数理解析研究所講究録
第1950巻 2015年 12-27

On Sheaves Categorically Equivalent to Distributive Concrete Domains[1]

倉田俊彦 (Toshihiko Kurata)
法政大学経営学部
東京都千代田区富士見 2-17-1
kurata@hosei.ac.jp

概要

distributive concrete domain をある種の sheaf として捉える試みを行う. [5] における考察を修正して, computational sheaf の概念を定義し, domain から sheaf への変換 S と sheaf から domain への変換 C を与える. 更に, 変換 $C \circ S$ の下で distributive concrete domain の構造が不変となることを示し, 両概念の同等性を部分的に確認する.

1. Distributive Concrete Domain の表現定理

高階の計算体系 [2] における逐次評価の意味論を構築するための枠組みとして考案された順序構造の一つに distributive concrete domain [3, 4, 6] がある. 以下では, distributive concrete domain に関して今回の考察の中で必要とされる基本的な定義と表現定理を纏めておく.

半順序集合 $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ に関連する記法は [1, 4] などに従う. 例えば, $\mathsf{K}D$ で D 中のコンパクト元の集合を表し, $x \in D$ に対して $\mathsf{K}D_x =_{def} \{a \in \mathsf{K}D \mid a \sqsubseteq x\}$ と定義する. 任意の $x, y \in D$ に対して, $x \uparrow y$ で D 中に $\{x, y\}$ の上界が存在することを表す. また, $x \sqsubset y$ であり, 更に $x \sqsubseteq z \sqsubseteq y$ の時は $x = z$ または $y = z$ のどちらかが保証される時には $x \prec y$ と記述することにする. x から y までの interval は $[x, y] =_{def} \{z \in D \mid x \sqsubseteq z \sqsubseteq y\}$ として定義され, D 上の interval の集合を $\mathrm{I}(D)$ とする. そして, $\mathrm{I}(D)$ の上に擬順序 $\leq$ を

$$[x_1, y_1] \leq [x_2, y_2] \iff x_1 = y_1 \sqcap x_2 \ \ \& \ \ y_2 = y_1 \sqcup x_2$$

のように導入して, この擬順序を含む最小の同値関係を $\sim$ と記述する. また, 以下では, 任意の $X \subseteq \mathrm{I}(D)$ に対して, 擬順序 $\leq$ に関する X の極小元の集合を $\min X$ と記述する.

[1]本研究は科研費基盤研究 (C)(24500025) の助成を受けたものである.

その上で, $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ が任意の $a \in \mathsf{K}D$ と $x, y, z \in D$ に対して以下の 5 条件を満たす Scott domain[2] である時に, これを distributive concrete domain と呼ぶ.

(性質 D)　$y \uparrow z \Longrightarrow x \sqcap (y \sqcup z) = (x \sqcap y) \sqcup (x \sqcap z)$.

(性質 I)　$\# \mathsf{K}D_a < \omega$.

(性質 C)　$x \uparrow y \ \& \ x \sqcap y \prec x \Longrightarrow y \prec x \sqcup y$.

(性質 Q)　$\neg(x \uparrow y) \ \& \ x \sqcap y \prec x \Longrightarrow \exists ! t \in D \ (\neg(x \uparrow t) \ \& \ x \sqcap y \prec t \sqsubseteq y)$.

(性質 R)　$x \prec y \ \& \ x \prec z \ \& \ [x, y] \sim [x, z] \Longrightarrow y = z$.

こうした distributive concrete domain の順序構造を通常の表現定理と同様の視点で特徴付ける試み（例えば, [4] など）が知られていて, それには concrete data structure と呼ばれる基礎的な構造 $\mathscr{M} = \langle C, V, E, \vdash \rangle$ が利用される. ここで, C と V は可算集合であり, C の要素は cell と呼ばれ, V の要素は value と呼ばれる. E は $C \times V$ の部分集合であり, その要素は event と呼ばれる. また, event e に対して, $c(e)$ で第 1 成分の cell を表し, $v(e)$ で第 2 成分の value を表す. $\vdash \in \mathcal{F}E \times C$ は event の有限集合[3] からアクセス可能な cell を規定する 2 項関係であり enabling relation と呼ばれる. そして, concrete data structure においては, これらの要素について以下の 2 つの性質が要求される.

(1) $\forall c \in C \ \exists v \in V \ \ (c, v) \in E$.

(2) $<$ は well-founded である.

但し, $<$ は以下の条件を満たす C 上の最小の 2 項関係とする.

(1) $\exists A \in \mathcal{F}E \ \exists v \in V \ ((c_1, v) \in A \ \& \ A \vdash c_2) \Longrightarrow c_1 < c_2$.

(2) $c_1 < c_2 \ \& \ c_2 < c_3 \Longrightarrow c_1 < c_3$.

また, $c_1 < c_2$ または $c_1 = c_2$ が成り立つ時に $c_1 \leq c_2$ として, C 上の半順序 $\leq$ を定義する.

concrete data structure $\mathscr{M} = \langle C, V, E, \vdash \rangle$ に対して, 以下の条件を満たすような event の集合 $x \in \mathcal{P}E$ は state と呼ばれ, state の集合は $D_{\mathscr{M}}$ と表記される.

(1) $(c, v_1), (c, v_2) \in x \Longrightarrow v_1 = v_2$.

(2) $(c, v) \in x \Longrightarrow \exists A \in \mathcal{F}x \ \ A \vdash c$.

---

[2] $\mathsf{K}D$ が可算集合であり, 任意の元がその近似となるコンパクト元の有向集合の上限として記述できる半順序集合 D で, 任意の $X \subseteq D$ に対して, X 中の任意の 2 元 x, y が D 中で $x \uparrow y$ を満たしている時には常に X の上限が存在するものを Scott domain と呼ぶ.

[3] E の有限部分集合の集合を $\mathcal{F}E$ と表記する.

任意の $x \in D_{\mathscr{M}}$ に対して $A(x) =_{def} \{\, c \in C \mid c \notin c(x) \ \& \ \exists A \in \mathcal{F}x \ \ A \vdash c \,\}$ と記述する. そして, 任意の $x \in D_{\mathscr{M}}$ と $c \in A(x)$ に対して, $A \vdash c$ となる $A \in \mathcal{F}x$ が一意に定まるような特殊な構造は deterministic concrete data structure と呼ばれる.

定理 1. 半順序集合 D に対して, D が distributive concrete domain であることと $D \simeq D_{\mathscr{M}}$ を満たす deterministic concrete data structure $\mathscr{M}$ が存在することは同値である.

実際に, distributive concrete domain $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ 上の interval 構造に基づく以下の構成から目的の deterministic concrete data structure を得ることができる. $x, y \in D$ に対して, 特に $x \prec y$ であるような interval $[x, y]$ を prime interval と呼び, prime interval の集合を $\mathrm{PI}(D)$ とする. $[x_1, y_1], [x_2, y_2] \in \mathrm{PI}(D)$ に対して,

$$x_1 = x_2 \ \& \ (y_1 \uparrow y_2 \implies y_1 = y_2)$$

が成り立つ時に $[x_1, y_1] \simeq [x_2, y_2]$ として, $[x_1, y_1] \simeq [x_3, y_3] \sim [x_2, y_2]$ となる $[x_3, y_3] \in \mathrm{PI}(D)$ が存在する時に $[x_1, y_1] \approx [x_2, y_2]$ とする. このようにして定義される関係 $\approx$ は $\mathrm{PI}(D)$ 上の同値関係となることが知られている. この同値関係 $\approx$ に関して $[x, y] \in \mathrm{PI}(D)$ を含む同値類を $[x, y]_c$ と記述する. また, 同様に, 同値関係 $\sim$ に関して $[x, y] \in \mathrm{PI}(D)$ を含む同値類を $[x, y]_v$ と記述する.

その上で, cell の集合を $C_D =_{def} \{\, [a, b]_c \mid a, b \in \mathsf{K}D \ \& \ [a, b] \in \mathrm{PI}(D) \,\}$, value の集合を $V_D =_{def} \{\, [a, b]_v \mid a, b \in \mathsf{K}D \ \& \ [a, b] \in \mathrm{PI}(D) \,\}$ と定め, それによって, event の集合を $E_D =_{def} \{\, ([a, b]_c, [c, d]_v) \in C_D \times V_D \mid [c, d]_v \in [a, b]_c / \sim \,\}$ と定義する. そして, 更に, 任意の $[a, b]_c \in C_D$ と $[c, d] \in \min\, [a, b]_c$ に対して $A_c \vdash_D [a, b]_c$ が成り立つとして enabling relation $\vdash_D$ を定義する. ここで, A_c は $\{\, ([e, f]_c, [e, f]_v) \in E_D \mid f \in \mathsf{K}D_c \,\} \in \mathcal{F}E_D$ を表すこととする.

このようにして得られた構造 $\mathscr{M}_D =_{def} \langle C_D, V_D, E_D, \vdash_D \rangle$ は deterministic concrete data structure となり, $\mathscr{M}_D$ から生成される distributive concrete domain $\langle D_{\mathscr{M}_D}, \subseteq \rangle$ と $\langle D, \sqsubseteq \rangle$ の間には実際に順序同型

$$D \underset{\Psi_D}{\overset{\Phi_D}{\rightleftarrows}} D_{\mathscr{M}_D}$$

が存在する. ここで, 任意の $x \in D$ に対して $\Phi_D(x) =_{def} \{\, ([a, b]_c, [a, b]_v) \in E_D \mid b \in \mathsf{K}D_x \,\}$ であり, 任意の $x \in D_{\mathscr{M}}$ に対して

$$\Psi_D(x) =_{def} \bigsqcup \{\, b \in \mathsf{K}D \mid \exists a \in \mathsf{K}D \ (([a, b]_c, [a, b]_v) \in x \ \& \ [a, b] \in \min\, [a, b]_v) \,\}$$

である.

2. Domain から Sheaf へ

この節では, $\mathscr{M}$ を deterministic concrete data structure として, $\mathscr{M}$ から前節のように生成される distributive concrete domain $\langle D_{\mathscr{M}}, \subseteq \rangle$ に一種の sheaf 構造が自然な形で備わっていることを確認する.

p を state として, $D_{\mathscr{M}}$ 中で上に有界な任意の部分集合 X（必然的に $\bigcup X$ も state となる）に対して, $p \subseteq \bigcup X$ の時は常に $p \subseteq x$ を満たす $x \in X$ が存在するならば, p は prime であると呼ぶ. そして, $D_{\mathscr{M}}$ 中の全ての prime state の集合を $P_{\mathscr{M}}$ で表す. [3] では, 各 $c \in C$ に対して, その proofset と呼ばれる state が以下の条件から（C 上の半順序 $\leq$ に沿って）再帰的に定義されている.

(1) $\vdash c$ の時, $\emptyset$ は c の proofset である.

(2) $(c_1, v_1), (c_2, v_2), \ldots, (c_n, v_n) \vdash c$ であり, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して x_i が c_i の proofset の時, $\bigcup_{i=1}^n x_i \in D_{\mathscr{M}}$ であれば $\bigcup_{i=1}^n x_i \cup \{(c_1, v_1), (c_2, v_2), \ldots, (c_n, v_n)\}$ は c の proofset である.

これについて, p が prime state であることは, $p = x \cup \{e\}$ となる event e と $c(e)$ の proofset x が存在することに他ならない. 実際に, $p \in P_{\mathscr{M}}$ であれば, 集合

$$X = \{(x, e) \in D_{\mathscr{M}} \times E \mid x \cup \{e\} \subseteq p \ \& \ x \text{ は } c(e) \text{ の proofset}\}$$

は上界 p を持ち, $p = \bigcup \{x \cup \{e\} \mid (x, e) \in X\}$ が成り立っている. 従って, prime state の定義から $p \subseteq x \cup \{e\}$ を満たす $(x, e) \in X$ が存在し, $p = x \cup \{e\}$ が成り立つ. 逆に, x を $c(e)$ の proofset として $p = x \cup \{e\}$ と表すことができた時には, $p \subseteq \bigcup X$ を満たす上に有界な集合 $X \subseteq D_{\mathscr{M}}$ に対して, $e \in \bigcup X$ であるので, $e \in y$ を満たす $y \in X$ が存在する. この y に対して $p = x \cup \{e\} \subseteq y$ であることは state と proofset の定義から明らかである. 従って p は prime となる.

prime state p は必然的に非空有限集合であり, ある特定の event e を得るために本質的に必要とされた event のみを集めて構成された state とみなすことが出来る. このように p から一意に定まる event e を $r(p)$ と記述することにする. また, 以下の補題より, 任意の $x \in D_{\mathscr{M}}$ と $e \in x$ に対して, x に含まれる $c(e)$ の proofset は一意に定まることになるので, それを $\mathrm{ps}(e, x)$ と記述し $\mathrm{pr}(e, x) =_{def} \mathrm{ps}(e, x) \cup \{e\}$ と定義する.

補題 2. 任意の $p, q \in P_{\mathscr{M}}$ に対して, $r(p) = r(q)$ かつ $p \uparrow q$ ならば $p = q$ である.

Proof. 任意の prime state p に対して

$$\forall q \in P_{\mathscr{M}} \ (r(p) = r(q) \ \& \ p \uparrow q \implies p = q)$$

が成り立つことを p の大きさに関する帰納法によって示す. p における $r(p)$ の enabling を $A \in \mathcal{F}x$ として, q における $r(q)$ の enabling を $B \in \mathcal{F}y$ とする. この時, $A \neq B$ とすると, p と q の上界となる state の中では event $r(p) = r(q)$ に対して異なる 2 つの enabling A と B が存在することとなり $\mathscr{M}$ の決定性に反する. 従って, $A = B$ である. 更に, 各 $e \in A = B$ に対して, p における $c(e)$ の proofset を X_e として, q における $c(e)$ の proofset を Y_e とすると, 帰納法の仮定から $X_e \cup \{e\} = Y_e \cup \{e\}$ である. 従って,

$$p = \bigcup_{e \in A} X_e \cup A \cup \{r(p)\} = \bigcup_{e \in B} Y_e \cup B \cup \{r(q)\} = q$$

が得られる. □

この prime state の概念を基本的な部品として目的の sheaf 構造が得られる. 先ず, 基礎となる位相空間を得るために

$$X_{\mathscr{M}} =_{def} \coprod_{p \in P_{\mathscr{M}}} c(p)^4$$

とする. また, $p \in P_{\mathscr{M}}$ に対して $c(p)$ から $X_{\mathscr{M}}$ への埋め込みを $in_p : c(p) \hookrightarrow X_{\mathscr{M}}$ と記述し, 任意の $U \subseteq X_{\mathscr{M}}$ に対して $U_p =_{def} \{c \in c(p) \mid in_p(c) \in U\}$ と定義する. 更に, $p, q \in P_{\mathscr{M}}$ に対して, 以下の条件が成り立つ時に $p \sim q$ として p, q の大きさに関して再帰的に同値関係 $\sim$ を定義する.

(1) $c(r(p)) = c(r(q))$.

(2) $e_1, \ldots, e_m \vdash c(r(p))$ かつ $e'_1, \ldots, e'_m \vdash c(r(q))$ であり, $i = 1, \ldots, m$ に対して $\mathrm{pr}(e_i, p) \sim \mathrm{pr}(e'_i, q)$ となるような $m \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_m \in p$, $e'_1, \ldots, e'_m \in q$ が存在する.

この同値関係は value で埋められていく cell の履歴が等しい prime state を関係付けていて, $p \sim q$ かつ $p \uparrow q$ の時は $p = q$ が成り立つことなどは定義から明らかである.

その上で, 任意の $p, q \in P_{\mathscr{M}}$ に対して, $q|_p =_{def} \bigcup \{ r \in P_{\mathscr{M}} \mid r \subseteq q \ \& \ \exists r' \subseteq p \quad r \sim r' \}$ として, $B(p) \subseteq X_{\mathscr{M}}$ を

$$B(p) =_{def} \coprod_{q \in P_{\mathscr{M}}} c(q|_p)$$

のように定義する. この時, 定義から明らかに $p \subseteq q$ ならば $B(p) \subseteq B(q)$ であり, $p \sim q$ ならば $B(p) = B(q)$ である. 以上の準備の下で, $B_{\mathscr{M}} =_{def} \{B(p) \mid p \in P_{\mathscr{M}}\}$ とすると, $B_{\mathscr{M}}$ は位相空間の基底となることが分かり, $B_{\mathscr{M}}$ から生成される位相を $\mathcal{O}X_{\mathscr{M}}$ と記述することにする.

---

[4]任意の state x に対して, $c(x) =_{def} \{c(e) \in C \mid e \in x\}$ とする.

補題 3. $B_{\mathscr{M}}$ は位相空間の基底となる.

Proof. 任意の $p \in P_{\mathscr{M}}$ と $c \in c(p)$ に対して, $c \in c(p|_p)$ より $in_p(c) \in B(p) \subseteq \bigcup B_{\mathscr{M}}$. 従って, $X_{\mathscr{M}} = \bigcup B_{\mathscr{M}}$ である. また, $in_p(c) \in B(p_1) \cap B(p_2)$ とすると, $c = c(e) = c(e_1) = c(e_2)$ であり $\mathrm{pr}(e,p) \sim \mathrm{pr}(e_1,p_1)$, $\mathrm{pr}(e,p) \sim \mathrm{pr}(e_2,p_2)$ となる event $e \in p$, $e_1 \in p_1$, $e_2 \in p_2$ が存在する. そこで, $q = \mathrm{pr}(e,p) \in P_{\mathscr{M}}$ とすると, $B(q) \subseteq B(p_1)$ かつ $B(q) \subseteq B(p_2)$ であり,

$$in_p(c) \in in_p(c(p|_q)) \subseteq B(q) \subseteq B(p_1) \cap B(p_2)$$

が得られる. □

補題 4. 任意の $p \in P_{\mathscr{M}}$ に対して, 以下が成り立つ.
(1) 任意の $U \in \mathcal{O}X_{\mathscr{M}}$ に対して, $in_p(c(p)) \subseteq U$ と $B(p) \subseteq U$ は同値である.
(2) $B(p) \subseteq \bigcup_{i \in I} B(p_i)$ ならば $B(p) \subseteq B(p_i)$ となる $i \in I$ が存在する.

Proof. (1) $in_p(c(p)) \subseteq U$ とすると, $in_p(c(p)) \subseteq B(q) \subseteq U$ となる $q \in P_{\mathscr{M}}$ が存在する. この q に対して $p = p|_q$ であるから, $r \sim p$ かつ $r \subseteq q$ を満たす $r \in P_{\mathscr{M}}$ が存在し, $B(p) = B(r) \subseteq B(q) \subseteq U$ が得られる. 逆は, $in_p(c(p)) \subseteq B(p)$ より明らか.
(2) $B(p) \subseteq \bigcup_{i \in I} B(p_i)$ とすると, $in_p(c(p)) \subseteq \bigcup_{i \in I} in_p(c(p|_{p_i}))$ であり, $p \subseteq \bigcup_{i \in I} p|_{p_i}$ となる. ここで p は prime であるから, $p \subseteq p|_{p_i}$ となる $i \in I$ が存在する. この i に対して $in_p(c(p)) \subseteq B(p_i)$ であり, (1) から $B(p) \subseteq B(p_i)$ が得られる. □

このような位相空間の上で, 以下の条件を満たす prime state の集合 $s \subseteq P_{\mathscr{M}}$ を section と考え, section の集合を $S_{\mathscr{M}}$ と記述する.

(1) $\bigcup s \in D_{\mathscr{M}}$.

(2) $p \in s \ \&\ q \in P_{\mathscr{M}} \ \&\ q \subseteq p \implies q \in s$.

その上で, 任意の $s \in S_{\mathscr{M}}$ に対して開集合 $U^s =_{def} \bigcup_{p \in s} B(p)$ を考え, $s \in F_{\mathscr{M}} U^s$ となるように presheaf $F_{\mathscr{M}} \in \mathrm{Ob}(\mathbf{Sets}^{\mathcal{O}X_{\mathscr{M}}^{\mathrm{op}}})$ を導入する. つまり, 対象に関しては, 任意の $U \in \mathcal{O}X_{\mathscr{M}}$ に対して, $F_{\mathscr{M}} U =_{def} \{s \in S_{\mathscr{M}} \mid U = U^s\}$ と定める. また, 射に関しては, $U, V \in \mathcal{O}X_{\mathscr{M}}$, $V \subseteq U$, $s \in F_{\mathscr{M}} U$ とした時に, $(F_{\mathscr{M}})_{V,U}(s) =_{def} \{p \in s \mid in_p(c(p)) \subseteq V\}$ のように s の制限に相当する section を定める. この定義の下で, $F_{\mathscr{M}}$ が関手となっていることは容易に確認できて, $F_{\mathscr{M}}$ が sheaf となることも以下のように証明できる.

補題 5. 任意の $U, V \in \mathcal{O}X_{\mathscr{M}}$, $s \in F_{\mathscr{M}} U$ に対して, $V \subseteq U$ の時は $(F_{\mathscr{M}})_{V,U}(s) \in F_{\mathscr{M}} V$ である.

Proof. $V = U^{(F_{\mathscr{M}})_{V,U}(s)}$, つまり $V = \bigcup\{B(p) \mid p \in s \,\&\, B(p) \subseteq V\}$ を示せば十分である. $B(p) \subseteq V$ とすると, $in_p(c(p)) \subseteq B(p) \subseteq V \subseteq U^s$ であるから, $in_p(c(p)) \subseteq B(r_1)$ となるような $r_1 \in s$ が存在する. すると, $p = p|_{r_1}$ であるから $p \sim r_2$ かつ $r_2 \subseteq r_1$ を満たす $r_2 \in P_{\mathscr{M}}$ が存在する. この r_2 に対して, $B(p) = B(r_2)$ かつ $r_2 \in s$ であるから, $B(p)$ が右辺に含まれていることが分かる. 逆の包含関係は明らかである. □

補題 6. $p, q \in P_{\mathscr{M}}$ に対して, $c(e_1) = c(e_2)$ 且つ $v(e_1) \neq v(e_2)$ となる $e_1 \in p, e_2 \in q$ が存在しているとする. この時, $c(e_3) = c(e_4)$ 且つ $v(e_3) \neq v(e_4)$ であり, 更に $\mathrm{ps}(e_3, p) = \mathrm{ps}(e_4, q)$ を満たす $e_3 \in p$, $e_4 \in q$ が存在する.

Proof. cell に対して定義された半順序 $\leq$ に従って帰納法で証明する. 特に $\mathrm{ps}(e_1, p) \neq \mathrm{ps}(e_2, q)$ の場合は, $c(e_1') = c(e_2')$ かつ $v(e_1') \neq v(e_2')$ を満たす event $e_1' \in \mathrm{ps}(e_1, p)$, $e_2' \in \mathrm{ps}(e_2, q)$ が存在する. 実際に, そうでなければ $\mathrm{ps}(e_1, p) \cup \mathrm{ps}(e_2, q) \cup \{e_1\}$ や $\mathrm{ps}(e_1, p) \cup \mathrm{ps}(e_2, q) \cup \{e_2\}$ は複数の enabling を持つ cell が存在する state となるので, deterministic concrete data structure の定義に矛盾する. あとは, この e_1', e_2' に帰納法の仮定を適用して補題の主張が得られる. □

補題 7. $F_{\mathscr{M}}$ は位相空間 $(X_{\mathscr{M}}, \mathcal{O}X_{\mathscr{M}})$ 上の sheaf である.

Proof. 任意の $i, j \in I$ に対して $(F_{\mathscr{M}})_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = (F_{\mathscr{M}})_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j)$ が成り立つような $\langle s_i : i \in I\rangle \in \prod_{i \in I} F_{\mathscr{M}} U_i$ が与えられた時に, $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, $s = \bigcup_{i \in I} s_i$ と定義する. これに対して, $s \in F_{\mathscr{M}} U$ であることと, 全ての $i \in I$ に対して $(F_{\mathscr{M}})_{U_i, U}(s) = s_i$ となることとその一意性を確認する.

先ず, 任意の $i, j \in I, p \in s_i, q \in s_j$ に対して $p \uparrow q$ を示す. 仮に $c(e_1) = c(e_2)$ かつ $v(e_1) \neq v(e_2)$ となるような $e_1 \in p$, $e_2 \in q$ が存在したと仮定する. すると, 補題 6 より, $c(e_3) = c(e_4)$ かつ $v(e_3) \neq v(e_4)$ であり, $\mathrm{ps}(e_3, p) = \mathrm{ps}(e_4, q)$ を満たす $e_3 \in p$, $e_4 \in q$ が存在する. そこで, $r_3 = \mathrm{pr}(e_3, p)$ とすると, $r_3 \in s_i$ であり, $in_{r_3}(c(r_3)) \subseteq B(r_3) \subseteq U^{s_i}$ が成り立つ. 更に, $r_4 = \mathrm{pr}(e_4, q)$ とすると $r_3 \sim r_4$ となるので $B(r_3) = B(r_4)$ であり, $in_{r_3}(c(r_3)) \subseteq B(r_4) \subseteq U^{s_j}$ が成り立つ. 従って, $r_3 \in (F_{\mathscr{M}})_{U_i \cap U_j, U_i}(s_i) = (F_{\mathscr{M}})_{U_i \cap U_j, U_j}(s_j) \subseteq s_j$ が得られる. 従って, $e_3, e_4 \in \bigcup s_j$ となり s_j が section であることに矛盾する. 以上のことから, $p \uparrow q$ が得られ, $\bigcup s \in D_{\mathscr{M}}$ となるので $s \in S_{\mathscr{M}}$ が保証される. また, 定義から明らかに $U = U^s$ であり, $s \in F_{\mathscr{M}} U$ であることが分かる.

次に, 全ての $i \in I$ に対して $(F_{\mathscr{M}})_{U_i, U}(s) = s_i$ が成り立つことを確認する. 先ず, 任意の $p \in s_i$ に対して, 明らかに $p \in s$ かつ $in_p(c(p)) \subseteq U^{s_i}$ であるから $p \in (F_{\mathscr{M}})_{U_i, U}(s)$ が得

られる．逆に，$p \in (F_{\mathscr{M}})_{U_i,U}(s)$ とすると，$in_p(p) \subseteq U^{s_i}$ であるから $in_p(p) \subseteq B(q)$ となる $q \in s_i$ が存在し，$p = p|_q$ が成り立つ．一方で，$p \in s$ から $p \uparrow q$ となり，必然的に $p \subseteq q$ が保証される．従って $p \in s_i$ が得られる．この貼り合わせ $s \in F_{\mathscr{M}}U$ の一意性に関しては，任意の $p \in P_{\mathscr{M}}$ に対して，

$$\begin{aligned} p \in \bigcup_{i \in I}(F_{\mathscr{M}})_{U_i,U}(s) &\iff \exists i \in I \ \ p \in (F_{\mathscr{M}})_{U_i,U}(s) \\ &\iff \exists i \in I \ \ (p \in s \ \ \& \ \ in_p(p) \subseteq U_i) \\ &\iff p \in s \ \ \& \ \ in_p(p) \subseteq U \\ &\iff p \in s \end{aligned}$$

が成り立ち，$\bigcup_{i \in I}(F_{\mathscr{M}})_{U_i,U}(s) = s$ が保証される．以上の考察から，$F_{\mathscr{M}}$ が sheaf となることが分かる． $\square$

最後に，deterministic concrete data structure $\mathscr{M}$ から上のようにして生成された sheaf $F_{\mathscr{M}}$ の特徴を明らかにしておく．一般的に，$\mathsf{K}(\mathcal{O}X)$ が基底となり，任意の $U \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X)$ に対して $\mathsf{K}(\mathcal{O}X)_U$ が有限集合となるような位相空間 $(X, \mathcal{O}X)$ に対して，$(X, \mathcal{O}X)$ 上の sheaf F で $\bigcup_{U \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X)} FU$ が可算集合となるものを computational sheaf と呼ぶことにする．これらの条件が，distributive concrete domain の構造に対する特徴付けとなっていて，実際に $F_{\mathscr{M}}$ が computational sheaf となっていることが以下のように確認できる．

補題 8. (1) 任意の $U \in \mathcal{O}X_{\mathscr{M}}$ に対して，U がコンパクトであることと $U = \bigcup_{i=1}^{m} B(p_i)$ となる $m \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_m \in P_{\mathscr{M}}$ が存在することは同値である．また，$\mathsf{K}(\mathcal{O}X_{\mathscr{M}})$ は位相 $\mathcal{O}X_{\mathscr{M}}$ の基底となる．
(2) 任意の $U \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X_{\mathscr{M}})$ に対して $\mathsf{K}(\mathcal{O}X_{\mathscr{M}})_U$ は有限集合となる．

Proof. (1) 任意の $m \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_m \in P_{\mathscr{M}}$ に対して $\bigcup_{i=1}^{m} B(p_i) \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X_{\mathscr{M}})$ であることは容易に確認できる．このような形をした有限和集合の集合を B とおくと，定義から B が位相 $\mathcal{O}X_{\mathscr{M}}$ の基底であることは明らかである．すると，任意の $U \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X_{\mathscr{M}})$ に対して，$B_U = \{\bigcup_{i=1}^{m} B(p_i) \in B \mid \bigcup_{i=1}^{m} B(p_i) \subseteq U\}$ は有向集合であり，$U = \bigcup^{\uparrow} B_U$ が成り立つ．ここで，U のコンパクト性から $U \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} B(p_i)$ を満たす $\bigcup_{i=1}^{m} B(p_i) \in B_U$ が存在し，この時，明らかに $U = \bigcup_{i=1}^{m} B(p_i)$ である．以上から $B = \mathsf{K}(\mathcal{O}X_{\mathscr{M}})$ が保証される．
(2) 上で示したように，$U = \bigcup_{i=1}^{m} B(p_i)$ となる $m \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_m \in P_{\mathscr{M}}$ が存在する．ここで，任意の $n \in \mathbb{N}$, $q_1, \ldots, q_n \in P_{\mathscr{M}}$ に対して，補題 4 (2) より，$\bigcup_{j=1}^{n} B(q_i) \subseteq U$ であることは各 $j \in \{1, \ldots, n\}$ に対して $B(q_j) \subseteq B(p_i)$ となる $i \in \{1, \ldots, m\}$ が存在することと同

値である. 更に, $B(q_j) \subseteq B(p_i)$ は $B(q_j) = B(r)$ かつ $r \subseteq p_i$ となる $r \in P_{\mathscr{M}}$ が存在することと同値である. 従って, U に含まれるコンパクト開集合の集合は

$$\Big\{ \bigcup_{j=1}^{n} B(r_j) \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X_{\mathscr{M}}) \mid n \in \mathbb{N} \ \& \ r_1, \ldots, r_n \in P_{\mathscr{M}} \ \& \\ \forall j \in \{1, \ldots, n\} \ \exists i \in \{1, \ldots, n\} \ r_j \subseteq p_i \ \Big\}$$

となることが分かり, これは明らかに有限集合となる. □

補題 9. $\bigcup_{U \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X_{\mathscr{M}})} F_{\mathscr{M}}U$ は可算集合となる.

Proof. 任意の $U \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X_{\mathscr{M}})$, $s \in F_{\mathscr{M}}U$ に対して, $U = \bigcup_{i=1}^{m} B(p_i)$ となる $m \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots, p_m \in P_{\mathscr{M}}$ が存在する. そこで, 各 $i = 1, \ldots, m$ に対して $s_i = (F_{\mathscr{M}})_{B(p_i),U}(s)$ とすると, $F_{\mathscr{M}}$ が sheaf であることから $s = \bigcup_{i=1}^{m} s_i$ が成り立つ. また, $s_i \in F_{\mathscr{M}}B(p_i)$ から $B(p_i) = \bigcup_{q \in s_i} B(q)$ であるので, 補題 4 (2) より $B(p_i) = B(q_i)$ となる $q_i \in s_i$ が存在する. この q_i に対して, 任意の $r \in s_i$ は $B(r) \subseteq B(p_i) = B(q_i)$ を満たす. すると, $r \sim r' \subseteq q_i$ となる $r' \in s_i$ が存在することとなるが, $r \uparrow r'$ から $r = r'$ となる. 従って, $r \subseteq q_i$ であり, q_i は s_i の中で最大の prime state, つまり $s_i = \{r \in P_{\mathscr{M}} \mid r \subseteq q_i\}$ であることが分かる. 従って, s は各 s_i の最大限 q_i を用いて

$$s = \bigcup_{i=1}^{m} \{r \in P_{\mathscr{M}} \mid r \subseteq q_i\}$$

と分解できて, prime state は有限であるので, s は prime state の有限集合となることが分かる. 従って, $\bigcup_{U \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X_{\mathscr{M}})} F_{\mathscr{M}}U \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{F}E)$ であり, E が可算集合であることから補題の主張は保証される. □

定理 10. 任意の deterministic concrete data structure $\mathscr{M}$ に対して, $F_{\mathscr{M}}$ は computational sheaf である.

3. Sheaf から Domain へ

前節とは逆に, computational sheaf の断面構造から distributive concrete domain を復元することが可能である. 実際に, F を computational sheaf とした時に,

$$D_F =_{def} \coprod_{U \in \mathcal{O}X} FU$$

とする. また, 各 $s, t \in D_F$ に対して

$$\exists U, V \in \mathcal{O}X \ (V \subseteq U \ \& \ s \in FV \ \& \ t \in FU \ \& \ s = F_{V,U}(t))$$

の時に $s \sqsubseteq t$ と定義して D_F 上に半順序を入れる. こうして得られる半順序集合 $\langle D_F, \sqsubseteq \rangle$ において, $s \in FU$ と $t \in FV$ が上に有界であることは $F_{U\cap V,U}(s) = F_{U\cap V,V}(t)$ と同値である. 従って, $X \subseteq D_F$ に対して, 任意の $s,t \in X$ が D_F において $s \uparrow t$ を満たす時は, X の貼り合わせ $\bigsqcup X$ が存在し, それが X の上限となっていることはsheafの定義から容易に確認できる.

補題 11. 任意の $U \in \mathcal{O}X$, $s \in FU$ に対して, $s \in \mathsf{K}D_F$ と $U \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X)$ は同値である.

Proof. $s \in \mathsf{K}D_F$ の時に, $U \subseteq \bigcup^{\uparrow}_{i\in I} U_i$ とすると, $U = \bigcup^{\uparrow}_{i\in I}(U \cap U_i)$ である. そこで, 半順序 $\sqsubseteq$ の下での上限とsectionの貼り合わせが一致することから $s = \bigsqcup^{\uparrow}_{i\in I} F_{U\cap U_i,U}(s)$ が成り立つ. 従って, $s = F_{U\cap U_i,U}(s)$ を満たす $i \in I$ が存在し, この i に対して $U = U \cap U_i \subseteq U_i$ が得られる. 逆に $U \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X)$ の時に, $s \sqsubseteq \bigsqcup^{\uparrow}_{i\in I} s_i$ とする. この時, 任意の $i \in I$ に対して $s_i \in FU_i$ であるとすると, 半順序 $\sqsubseteq$ の定義から $U \subseteq \bigcup^{\uparrow}_{i\in I} U_i$ となる. 従って, $U \subseteq U_i$ を満たす $i \in I$ が存在し, この i に対して $s \sqsubseteq s_i$ が得られる. □

この補題により, $\langle D_F, \sqsubseteq \rangle$ のコンパクト元の集合は $\mathsf{K}D_F = \bigcup_{U\in\mathsf{K}\mathcal{O}X} FU$ と特徴付けられる. そして, これが可算集合であることはcomputational sheafの定義に要請されていた. また, 任意の $s \in D_F$ に対して, $s \in FU$ とすると, $\mathsf{K}(\mathcal{O}X)$ が $\mathcal{O}X$ の基底であったので $U = \bigcup^{\uparrow} \mathsf{K}(\mathcal{O}X)_U$ となり, $s = \bigsqcup^{\uparrow}_{V\in\mathsf{K}(\mathcal{O}X)_U} F_{V,U}(s) = \bigsqcup^{\uparrow}(\mathsf{K}D_F)_s$ が得られる. 以上の考察から $\langle D_F, \sqsubseteq \rangle$ がScott domainであることが分かる.

そこで, 以下では更に, distributive concrete domainとして要請される5つの性質を確認する. 先ず, (性質 I) については, $s \in \mathsf{K}D_F$ とした時, $s \in FU$ となる $U \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X)$ が存在し, 補題11より $(\mathsf{K}D_F)_s = \{F_{V,U}(s) \mid V \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X)_U\}$ が成り立つ. ここで, computational sheafの定義から $\mathsf{K}(\mathcal{O}X)_U$ は有限集合であることが保証されている.

補題 12. Scott domain $\langle D_F, \sqsubseteq \rangle$ は (性質 D) を満たす.

Proof. 任意の $s,t,u \in D_F$ に対して, $t \uparrow u$ の時 $t \in FU$, $u \in FV$ とする. また, $v \in FW$ が $v \sqsubseteq s$ かつ $v \sqsubseteq t \sqcup u$ を満たすとする. この時, $F_{U\cap W,W}(v) \sqsubseteq s$ であり,

$$
\begin{aligned}
F_{U\cap W,W}(v) &= F_{U\cap W,W} \circ F_{W,U\cup V}(t \sqcup u) \\
&= F_{U\cap W,U\cup V}(t \sqcup u) \\
&= F_{U\cap W,U} \circ F_{U,U\cup V}(t \sqcup u) \\
&= F_{U\cap W,U}(t)
\end{aligned}
$$

から $F_{U\cap W,W}(v) \sqsubseteq t$ である．従って，$F_{U\cap W,W}(v) \sqsubseteq s \sqcap t \sqsubseteq (s \sqcap t) \sqcup (s \sqcap u)$ が得られる．また同様にして，$F_{V\cap W,W}(v) \sqsubseteq (s \sqcap t) \sqcup (s \sqcap u)$ も得られる．以上のことから，$v = F_{U\cap W,W}(v) \sqcup F_{V\cap W,W}(v) \sqsubseteq (s \sqcap t) \sqcup (s \sqcap u)$ となる．従って，

$$\begin{aligned} s \sqcap (t \sqcup u) &= \bigsqcup{}^{\uparrow} \{v \in D_F \mid v \sqsubseteq s \;\&\; v \sqsubseteq t \sqcup u\} \\ &\sqsubseteq (s \sqcap t) \sqcup (s \sqcap u) \end{aligned}$$

と順序付けられる．また，逆の順序関係は明らかである． □

補題 13. 任意の $s, t \in D_F$, $s \in FV$, $t \in FU$, $s \prec t$ に対して，以下が成り立つ．
(1) 任意の $W \in \mathcal{O}X$ について，$W \cap (U - V) \neq \emptyset$ ならば $U - V \subseteq W$ である．
(2) $U - V$ を含む最小の開集合が存在する．

Proof. (1) 仮定より $c \in W \cap (U - V)$ となる $c \in X$ が存在する．この時，$d \in (U - V) - W$ となる $d \in X$ が存在すると仮定すると，開集合 $O = (U \cap W) \cup V$ に対して $c \in O - V$ かつ $d \in U - O$ である．従って，$s \sqsubset F_{O,U}(t) \sqsubset t$ となり $s \prec t$ に矛盾する．
(2) $c \in U - V$ とすると，$U - V \subseteq U = \bigcup^{\uparrow} \mathsf{K}(\mathcal{O}X)_U$ より，$c \in W \subseteq U$ を満たすコンパクト開集合 W が存在する．この W に対して，(1) と $c \in W \cap (U - V)$ より $U - V \subseteq W$ であり，位相に要請されている性質から

$$0 < \#\{W' \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X) \mid U - V \subseteq W' \subseteq W\} \leq \#\mathsf{K}(\mathcal{O}X)_W < \omega$$

が成り立つ．そこで，$O = \bigcap \{W' \in \mathsf{K}(\mathcal{O}X) \mid U - V \subseteq W' \subseteq W\}$ と定義すると，O は $U - V$ を含む最小の開集合となる．実際に，$U - V \subseteq P \in \mathcal{O}X$ とすると，$U - V \subseteq W \cap P \in \mathcal{O}X$ であり，$U - V \subseteq Q \subseteq W \cap P$ を満たすコンパクト開集合 Q が存在する．従って，$O \subseteq Q \subseteq P$ である． □

系 14. 任意の $s, t \in D_F$, $s \in FV$, $t \in FU$ に対して，以下は同値である．
(1) $s \prec t$.
(2) $O \cap (U - V) \neq \emptyset$ を満たす任意の開集合 O に対して $W \subseteq O$ であり，$U = V \cup W$ を満たす開集合 W が存在する．

Proof. (1) ⇒ (2): 補題 13 (2) のように $U - V$ を含む最小の開集合 W を考えればよい．実際に，任意の $O \in \mathcal{O}X$ に対して，$O \cap (U - V) \neq \emptyset$ とすると，補題 13 (1) より $U - V \subseteq O$ であるから $W \subseteq O$ となる．また，$U - V \subseteq U$ より $W \subseteq U$ が成り立つので $U = V \cup W$ が保証される．

(2) $\Rightarrow$ (1): $s \sqsubset F_{O,U}(t) \sqsubseteq t$ と仮定すると, $O \cap (U - V) \neq \emptyset$ であるから $W \subseteq O$ となる. 従って, $U = V \cup W \subseteq O$ なので $U = O$ であり, $t = F_{O,U}(t)$ が成り立つ. このことから $s \prec t$ が結論付けられる. □

$s \prec t$ の時, 上の系における開集合 W は必然的に非空集合であり唯一に定まる. そこで以降では, 必要に応じて, この開集合 W に基づく t の制限 $u = F_{W,U}(t)$ を明示して, $s \prec_u t$ と表記する. 例えば, $s \prec_u t$ の時に, $s \sqcup u = t$ が成り立つことなどは明らかである.

補題 15. 任意の $s, t \in D_F$, $s \in FV$, $t \in FU$ に対して, $s \uparrow t$ の時, $s \sqcap t \prec_u s$ と $t \prec_u s \sqcup t$ は同値である.

Proof. $s \sqcap t \prec_u s$, $u \in FW$ と仮定する. この W に対して, $V = (U \cap V) \cup W$ から

$$U \cup V = U \cup ((U \cap V) \cup W) = U \cup W$$

が成り立つ. また, $(U \cup V) - U = V - (U \cap V)$ であるから, 任意の開集合 O に対して, $((U \cup V) - U) \cap O \neq \emptyset$ とすると $W \subseteq O$ が成り立つ. 従って, 系 14 より, $t \prec s \sqcup t$ となり, $F_{W,U \cup V}(s \sqcup t) = F_{W,V} \circ F_{V,U \cup V}(s \sqcup t) = F_{W,V}(s) = u$ であるから $t \prec_u s \sqcup t$ が得られる.

逆に, $t \prec_u s \sqcup t$, $u \in FW$ と仮定する. この時, $((U \cup V) - U) \cap V \neq \emptyset$ から $W \subseteq V$ であり,

$$\begin{aligned}(U \cap V) \cup W &= (U \cup W) \cap (V \cup W) \\ &= (U \cup V) \cap (V \cup W) \\ &= V\end{aligned}$$

が成り立つ. また, 前半の証明と同様に, 任意の開集合 O に対して $(V - (U \cap V)) \cap O \neq \emptyset$ とすると, $W \subseteq O$ を示すことができる. 従って, 系 14 より, $s \sqcap t \prec s$ となり, $F_{W,V}(s) = F_{W,U \cup V}(s \sqcup t) = u$ であるから $s \sqcap t \prec_u s$ が得られる. □

Scott domain $\langle D_F, \sqsubseteq \rangle$ に対して, この補題から直ちに（性質 C）が保証される. 更に,

$$[s_1, t_1] \leq [s_2, t_2] \text{ もしくは } [s_2, t_2] \leq [s_1, t_1]$$

の時に, $s_1 \prec_u t_1$ であれば $s_2 \prec_u t_2$ となることが分かる. このことから, $s \prec_u t_1$ かつ $[s, t_1] \sim [s, t_2]$ の時に, $s \prec_u t_2$ であり $t_1 = s \sqcup u = t_2$ が成り立つ. 従って, （性質 R）も保証されていることが分かる. 更に, 以下の補題により, 残りの（性質 Q）も確認することができるので, $\langle D_F, \sqsubseteq \rangle$ が distributive concrete domain であることが保証される.

補題 16. Scott domain $\langle D_F, \sqsubseteq \rangle$ は（性質 Q）を満たす.

Proof. $s, t \in D_F$, $s \in FV$, $t \in FU$, $s \sqcap t \in FW$ として, 更に, $\neg(s \uparrow t)$, $s \sqcap t \prec_u s$, $u \in FO$ と仮定する. この時, $(V - W) \cap U = \emptyset$ とすると, $U \cap V = W$ となり, 直ちに $s \uparrow t$ が得られ矛盾する. つまり $(V - W) \cap U \neq \emptyset$ となるので, 系 14 より $O \subseteq U$ が得られる. 従って, $V = W \cup O \subseteq U$ となるので, $v = F_{V,U}(t)$ のように $v \in FV$ を定義する.

ここで, $s \uparrow v$ と仮定すると, $\{s, v\}$ の上界 $w \in FV'$ に対して $s = F_{V,V'}(w) = v$ となる. 従って, $s = v \sqsubseteq t$ が成り立つこととなり, $\neg(s \uparrow t)$ に矛盾する. このことから $\neg(s \uparrow v)$ が得られる. 更に, $s \sqcap t \prec_u s$ と $s, v \in FV$ より, $s \sqcap t \prec v$ であることが系 14 から保証される. また $v \sqsubseteq t$ は定義から明らかである.

次に, 上で導入された v の一意性を確認するために, $V' \in \mathcal{O}X$, $v' = F_{V',U}(t)$ に対して, $\neg(s \uparrow v')$ かつ $s \sqcap t \prec_{u'} v' \sqsubseteq t$, $u' \in FO'$ と仮定する. この時, $O \cap O' \subseteq W$ であれば

$$
\begin{aligned}
F_{O \cap O', V}(s) &= F_{O \cap O', W} \circ F_{W,V}(s) \\
&= F_{O \cap O', W}(s \sqcap t) \\
&= F_{O \cap O', W} \circ F_{W,U}(t) \\
&= F_{O \cap O', U}(t)
\end{aligned}
$$

となり, 貼り合わせ $F_{O,V}(s) \sqcup F_{O',U}(t) \in D_F$ が存在することとなる. 従って, $\{s, v'\}$ は上界 $(s \sqcap t) \sqcup u \sqcup u'$ を持つこととなり矛盾する. これによって $(V - W) \cap (O \cap O') \neq \emptyset$ が得られ, $s \sqcap t \prec_u s$ と系 14 から $O \subseteq O \cap O' \subseteq O'$ が結論づけられる. また, これと同様に, $s \sqcap t \prec_{u'} v'$ と $(V' - W) \cap (O \cap O') \neq \emptyset$ から, $O' \subseteq O \cap O' \subseteq O$ が得られる. 以上から $O = O'$ となるので $u = u'$, つまり $v = v'$ が結論付けられる. $\square$

定理 17. 任意の computational sheaf F に対して, $\langle D_F, \sqsubseteq \rangle$ は distributive concrete domain となる.

4. Category の同等性について

これまでの考察によって, distributive concrete domain と computational sheaf の間に双方向の対応が得られた. そこで, この対応を基にして, 両概念が構成する category の同等性について更に考察を進めたい.

distributive concrete domain の間に定義される射としては sequential algorithm と呼ばれる概念が ([3] などで) 提案されている. その定義は, 以下のように, deterministic concrete data structure から生成された形式の distributive concrete domain に限定して与えられる. $\mathscr{M}_1 = \langle C_1, V_1, E_1, \vdash_1 \rangle$ と $\mathscr{M}_2 = \langle C_2, V_2, E_2, \vdash_2 \rangle$ を deterministic concrete data structure とした時に, $D_{\mathscr{M}_1}$ から $D_{\mathscr{M}_2}$ への射に相当する sequential algorithm は 2 つの関数

の組 $(\varphi,\, i_\varphi)$ である．ここで φ は, $A(x) \neq \emptyset$ であるような任意の $x \in D_{\mathscr{M}_1}$ と $c_2 \in A(\varphi(x))$ に対して

$$\forall y \in D_{\mathscr{M}}\ (x \subseteq y\ \ \&\ \ c_2 \in c(\varphi(y)) \implies c_1 \in c(y))$$

を満たす $c_1 \in A(x)$ が常に存在するような $D_{\mathscr{M}_1}$ から $D_{\mathscr{M}_2}$ への連続関数である．このような関数は sequential function と呼ばれる．また, φ, x, c_2 に対応して上記の性質を満たす cell c_1 は φ の (x, c_2) に関する sequentiality index と呼ばれ, そのような cell の集合を $\mathrm{SI}_\varphi(x, c_2)$ と記述することとする．また, i_φ は以下の 5 条件を満たすような $D_{\mathscr{M}_1} \times C_2$ から C_1 への部分関数である．

(1) $i_\varphi(x,\, c_2) \simeq c_1 \implies c_1 \in A(x)\ \ \&\ \ c_2 \in A(\varphi(x))$

(2) $i_\varphi(x,\, c_2) \simeq c_1 \implies \exists y \in D_{\mathscr{M}_1} \cap \mathcal{F}x\quad i_\varphi(y,\, c_2) \simeq c_1$

(3) $i_\varphi(x,\, c_2) \simeq c_1\ \ \&\ \ y \subseteq x\ \ \&\ \ c_2 \in A(\varphi(y)) \implies i_\varphi(y,\, c_2)\downarrow$

(4) $i_\varphi(x,\, c_2) \simeq c_1 \implies \forall y \in D_{\mathscr{M}_1}\ (x \subseteq y\ \ \&\ \ c_1 \notin c(y) \implies i_\varphi(y,\, c_2) \simeq c_1)$

(5) $c_2 \in A(\varphi(x))\ \ \&\ \ \exists y \in D_{\mathscr{M}_1}\ (x \subseteq y\ \ \&\ \ c_2 \in c(\varphi(y)))$
$$\implies i_\varphi(x,\, c_2)\downarrow\ \ \&\ \ i_\varphi(x,\, c_2) \in \mathrm{SI}_\varphi(x, c_2)$$

このような部分関数は, 計算出力の cell を埋めるために不可欠な sequentiality index に対して, その評価の順番を明示する役割を果たしていて index choice function と呼ばれる．

その上で, 対象を一般の distributive concrete domain とする category **DCD** を考える．**DCD** の射に関しては, 任意の $D_1, D_2 \in \mathrm{Ob}(\mathbf{DCD})$ に対して, $\mathbf{DCD}(D_1, D_2)$ を $D_{\mathscr{M}_{D_1}}$ から $D_{\mathscr{M}_{D_2}}$ への sequential algorithm の集合と定める．実際に **DCD** は category となり, $(\varphi,\, i_\varphi) \in \mathbf{DCD}(D_1, D_2)$, $(\psi,\, i_\psi) \in \mathbf{DCD}(D_2, D_3)$ とした時に, 任意の $x \in D_{\mathscr{M}_{D_1}}$ と $c_3 \in C_{D_3}$ に対して, $i_{\psi\circ\varphi}(x, c_3) \simeq_{def} i_\varphi(x,\, i_\psi(\varphi(x),\, c_3))$ とすることによって, 射の合成を $(\psi,\, i_\psi) \circ (\varphi,\, i_\varphi) =_{def} (\psi \circ \varphi,\, i_{\psi\circ\varphi})$ のように定義する．また, 任意の $D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{DCD})$, $x \in D_{\mathscr{M}_D}$, $c \in C_D$ に対して,

$$i_{\mathrm{id}_D}(x, c) \simeq_{def} \begin{cases} c & c \in A(x) \text{ の時} \\ \uparrow & \text{それ以外の時} \end{cases}$$

とすることによって, 恒等射 $(\mathrm{id}_D,\, i_{\mathrm{id}_D}) \in \mathbf{DCD}(D, D)$ が与えられる．

DCD の射である sequential algorithm に対応する概念を computational sheaf の間に見つけて category の同等性を示すことが課題となるが, 対象に関しては既に双方向の変換が確立されていて, 任意の distributive concrete domain D に対して, $S(D) =_{def} F_{\mathscr{M}_D}$ として, 任意の computational sheaf F に対して $C(F) = D_F$ とする．そこで, 任意の

$D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{DCD})$ に対して, $C \circ S(D)$ と D の間に同型となる sequential algorithm の存在を確認することが現状で考察できる最初の課題となる. そして, これについては実際に以下のようにして同型が確認できる.

任意の $x \in D_{\mathscr{M}_D}$ に対して $\sigma_D(x) =_{def} \{p \in P_{\mathscr{M}_D} \mid p \subseteq x\}$ として $D_{\mathscr{M}_D}$ から $C \circ S(D)$ への関数 σ_D を定義し, 逆に, 任意の $s \in C \circ S(D)$ に対して $\tau_D(s) =_{def} \bigcup s$ として $C \circ S(D)$ から $D_{\mathscr{M}_D}$ への関数 τ_D を定義する.

補題 18. σ_D と τ_D は順序同型である.

Proof. 両者が順序を保存することは定義から明らかであり, 任意の $x \in D_{\mathscr{M}_D}$ に対して $\tau_D \circ \sigma_D(x) = \bigcup\{p \in P_{\mathscr{M}_D} \mid p \subseteq x\} = x$ である. また, 任意の $s \in C \circ S(D)$ と $p \in P_{\mathscr{M}_D}$ に対して, p が prime であることから

$$\begin{aligned} p \in \sigma_D \circ \tau_D(s) &\iff p \subseteq \bigcup s \\ &\iff \exists q \in P_{\mathscr{M}_D}\ \ p \subseteq q \in s \\ &\iff p \in s \end{aligned}$$

が得られる. □

そこで, 更に, 表現定理の中で考察された順序同型との合成を考え, $\varphi_D =_{def} \Phi_{C \circ S(D)} \circ \sigma_D$ と $\psi_D =_{def} \tau_D \circ \Psi_{C \circ S(D)}$ のように定義して $D_{\mathscr{M}_D}$ と $D_{\mathscr{M}_{C \circ S(D)}}$ の間に順序同型を得ることが出来る. そして, この φ_D と ψ_D に基づいて sequential algorithm

$$D_{\mathscr{M}_D} \underset{(\psi_D,\, i_{\psi_D})}{\overset{(\varphi_D,\, i_{\varphi_D})}{\rightleftarrows}} D_{\mathscr{M}_{C \circ S(D)}}$$

を定義する. なお, これらの index choice function については, 任意の $x \in D_{\mathscr{M}_D}$ と $[s,t]_c \in A(\varphi_D(x))$ に対して, $s, t \in C \circ S(D)$ であるので, $i_{\varphi_D}(x, [s,t]_c) =_{def} [\Psi_D \circ \tau_D(s), \Psi_D \circ \tau_D(t)]_c$ とし, 任意の $x \in D_{\mathscr{M}_{C \circ S(D)}}$ と $[a,b]_c \in A(\psi_D(x))$ に対して, $a, b \in D$ であるので, $i_{\psi_D}(x, [a,b]_c) =_{def} [\sigma_D \circ \Phi_D(a), \sigma_D \circ \Phi_D(b)]_c$ とする. これらの合成を考えると, 例えば, 任意の $x \in D_{\mathscr{M}_D}$ と $[a,b]_c \in A(x)$ に対して

$$\begin{aligned} i_{\psi_D \circ \varphi_D}(x, [a,b]_c) &\simeq i_{\varphi_D}(x, i_{\psi_D}(\varphi_D(x), [a,b]_c)) \\ &\simeq i_{\varphi_D}(x, [\sigma_D \circ \Phi_D(a), \sigma_D \circ \Phi_D(b)]_c) \\ &\simeq [\Psi_D \circ \tau_D \circ \sigma_D \circ \Phi_D(a), \Psi_D \circ \tau_D \circ \sigma_D \circ \Phi_D(b)]_c \\ &\simeq [a,b]_c \end{aligned}$$

のように $i_{\psi_D \circ \varphi_D} = i_{\mathrm{id}_D}$ が確認できる．従って，sequential algorithm の合成を考えても，例えば，$(\psi_D,\ i_{\psi_D}) \circ (\varphi_D,\ i_{\varphi_D}) = (\psi_D \circ \varphi_D,\ i_{\psi_D \circ \varphi_D}) = (\mathrm{id}_D,\ i_{\mathrm{id}_D})$ のように結果は恒等射となる．

定理 19. 任意の $D \in \mathrm{Ob}(\mathbf{DCD})$ に対して，$D \simeq C \circ S(D)$ が category **DCD** で成り立つ．

参考文献

[1] S. Abramsky and A. Jung, Domain Theory, in *Handbook of Logic in Computer Science Volume 3 Semantic Structures*, Oxford Science Publications, 1994.

[2] H .P. Barendregt, *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics Volume 103, North-Holland, 1984.

[3] G. Berry and P.L. Curien, Sequential algorithms on concrete data structures, *Theoretical Computer Science* 20, pp. 265–321, 1982.

[4] G. Kahn and G.D. Plotkin, Concrete domains, *Theoretical Computer Science* 121, pp. 187–277, 1993.

[5] T. Kurata, Sheaf-theoretical representation of concrete domains, 京都大学数理解析研究所講究録 1832, pp. 8–18, 2013.

[6] C. H. L. Ong, Correspondence between operational and denotational semantics: the full abstraction problem for PCF, in *Handbook of Logic in Computer Science Volume 4 Semantic Modeling*, Oxford Science Publications, 1995.