : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^r, (a, \boldsymbol{b})) \to (\mathbb{R}, c)$ を f の開折，さらに，

$$\frac{\partial F}{\partial u_i}(t, \boldsymbol{b}) = \alpha_{0,i} + \alpha_{1,i}(t-a) + \alpha_{2,i}(t-a)^2 + \cdots + \alpha_{k-1,i}(t-a)^{k-1} + \cdots$$

であるとする．このとき，F が $\mathcal{R}$ 普遍開折であるための必要十分条件は，

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} \alpha_{0,1} & \alpha_{0,2} & \cdots & \alpha_{0,r} \\ \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{k-1,1} & \alpha_{k-1,2} & \cdots & \alpha_{k-1,r} \end{pmatrix} = k$$

である．したがって，$r \geq k$ がみたされる．

系 1.4. 開折 $\widetilde{G}:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^k,(0,\mathbf{0}))\to(\mathbb{R},0)$ を

$$\widetilde{G}(t,\boldsymbol{x})=\pm t^{k+1}+u_1+u_2t+\cdots+u_kt^{k-1}$$

と定めると，$\widetilde{G}$ は $g(t)=\pm t^{k+1}$ の $\mathcal{R}$ 普遍開折である．

$f:(\mathbb{R},a)\to(\mathbb{R},c)$ を A_k 型の可微分関数芽，$F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r,(a,\boldsymbol{b}))\to(\mathbb{R},c)$ を f の開折とする．このとき，

$$\mathcal{D}_F=\left\{\boldsymbol{u}\in\mathbb{R}^r\,\middle|\,F(t,\boldsymbol{u})=\frac{\partial F}{\partial t}(t,\boldsymbol{u})=0\text{ となる }t\text{ が存在する}\right\}$$

を F の**判別集合** (*discriminant set*) と呼ぶ．特に $r=3$ の場合で，任意の $t\in(\mathbb{R},0)$ に対して $f_t(u)=F(t,u)$ とするとき，f_t がしずめ込みならば $f_t^{-1}(0)$ は $\mathbb{R}^3$ 内の正則曲面を定める．この場合の $\mathcal{D}_F$ を $F=0$ から定まる曲面族の**包絡面** (*envelope*) と呼ぶ．判別集合については次のことが知られている．[1]

定理 1.5. $F:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r,(a,\boldsymbol{b}))\to(\mathbb{R},0)$ を可微分関数芽 $f:(\mathbb{R},a)\to(\mathbb{R},0)$ の開折，$G:(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^r,(a',\boldsymbol{b}'))\to(\mathbb{R},0)$ を可微分関数芽 $f:(\mathbb{R},a')\to(\mathbb{R},0)$ の開折とする．f,g がともに A_k 型であり，F,G がともに $\mathcal{R}$ 普遍開折のとき，微分同相写像芽 $\phi:(\mathbb{R}^r,\boldsymbol{b})\to(\mathbb{R}^r,\boldsymbol{b}')$ が存在して，$\phi(\mathcal{D}_F)=\mathcal{D}_G$ が成り立つ．

A_k 型の可微分写像芽の標準形 $f(t)=\pm t^{k+1}$ の $\mathcal{R}$ 普遍開折は系 1.4 より

$$F(t,\boldsymbol{x})=\pm t^{k+1}+x_1+x_2t+\cdots+x_kt^{k-1}$$

と求められるが，その判別集合芽 $\mathcal{D}_F$ を具体的に計算すると，以下のようになる．

1. $k=1$ の場合，$\mathcal{D}_F=\{0\}\times\mathbb{R}^{r-1}$
2. $k=2$ の場合，$\mathcal{D}_F=C\times\mathbb{R}^{r-2}$、ここで，

   $$C=\{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{R}^2,0)|x_1=2t^3,x_2=-3t^2\}$$

   であり，カスプ曲面とよばれる．
3. $k=3$ の場合，$\mathcal{D}_F=SW\times\mathbb{R}^{r-3}$．ここで，

   $$SW=\{\boldsymbol{x}\in(\mathbb{R}^3,0)|x_1=\pm eu^4+u^2v,x_2=\mp 4u^3-2uv,x_3=v\}$$

   であり，ツバメの尾とよばれる．

1.3 線織面と法可展面

空間曲線 $\boldsymbol{\gamma}(u)$ とその変数 u に依存する零でないベクトル $\boldsymbol{\xi}(u)$ およびパラメータ v によって

$$\boldsymbol{p}(u,v)=\boldsymbol{\gamma}(u)+v\boldsymbol{\xi}(u)$$

と表される曲面を**線織面** (*ruled surface*) と呼ぶ．$\boldsymbol{\gamma}$ を**導線** (*base curve*)，$\boldsymbol{\xi}$ を**準曲線** (*director curve*) とよび，u を止めるごとに得られる直線 $\boldsymbol{\gamma}(u)+v\boldsymbol{\xi}(u)$ を**母線** (*rulings*) とよぶ．ガウス曲率が恒等

的に 0 であるような線織面を**可展面** (*developable surface*) と呼ぶ．線織面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ が可展面であるための必要十分条件は，

$$\det\left(\boldsymbol{\gamma}'(u), \boldsymbol{\xi}(u), \boldsymbol{\xi}'(u)\right) = 0$$

が成り立つことである．ただし，$\boldsymbol{\gamma}'(u) = (d\boldsymbol{\gamma}/du)(u)$ とする．$\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(u) = \boldsymbol{\xi}(u)/\|\boldsymbol{\xi}(u)\|$ とすると，線織面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ が**柱面** (*cylinder*) であることの必要十分条件は $\widetilde{\boldsymbol{\xi}}'(u) \equiv 0$ が成り立つことである．また，$\widetilde{\boldsymbol{\xi}}'(u) \neq 0$ が成り立つとき，$\boldsymbol{p}(u,v)$ は**非柱面的** (*non-cylindrical*) であるという．$\boldsymbol{p}(u,v)$ が非柱面的であるとき，

$$\boldsymbol{\gamma}(u) - \frac{\langle \boldsymbol{\gamma}'(u), \widetilde{\boldsymbol{\xi}}'(u)\rangle}{\langle \widetilde{\boldsymbol{\xi}}'(u), \widetilde{\boldsymbol{\xi}}'(u)\rangle}\widetilde{\boldsymbol{\xi}}(u)$$

で表される曲線を**縮括線** (*striction curve*) といい，線織面の特異点は縮括線上に現れることが知られている．線織面 $\boldsymbol{p}(u,v)$ が**錐面** (*cone*) になることの必要十分条件は縮括線が 1 点になることである．

法可展面並びに法柱面・法錐面の定義を述べる．M を曲面，M 上の曲線を γ とする．γ がのっている可展面のうち, 各点 $\gamma(s)$ で接平面が定まり, それが $T_\gamma M$ に直交しているものを γ に沿った**法可展面** (*normal developable surface*) と呼ぶ.N が γ に沿った法可展面かつ柱面である場合 N のことを M の**法柱面** (*normal cylinder*) と呼ぶ．この場合 M と N は横断的に交わり $M \cap N$ は正則曲線を C をなす．この正則曲線 C のことを M の**法柱面による切断** (*normal cylindrical slice*) と呼ぶ．N が錐面で上のような条件をみたすとき,N を M の**法錐面** (*normal cone*), 正則曲線 C を M の**法錐面による切断** (*normal conical slice*) と呼ぶ.

2　曲面上の曲線に付随する平面族の包絡面

関数 $G_r : I \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ を

$$G_r(s, \boldsymbol{x}) = \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\gamma}(s), \boldsymbol{b}(s)\rangle$$

と定め，$g_{r\boldsymbol{x}}(s) = G_r(s,\boldsymbol{x})$ とすると，G_r は $g_{r\boldsymbol{x}}$ の 3 次元開折となっている．

命題 2.1. $\kappa_g^2(s_0) + \tau_g^2(s_0) \neq 0$ のとき，$g_{r\boldsymbol{x}}(s)$ について以下が成り立つ．

1. $g_{r\boldsymbol{x}}(s_0) = 0$ が成り立つための必要十分条件は，

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\gamma}(s_0) = u\boldsymbol{t}(s_0) + v\boldsymbol{n}_\gamma(s_0)$$

をみたす $u, v \in \mathbb{R}$ が存在することである．

2. $g_{r\boldsymbol{x}}(s_0) = g'_{r\boldsymbol{x}}(s_0) = 0$ が成り立つための必要十分条件は，

$$\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\gamma}(s_0) = u\frac{\tau_g(s_0)\boldsymbol{t}(s_0) + \kappa_g(s_0)\boldsymbol{n}_\gamma(s_0)}{\sqrt{\kappa_g{}^2(s_0) + \tau_g{}^2(s_0)}}$$

をみたす $u \in \mathbb{R}$ が存在することである．

3. $g_{r\boldsymbol{x}}(s_0) = g'_{r\boldsymbol{x}}(s_0) = g''_{r\boldsymbol{x}}(s_0) = 0$ が成り立つための必要十分条件は，以下のいずれかが成り立つことである．

(a) $\delta_r(s_0)\neq 0$ かつ

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\gamma}(s_0)=\frac{\kappa_g(s_0)}{\delta_r(s_0)\sqrt{{\kappa_g}^2(s_0)+{\tau_g}^2(s_0)}}\frac{\tau_g(s_0)\boldsymbol{t}(s_0)+\kappa_g(s_0)\boldsymbol{n}_\gamma(s_0)}{\sqrt{{\kappa_g}^2(s_0)+{\tau_g}^2(s_0)}}$$

が成り立つ.

(b) $\delta_r(s_0)=0,\kappa_g(s_0)=0$ つまり $\kappa_n(s_0)=0,\kappa_g'(s_0)=\kappa_n(s_0)\tau_g(s_0)$, かつ

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\gamma}(s_0)=u\boldsymbol{t}(s_0)$$

をみたす $u\in\mathbb{R}$ が存在する.

4. $g_{r\boldsymbol{x}}(s_0)=g_{r\boldsymbol{x}}'(s_0)=g_{r\boldsymbol{x}}''(s_0)=g_{r\boldsymbol{x}}'''(s_0)=0$ が成り立つための必要十分条件は，以下のいずれかが成り立つことである．ここで，s_0 は省略する.

(a) $\delta_r\neq 0,\sigma_r=0$ かつ

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\gamma}=\frac{\kappa_g}{\delta_r\sqrt{\kappa_g^2+\tau_g^2}}\frac{\tau_g\boldsymbol{t}-\kappa_g\boldsymbol{n}_\gamma}{\sqrt{\kappa_g^2+\tau_g^2}}$$

が成り立つ.

(b) $\delta_r=0,\delta_r'\neq 0,\kappa_g=0$ つまり $\kappa_g=0,\kappa_g'=-\tau_g\kappa_n,2\tau_g'\kappa_n+\tau_g\kappa_n'+\kappa_g''\neq 0$, かつ

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\gamma}=-\frac{\kappa_g'}{2\tau_g'\quad\kappa_n+\tau_g\kappa_n'+\kappa_g''}\boldsymbol{t}$$

が成り立つ.

(c) $\delta_r=\delta_r'=0,\kappa_g=\kappa_g'=0$ つまり $\kappa_n=\kappa_g=\kappa_g'=0,\kappa_g''=-\kappa_n'\tau_g$, かつ

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\gamma}(s_0)=u\boldsymbol{t}(s_0)$$

をみたす $u\in\mathbb{R}$ が存在する.

5. $\delta_r(s_0)\neq 0$ のとき，$g_{r\boldsymbol{x}}(s_0)=g_{r\boldsymbol{x}}'(s_0)=g_{r\boldsymbol{x}}''(s_0)=g_{r\boldsymbol{x}}'''(s_0)=g_{r\boldsymbol{x}}^{(4)}(s_0)=0$ が成り立つための必要十分条件は，$\sigma_r=\sigma_r'=0$ かつ

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\gamma}(s_0)=\frac{\kappa_g(s_0)}{\delta_r(s_0)\sqrt{{\kappa_g}^2(s_0)+{\tau_g}^2(s_0)}}\frac{\tau_g(s_0)\boldsymbol{t}(s_0)+\kappa_g(s_0)\boldsymbol{n}_\gamma(s_0)}{\sqrt{{\kappa_g}^2(s_0)+{\tau_g}^2(s_0)}}$$

が成り立つことである.

この命題から，G_r が定める包絡面が,

$$\mathcal{D}_{G_r}=\left\{\boldsymbol{\gamma}+u\overline{D_r}\,\middle|\,\kappa_g^2+\tau_g^2\neq 0,u\in\mathbb{R}\right\}\cup\{\boldsymbol{\gamma}+u\boldsymbol{t}+v\boldsymbol{n}_\gamma\,|\kappa_g=\tau_g=0,u,v\in\mathbb{R}\}$$

とわかる．$\kappa_g^2+\tau_g^2\neq 0$ の場合の包絡面を,

$$\begin{aligned}ND_\gamma(s,u)&=\boldsymbol{\gamma}(s)+u\overline{D_r}(s)\\&=\boldsymbol{\gamma}(s)+u\frac{\tau_g(s)\boldsymbol{t}(s)+\kappa_g(s)\boldsymbol{n}_\gamma(s)}{\sqrt{{\kappa_g}^2(s)+{\tau_g}^2(s)}}\end{aligned}$$

と表す．これは線織面であり，

$$\overline{D_r}' = \left(\kappa_n - \frac{\kappa_g \tau_g' - \kappa_g' \tau_g}{\kappa_g^2 + \tau_g^2}\right) \frac{-\kappa_g \boldsymbol{t} + \tau_g \boldsymbol{n}_\gamma}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}} = \delta_r \frac{-\kappa_g \boldsymbol{t} + \tau_g \boldsymbol{n}_\gamma}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}}$$

より，

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{\gamma}', \overline{D_r}, \overline{D_r}') &= \det\left(\boldsymbol{t}, \frac{\tau_g \boldsymbol{t} + \kappa_g \boldsymbol{n}_\gamma}{\sqrt{{\kappa_g}^2 + {\tau_g}^2}}, \delta_r \frac{-\kappa_g \boldsymbol{t} + \tau_g \boldsymbol{n}_\gamma}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つので，可展面である．各点における法ベクトルは，

$$\frac{\partial ND_\gamma}{\partial s} \times \frac{\partial ND_\gamma}{\partial u} = \left(u\delta_r - \frac{\kappa_g}{\sqrt{\kappa_g^2 + \tau_g^2}}\right) \boldsymbol{b}$$

となるため，$\boldsymbol{\gamma}$ 上で曲面 M と ND_γ の接平面どうしは常に直交している．したがって ND_γ は法可展面である．

ND_γ の特異点を分類するために，定理 1.3 を利用し G_r が $g_{r\boldsymbol{x}}$ の $\mathcal{R}$ 普遍開折になるための必要十分条件を求める．$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$，$\boldsymbol{b}(s) = (b_1(s), b_2(s), b_3(s))$ とすると，

$$\frac{\partial G_r}{\partial x_i}(s, \boldsymbol{x}) = b_i(s) \quad (i = 1, 2, 3)$$

となる．$\operatorname{rank} \boldsymbol{b} = 1$ より，$g_{r\boldsymbol{x}}$ が A_1 型の場合，G_r は常に $\mathcal{R}$ 普遍開折である．

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}' \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\kappa_g \boldsymbol{t} + \tau_g \boldsymbol{n}_\gamma \end{pmatrix}$$

より，$g_{r\boldsymbol{x}}$ が A_2 型の場合，G_r が $\mathcal{R}$ 普遍開折であるための必要十分条件は $\kappa_g^2 + \tau_g^2 \neq 0$ が成り立つことである．

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}' \\ \boldsymbol{b}'' \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \boldsymbol{n}_\gamma \\ -\kappa_g \boldsymbol{t} + \tau_g \boldsymbol{n}_\gamma \\ (-\kappa_g' + \tau_g \kappa_n)\boldsymbol{t} - (\kappa_g^2 + \tau_g^2)\boldsymbol{b} + (\tau_g' - \kappa_g \kappa_n)\boldsymbol{n}_\gamma \end{pmatrix}$$

より，$g_{r\boldsymbol{x}}$ が A_3 型の場合，G_r が $\mathcal{R}$ 普遍開折であるための必要十分条件は

$$\kappa_g(\tau_g' - \kappa_g \kappa_n) + \tau_g(\kappa_g' + \tau_g \kappa_n) \neq 0$$

であり，これを整理すると，

$$\kappa_n(\kappa_n^2 + \tau_g^2) - (\kappa_g \tau_g' - \kappa_g' \tau_g) \neq 0$$

となるため，$\kappa_g^2 + \tau_g^2 \neq 0$ かつ $\delta \neq 0$ が成り立つことであるとわかる．

これより，OD_γ の特異点を以下のように分類できる．

定理 2.2. M 上の正則曲線 γ で $\kappa_g^2(s)+\tau_g^2(s)\neq 0$ をみたすものに対し，以下が成り立つ．

1. 点 (s_0,u_0) が

$$u_0\delta_r(s_0)-\frac{\kappa_g(s_0)}{\sqrt{\kappa_g^2(s_0)+\tau_g^2(s_0)}}\neq 0$$

   をみたすとき，$(ND_\gamma,(s_0,u_0))$ は正則曲面芽である．

2. 点 (s_0,u_0) が，$\delta_r(s_0)\neq 0,\sigma_r(s_0)\neq 0$ かつ

$$u_0=\frac{\kappa_g(s_0)}{\delta_r(s_0)\sqrt{\kappa_g^2(s_0)+\tau_g^2(s_0)}}$$

   であるか，または，$\delta_r(s_0)=0,\kappa_g(s_0)=0$ かつ

$$\kappa_g'(s_0)-u_0\left(2\tau_g'(s_0)\kappa_n(s_0)+\tau_g(s_0)\kappa_n'(s_0)+\kappa_g''(s_0)\right)\neq 0$$

   であるとき，$(ND_\gamma,(s_0,u_0))$ の像はカスプ曲面に局所微分同相である．

3. 点 (s_0,u_0) が，$\delta_r(s_0)\neq 0,\sigma_r(s_0)=0,\sigma_r'(s_0)\neq 0$ かつ

$$u_0=\frac{\kappa_g(s_0)}{\delta_r(s_0)\sqrt{\kappa_g^2(s_0)+\tau_g^2(s_0)}}$$

   をみたすとき，$(ND_\gamma,(s_0,u_0))$ の像はツバメの尾に局所微分同相である．

ND_γ については以下のことが成り立つ．

定理 2.3. M 上の正則曲線 γ で $\kappa_g^2(s)+\tau_g^2(s)\neq 0$ をみたすものに対し，(a),(b),(c) は同値である．

1. (a) ND_γ が柱面である．
   (b) $\delta_r(s)\equiv 0$
   (c) γ は M の法柱面による切断である．

2. (a) ND_γ が錐面である．
   (b) $\sigma_r(s)\equiv 0$
   (c) γ は M の法錐面による切断である．

定理 2.4. 正則曲面 M 上の $\kappa_g^2(s)+\tau_g^2(s)\neq 0$ をみたす正則曲線 γ に対し，γ に沿った法可展面が一意に存在する．

定理 2.5. γ に沿った法可展面において $\kappa_g(s)\equiv\tau_g(s)\equiv 0$ が成り立つための必要十分条件は，γ が曲面 M の直截口になることである．

系 2.6. γ に沿った法可展面の一意性が成り立たないならば，γ は直線である．

参考文献

[1] J.W. Bruce and P.J. Giblin: *Curves and Singularities (second edition)*, Cambridge Univ. Press (1992)

[2] S. Izumiya, H. Katsumi and T. Yamasaki: *The rectifying developable and the spherical Darboux image of a space curve*, Geometry and topology of caustics-Caustics '98- Banach Center Publications, 50 pp. 137-149 (1999).

[3] 泉屋周一，佐野貴志，佐伯修，佐久間一浩: 幾何学と特異点（特異点の数理１），共立出版 (2001)

[4] S. Izumiya and S.Otani: *Flat approximations of surfaces along curves*, to appear in Demonstration Math.

[5] S. Izumiya and N. Takeuchi: *New Special Cureves and Developable Surface*, Turk J Math 28(2004) 153-163.

[6] 小林昭七: 曲線と曲面の微分幾何（改訂版），裳華房 (1995)

[7] 大谷早紀：曲面上の曲線に付随する平面族の包絡面について, 北海道大学大学院理学院修士論文 (2013)

[8] 梅原雅顕，山田光太郎: 曲線と曲面—微分幾何的アプローチ—，裳華房 (2002)