

# 可微分写像芽の判定法

北海道大学大学院理学院 加葉田 雄太郎

Yutaro Kabata

Graduate School of Science

Hokkaido University

## 1 序

本稿では corank 1 の可微分写像芽  $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$  ( $n = 2, 3$ ) の  $\mathcal{A}$ -型及びそのジェットに対する簡便な判定法を紹介する. なお, 本稿に出てくる特異点論の基本的な概念などに関しては [6] などを参照されたい.

まず写像芽の  $\mathcal{A}$ -分類に関して説明する. 二つの可微分写像芽  $f, g : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$  が  $\mathcal{A}$ -同値であるとは, 可微分同相写像芽  $\tau, \sigma : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$  が存在して  $f = \tau \circ f \circ \sigma^{-1}$  が成り立つことであり,  $f \sim_{\mathcal{A}} g$  と書く.  $\mathcal{A}$ -同値の定義は素朴であるが, 可微分写像芽を  $\mathcal{A}$ -同値により余次元の低いものから順に分類していくという  $\mathcal{A}$ -分類問題は複雑なものになる.  $n = 2, 3$  の場合, corank 1 の可微分写像芽  $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$  について表 1, 2 の分類が J. H. Rieger, J. W. Bruce によりそれぞれ与えられている [8, 1]. ここではソースの座標を  $n = 2, 3$  に対して  $(x, y)$ ,  $(x, y, z)$  としそれぞれ取っており, また可微分写像芽  $f : \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$  が corank 1 であるとは  $\text{rank } df_0 = n - 1$  ということである.

分類は具体的な幾何的対象などへの応用において非常に有用であるが, そのためには任意に与えられた写像芽が適切な座標変換 (可微分同相写像芽) によっていずれの  $\mathcal{A}$ -型となるか決定することができなければいけない. Rieger[8] や Bruce[1] の分類プロセスの再追跡によりこれが完遂されると考えるのは自然ではあるが, 与えられた写像芽をテイラー展開の低次の項から順に座標変換で整理していくというその作業は実際には非常に煩雑になってしまう. 例えば写像芽  $f : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  が  $f = (x, xy + \sum_{i+j \geq 3} a_{ij} x^i y^j)$  ( $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ) と書けた時, Rieger による [8] の FIG 1. の recognition tree より  $a_{03} \neq 0$  であれば  $f$  は 3-型 (cusp) であると決定することができる. そこで任意に与えられた写像芽  $g = (g_1, g_2) : \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  に対しても 3-型であることを判定するには, まず適切な座標変換で  $g \sim_{\mathcal{A}} (x, xy + \sum_{i+j \geq 3} a'_{ij} x^i y^j)$  ( $a'_{ij} \in \mathbb{R}$ ) と変形し  $a'_{03} \neq 0$  を確かめなければいけないが, この  $a'_{03}$  は  $g_1$  と  $g_2$  の 3-ジェットに依存しており単純ではない. より高次の写像芽になれば

$\mathcal{A}$ -余次元	$\mathcal{A}$ -型	標準形
0	1 (regular)	$(x, y)$
1	2 (fold)	$(x, y^2)$
2	3 (cusp)	$(x, xy + y^3)$
3	4 <sub>2</sub> (beaks and lips)	$(x, y^3 \pm x^2y)$
	5 (swallowtail)	$(x, xy + y^4)$
4	4 <sub>3</sub> (goose)	$(x, y^3 + x^3y)$
	6 (butterfly)	$(x, xy + y^5 \pm y^7)$
	11 <sub>5</sub> (gulls)	$(x, xy^2 + y^4 + y^5)$
5	4 <sub>4</sub> (ugly goose)	$(x, y^3 \pm x^4y)$
	7 (elder butterfly)	$(x, xy + y^5)$
	11 <sub>7</sub> (ugly gulls)	$(x, xy^2 + y^4 + y^7)$
	12	$(x, xy^2 + y^5 + y^6)$
	16	$(x, x^2y + y^4 \pm y^5)$
	8 (unimodal)	$(x, xy + y^6 \pm y^8 + \alpha y^9)$
6	4 <sub>5</sub>	$(x, y^3 + x^5y)$
	9	$(x, xy + y^6 + y^9)$
	10 <sup>†</sup> (bimodal)	$(x, xy + y^7 \pm y^9 + \alpha y^{10} + \beta y^{11})$
	11 <sub>9</sub>	$(x, xy^2 + y^4 + y^9)$
	13	$(x, xy^2 + y^5 \pm y^9)$
	15 (unimodal)	$(x, xy^2 + y^6 + y^7 + \alpha y^9)$
	17	$(x, x^2y + y^4)$
	18 <sup>†</sup> (bimodal)	$(x, x^2y + xy^3 + \alpha y^5 + y^6 + \beta y^7)$
	19 (unimodal)	$(x, x^3y + \alpha x^2y^2 + y^4 + x^3y^2)$

表1 Rieger[8] による corank 1 写像芽の  $\mathcal{A}$ -分類 ( $\mathcal{A}$ -余次元  $\leq 6$ ) . †: 例外的なモジュライの値を除く

$\mathcal{A}$ -余次元	$\mathcal{A}$ -型	標準形
0	regular	$(x, y, z)$
1	fold	$(x, y, z^2)$
2	cuspidal edge	$(x, y, xz + z^3)$
3	swallowtail	$(x, y, xz + yz^2 + z^4)$
4	3	$(x, y, (x^2 \pm y^2)z + z^3)$
	4	$(x, y, xz \pm y^2z^2 + z^4)$
	5	$(x, y, xz + yz^2 + z^5)$

表2 Bruce[1] による corank 1 写像芽の  $\mathcal{A}$ -分類 ( $\mathcal{A}$ -余次元  $\leq 4$ ) .

ばなるほど判定は煩雑になっていく。そのため座標の取り方に依らない写像芽の判定法は非常に有用であろう。以下では内在的微分を用いた写像芽の幾何学的判定法を紹介する。なお、本判定法の応用例は [10, 3, 4, 13, 14] を参照されたい。

## 2 判定法 ( $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$ )

本章では可微分写像芽  $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  を扱う。まず、H. Whitney と佐治による fold, cusp, swallowtail, baks, lips に対する判定法を紹介する [12, 10, 11]。  $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  を corank 1 の可微分写像芽とし、関数  $\lambda$  を  $\lambda(x, y) := \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)}$ 、可微分ベクトル場  $\eta := \eta_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}$  を原点の近傍で  $f$  の微分  $df$  の kernel 方向を張るものとして任意に取る。  $\lambda$  のヘッセ行列を  $H_\lambda$  と書き、関数芽  $h: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$  に対して  $\eta^k h := \eta(\eta^{k-1} h)$  と書くことにすると、判定法は以下ようになる。

**Theorem 2.1 (Whitney[12], 佐治 [10])**  $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  を corank 1 の可微分写像芽とする。 fold, cusp, swallow tail, baks, lips は以下のように特徴付けられる。

- $f \sim_{\mathcal{A}} (x, y^2) \Leftrightarrow \eta\lambda(0) \neq 0$
- $f \sim_{\mathcal{A}} (x, xy + y^3) \Leftrightarrow d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$
- $f \sim_{\mathcal{A}} (x, xy + y^4) \Leftrightarrow d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0$
- $f \sim_{\mathcal{A}} (x, y^3 \pm x^2y) \Leftrightarrow d\lambda(0) = 0, \det H_\lambda(0) \neq 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$

$\eta^k \lambda$  のような量は内在的微分と呼ばれ安定写像芽の解析によく用いられてきたが [12, 7, 5], 上の佐治による判定法は内在的微分は swallowtail などの安定でない写像芽に対しても意味のある量であることを示している。このような特徴づけは、写像芽の判定に座標変換の技巧を必要とせず、ただ微分の計算を実行すれば良いという点で応用上使いやすく、また分類の専門家でなくとも  $\mathcal{A}$ -分類を簡単に応用できるという利点がある。

$\mathcal{A}$ -余次元が 4 以上の  $\mathcal{A}$ -型に対しても  $\eta^k \lambda$  を用いた判定法はその重要なジェットの型の決定に有用である。 [3] で著者は表 3 のジェットの型に対して Theorem 2.2 の判定法を完成させている。これらのジェットの型は Rieger[9] による位相的  $\mathcal{A}$ -型の分類と関連している [3] ことに注意しておく。以下で、二つの可微分写像芽  $f, g: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$  について  $r$ -ジェット  $j^r f(0), j^r g(0)$  が  $\mathcal{A}^r$ -同値であるとは、可微分同相写像芽  $\tau, \sigma: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^n, 0$  が存在して  $j^r f(0) = j^r(\tau \circ f \circ \sigma^{-1})(0)$  が成り立つことであり、  $j^r f(0) \sim_{\mathcal{A}^r} j^r g(0)$  と書く。

**Theorem 2.2 ([3])**  $f: \mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  を corank 1 の可微分写像芽とする。表 3 のそれぞれのジェットは以下のように特徴づけられる。

- $r \geq 5$  に対して,

$r$ -ジェット	$(x, xy + y^r)$	$\dots 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$
3-ジェット	$(x, y^3)$	$\dots 4_k$
4-ジェット	$(x, xy^2 + y^4)$	$\dots 11_{2k+1}$
5-ジェット	$(x, xy^2 + y^5)$	$\dots 12, 13$
6-ジェット	$(x, xy^2 + y^6)$	$\dots 15$
4-ジェット	$(x, x^2y + y^4)$	$\dots 16, 17$
4-ジェット	$(x, x^2y + xy^3)$ or $(x, x^2y)$	$\dots 18$
4-ジェット	$(x, y^4 + \alpha x^2y^2 + x^3y)$ or $(x, y^4 + \alpha x^2y^2)$	$\dots 19$

表3 右端の番号はそれぞれのジェットに対応する  $\mathcal{A}$ -余次元 6 以下 (表 1) の  $\mathcal{A}$ -型の番号である.

$$j^r f(0) \sim_{\mathcal{A}^r} (x, xy + y^r) \iff$$

$$d\lambda(0) \neq 0, \quad \eta^i \lambda(0) = 0 \quad (1 \leq i \leq r-2), \quad \eta^{r-1} \lambda(0) \neq 0.$$

- $r \geq 4$  に対して,

$$j^r f(0) \sim_{\mathcal{A}^r} (x, xy^2 + y^r) \iff$$

$$d\lambda(0) = 0, \quad \det H_\lambda(0) < 0, \quad \eta^i \lambda(0) = 0 \quad (2 \leq i \leq r-2), \quad \eta^{r-1} \lambda(0) \neq 0.$$

- $j^3 f(0) \sim_{\mathcal{A}^3} (x, y^3) \iff$

$$d\lambda(0) = 0, \quad \text{rank } H_\lambda(0) = 1, \quad \eta^2 \lambda(0) \neq 0.$$

- $j^4 f(0) \sim_{\mathcal{A}^4} (x, x^2y + y^4) \iff$

$$d\lambda(0) = 0, \quad \text{rank } H_\lambda(0) = 1, \quad \eta^2 \lambda(0) = 0, \quad \eta^3 \lambda(0) \neq 0.$$

- $j^4 f(0) \sim_{\mathcal{A}^4} (x, x^2y + xy^3)$  or  $(x, x^2y) \iff$

$$d\lambda(0) = 0, \quad \text{rank } H_\lambda(0) = 1, \quad \eta^2 \lambda(0) = \eta^3 \lambda(0) = 0.$$

- $j^4 f(0) \sim_{\mathcal{A}^4} (x, x^3y + \alpha x^2y^2 + y^4)$  or  $(x, \alpha x^2y^2 + y^4) \iff$

$$d\lambda(0) = 0, \quad \text{rank } H_\lambda(0) = 0, \quad \eta^3 \lambda(0) \neq 0.$$

Corollary 2.3 表 4, 5, 6, 7 は Theorem 2.1, 2.2 を系統的にまとめたものであり, 追跡していくことで表 3 のジェットの型の判定ができる. ただし, 表 5, 6, 7 におけるジェットの標準形の横の番号はそのジェットに対応する  $\mathcal{A}$ -余次元 6 以下 (表 1) の  $\mathcal{A}$ -型の番号である ( $\mathcal{A}$ -余次元 7 以上の  $\mathcal{A}$ -型は書かれていない).

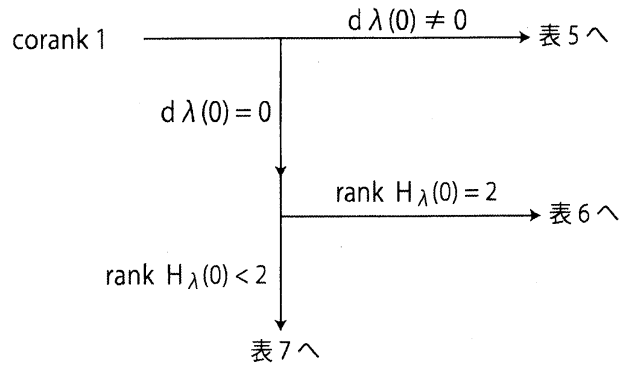


表 4

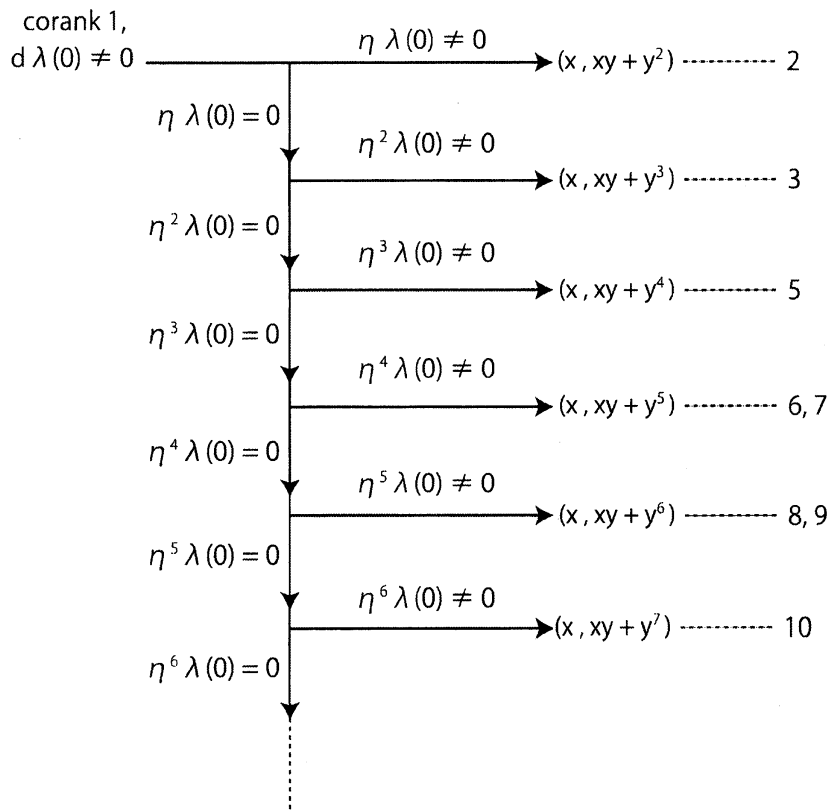


表 5

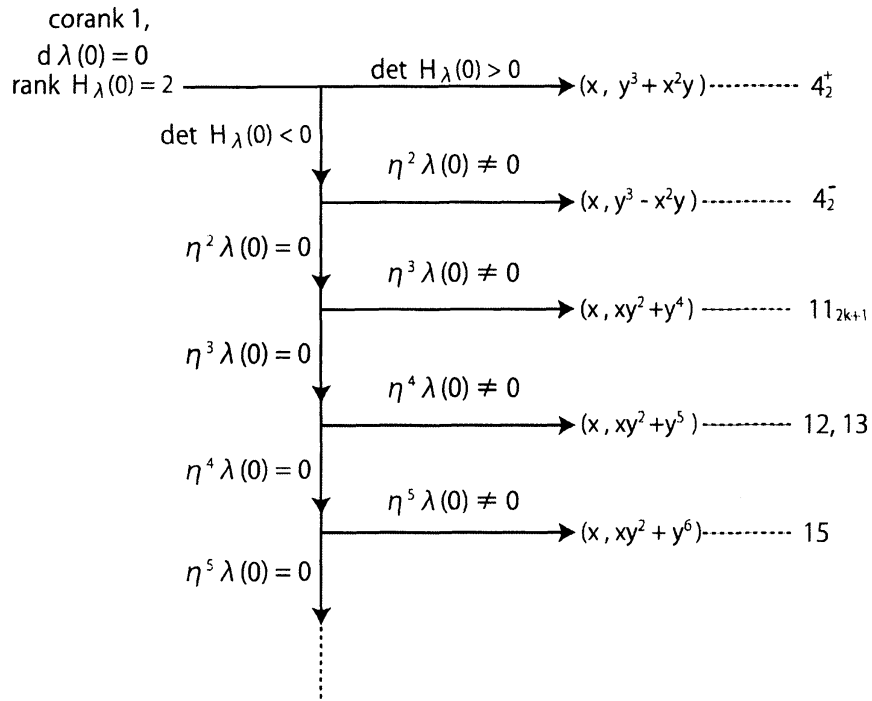


表 6

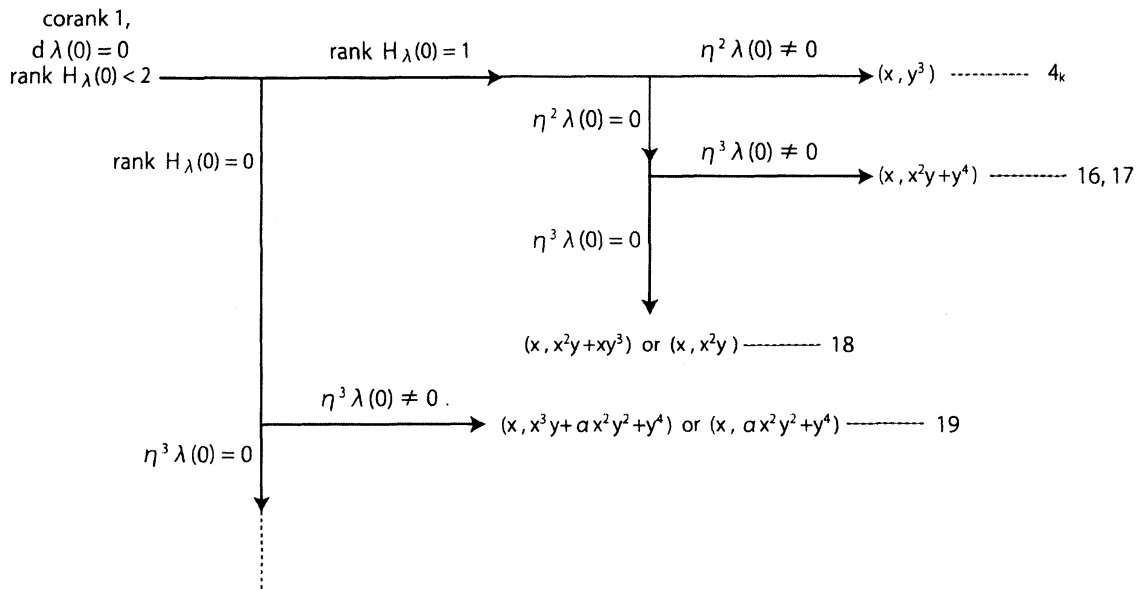


表 7

Remark 2.4 Theorem 2.2 はあくまでもジェットの判定法であり  $\mathcal{A}$ -余次元  $\geq 4$  の写像芽の  $\mathcal{A}$ -型を判定するためには追加条件が必要である. 例えば, 5-ジェットを  $(x, xy + y^5)$  と判定できた時, 写像芽の  $\mathcal{A}$ -型は 6 型もしくは 7 型のどちらかであり, その  $\mathcal{A}$ -型はより高次の項によって決定される [8]. すなわち,  $f = (x, xy + y^5 + \sum_{i+j \geq 6} a_{ij} x^i y^j)$  ( $a_{ij} \in \mathbb{R}$ ) と書けた時,

$$\begin{aligned} f \sim_{\mathcal{A}} (x, xy + y^5 \pm y^7) &\iff a_{07} - \frac{5}{8} a_{06}^2 \neq 0, \\ f \sim_{\mathcal{A}} (x, xy + y^5) &\iff a_{07} - \frac{5}{8} a_{06}^2 = 0, \end{aligned}$$

と判定できる [3]. このような条件は  $\sigma \circ f \circ \tau^{-1} = (x, xy + y^5 + \alpha y^7 + O(8))$  となるような微分同相写像芽  $\sigma, \tau$  を具体的に構成することによって得られる. ここで  $\alpha$  は  $\alpha = a_{07} - \frac{5}{8} a_{06}^2$  となる. Rieger [8] の分類では Mather の補題を利用するため具体的な微分同相写像芽の形はわからず, 従って  $\alpha$  の値も得ることができない. 表の他の  $\mathcal{A}$ -型に対しても同様の追加条件が必要であり, [3] ではそれぞれのケースで可微分同相写像芽を具体的に構成し必要な条件を求めている. これらの追加条件の幾何学的な意味づけは現在研究中であるが, [2] で T. Gaffney が行っているような  $\mathcal{A}$ -分類より詳細な  $\mathcal{A}$ -接空間の研究 (認識問題) や J. Damon の  $\mathcal{K}_D$ -理論との関連の中で説明できるはずである.

### 3 判定法 ( $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ )

著者は [4] で可微分写像芽  $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$  においても, 前章における  $\eta$  と  $\lambda$  を用いた判定法が有用であることを示している. すなわち,  $f: \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$  を corank 1 の可微分写像芽とし, 関数  $\lambda$  を  $\lambda(x, y, z) := \frac{\partial(f_1, f_2, f_3)}{\partial(x, y, z)}$ , 可微分ベクトル場  $\eta := \eta_1(x, y, z) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_2(x, y, z) \frac{\partial}{\partial y} + \eta_3(x, y, z) \frac{\partial}{\partial z}$  を原点の近傍で  $f$  の微分  $df$  の kernel 方向を張るものとして任意に取る.  $\eta\lambda(0) = 0$  が成り立つときは写像芽  $F: \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$  を  $F := (\lambda, \eta\lambda)$  として定義することにする. これらを用いて表 2 の  $\mathcal{A}$ -型の判定法を得ることができる.

Theorem 3.1 ([4])  $f: \mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$  を corank 1 の可微分写像芽とする. 表 2 の  $\mathcal{A}$ -型は以下のように特徴付けられる.

- $f \sim_{\mathcal{A}} (x, y, z^2) \iff \eta\lambda(0) \neq 0$
- $f \sim_{\mathcal{A}} (x, y, xz + z^3) \iff d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$
- $f \sim_{\mathcal{A}} (x, y, xz + yz^2 + z^4)$   
 $\iff d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0, \text{rank } dF(0) = 2$
- $f \sim_{\mathcal{A}} (x, y, xz + yz^2 + z^5)$   
 $\iff d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = \eta^3\lambda(0) = 0, \eta^4\lambda(0) \neq 0, \text{rank } dF(0) = 2$
- $f \sim_{\mathcal{A}} (x, y, xz \pm y^2z^2 + z^4)$

- $\Leftrightarrow d\lambda(0) \neq 0, \eta\lambda(0) = \eta^2\lambda(0) = 0, \eta^3\lambda(0) \neq 0, F \sim_{\mathcal{A}} (x, \pm y^2 + z^2)$   
 •  $f \sim_{\mathcal{A}} (x, y, (\pm x^2 \pm y^2)z + z^3)$   
 $\Leftrightarrow d\lambda(0) = 0, \det H_{\lambda}(0) \neq 0, \eta^2\lambda(0) \neq 0$

Corollary 3.2 表 8 は Theorem 3.1 を系統的にまとめたものであり, 追跡していくことで表 2 の  $\mathcal{A}$  型を判定できる.



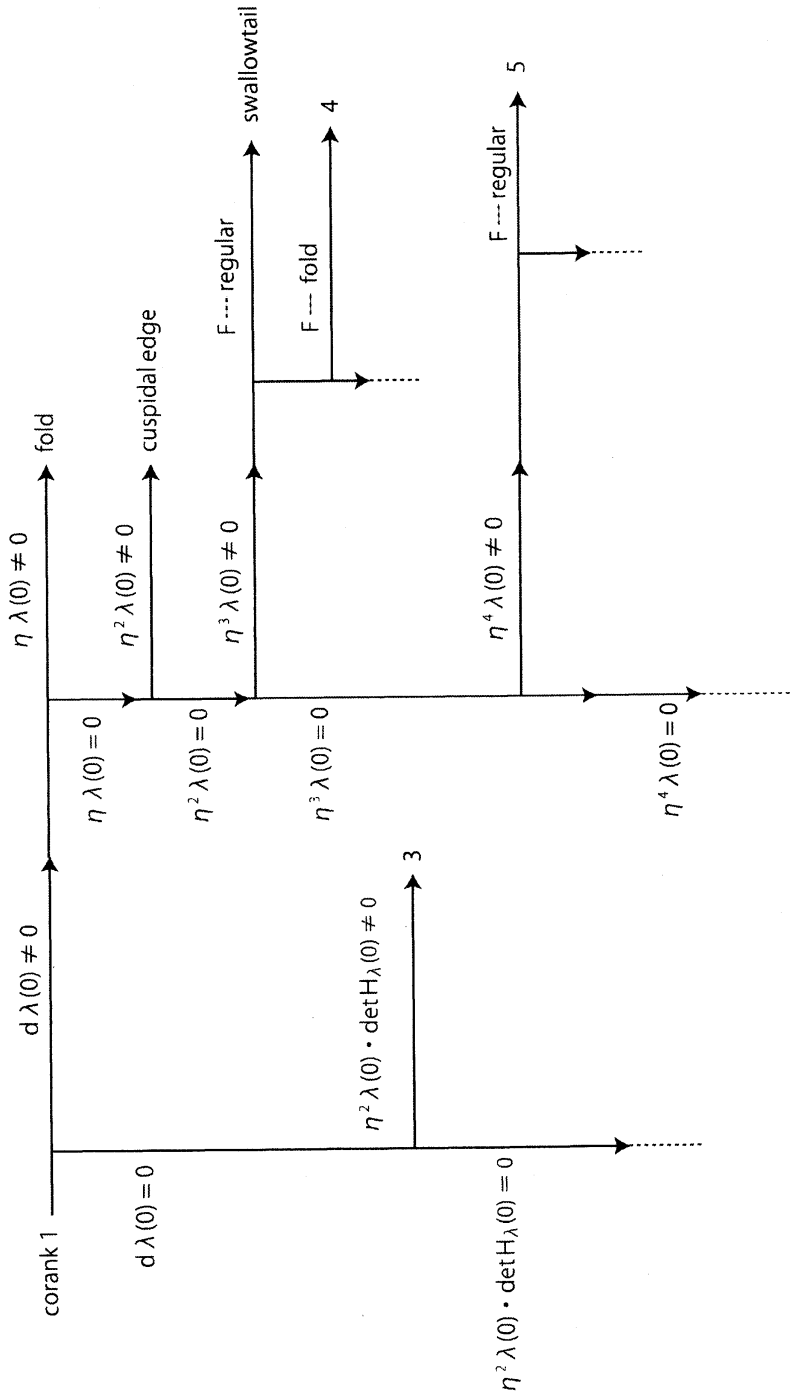


表 8

## 参考文献

- [1] J. W. Bruce, A classification of 1-parameter families of map-germs  $\mathbb{R}^3, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$  with application to condensation problems. J. London Math. Soc. (2) 33 (1986), 375-384.
- [2] T. Gaffney, The structure of  $T\mathcal{A}(f)$ , classification and an application to differential geometry, In singularities, Part I, Proc. Sympos. in Pure Math. 40 (1983), Amer. Math. Soc., 409-427.
- [3] Y. Kabata, Recognition of plane-to-plane map-germs, preprint.
- [4] Y. Kabata, Recognition of map-germs from 3-space to 3-space, in preparation.
- [5] H. I. Levine, The singularities,  $S_1^q$ , Illinois J. Math. 8 (1964), 152-168.
- [6] 西村 尚史, 福田 拓生, 特異点の数理 2, 共立出版, 2002.
- [7] I. R. Porteous, Geometric Differentiation: For the Intelligence of Curves and Surfaces, 2nd edition, Cambridge University Press (2001).
- [8] J. H. Rieger, Families of maps from the plane to the plane. J. London Math. Soc. (2) 36 (1987), no. 2, 351-369.
- [9] J. H. Rieger, Versal topological stratification and the bifurcation geometry of map-germs of the plane. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 107, no. 1, (1990), 127-147.
- [10] K. Saji, Criteria for singularities of smooth maps from the plane into the plane and their applications. Hiroshima Math. J. 40, (2010), 229-239.
- [11] K. Saji, M. Umehara, and K. Yamada,  $A_k$  Singularities of wave fronts. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 146 (2009), no. 3, 731-746.
- [12] H. Whitney, On singularities of mappings of Euclidian Spaces I. Mappings of the plane into the plane, Ann. of Math. 62, (1955), 374-410.
- [13] T. Yoshida, Y. Kabata and T. Ohmoto, Bifurcations of plane-to-plane map-germs of corank 2, Quarterly Jour. Math, (2014), doi:10.1093/qmath/hau013.
- [14] T. Yoshida, Y. Kabata and T. Ohmoto, Bifurcations of plane-to-plane map-germs of corank 2 of parabolic type, to appear in RIMS koukyuroku Bessatsu (2015).