数理解析研究所講究録
第1951巻 2015年 49-53

動的幾何学ソフトウェアによる実特殊線形変換群 $SL(2,\mathbf{R})$ の3次元モデル

東海大学・理学部数学科　前田　陽一 (Yoichi Maeda)[1]
Department of Mathematics,
Tokai University

1　はじめに

この論文では, 動的幾何学ソフトの数学教育・数学研究への利用の例を紹介する. 具体的には, 動的幾何学ソフトによる代数的オブジェクトの可視化である. 群などの代数的オブジェクトは, 抽象的に定義され, 幾何的なイメージをつかみにくい傾向にある. 今回は特に, 実特殊線形変換群 $SL(2,\mathbf{R})$ の可視化について解説する. この群は, 3次元多様体なので, 3次元ユークリッド空間に埋め込むことができる. このモデルの応用として, 指数写像の像が可視化できることを示す. 本研究で用いる動的幾何学ソフトウェアは Cabri II plus と Cabri 3D である.

2　$SL(2,\mathbf{R})$ の2次元モデル

まず, $SL(2,\mathbf{R})$ を2次元平面上で可視化することから始めよう. 実特殊線形変換群 $SL(2,\mathbf{R})$ の定義は,

$$SL(2,\mathbf{R})=\left\{M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL(2,\mathbf{R}) \;\middle|\; ad-bc=1\right\}$$

である. $\overrightarrow{OA}=(a,b), \overrightarrow{OB}=(c,d)$ とする. このとき, $SL(2,\mathbf{R})$ の元 $M={}^t(\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB})$ は, 2つのベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ で張られる面積1の平行四辺形と1対1に対応する. 幾何学ソフトを用いて作図する方法として, 次のようなものがある (図1).

面積1の平行四辺形の作図法

(1) 点 T を単位円 U の外側に任意にとる.
(2) 中心が T で単位円 U に直交する円 C を描く.
(3) 点 A を円 C 上に任意にとる.
(4) 点 A の円 C に関する対心点 $-A$ を取る.
(5) 点 $-A$ を単位円 U の中心 O に関して反時計回りに 90° 回転させた点を B とする.
(6) $M={}^t(\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB})$ は $SL(2,\mathbf{R})$ の元となる.

[1]maeda@tokai-u.jp

この作図法において,「ベクトルの内積」と「方べき」との単純な関係を用いている,すなわち,一般に2つのベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ に対して,

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = (\text{線分 } AB \text{ を直径とする円 } C \text{ と点 } O \text{ との方べき } Pow(O,C)).$$

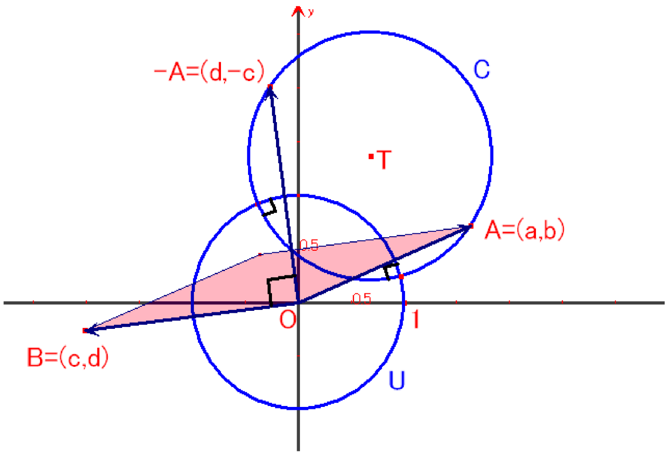

図 1: 2次元モデル

この事実は簡単に証明できるが,意外に知られていないようである.図1では,この事実をベクトル $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{O(-A)}$ に適応している.円 C は単位円 U に直交しているので $Pow(O,C)=1$ である.したがって,$\overrightarrow{OA}=(a,b)$ と $\overrightarrow{OB}=(c,d)$ で張られる平行四辺形の面積は

$$ad-bc=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{O(-A)}=Pow(O,C)=1$$

となる.

この作図法において,点 T は行列のトレースの値と関係がある.点 T は $A=(a,b)$ と $-A=(d,-c)$ との中点であるから,T の x 座標はトレース $a+d$ の半分である,すなわち,

$$Tr(M)=2T_x.$$

また,点 A が円 C 上を動くときにできる元 M は,互いに共役になっている.このような意味で,点 T と円 C は代数的に重要な意味を持っている.

3　3次元モデル

前節では,2次元平面上に面積1の平行四辺形を作り,それを $SL(2,\mathbf{R})$ の元と1対1に対応させることを見てきたが,この節では次元を上げて,3次元空間内の点と $SL(2,\mathbf{R})$ の元と1対1に対応させることを考えてみる.そのアイディアは単純で,点 A を $\overrightarrow{OT}$ を軸として,右ネジ方向に $90°$ 回転した点 $A_0=(x,y,z)$ に対して,$SL(2,\mathbf{R})$ の元を対応させることを考える(図2).

3次元空間の点から面積1の平行四辺形を作図する方法

(1) 点 $A_0=(x,y,z)$ (但し,$(x,y)\neq(0,0)$) を任意に取る.
(2) 単位球面 S^2 に関して,点 A_0 の反転 A_0^* を取る.
(3) 点 A_0 の xy 平面に関して面対称である点を A_0^- とする.

(4) 3 点 A_0, A_0^*, A_0^- を通る円を C とし, その中心を T とする（T は xy 平面上にある）.
(5) 点 A_0 を, ベクトル $\overrightarrow{TO}$ を軸として右ネジ方向に 90° 回転した点を A とする.
(6) 点 A の点 T に関する点対称の点を B' とする.
(7) 点 B' を xy 平面上で原点 O を中心として 90° 回転した点を B とする.
(8) $M = {}^t(\overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB})$ は $SL(2,\mathbf{R})$ の元となる.

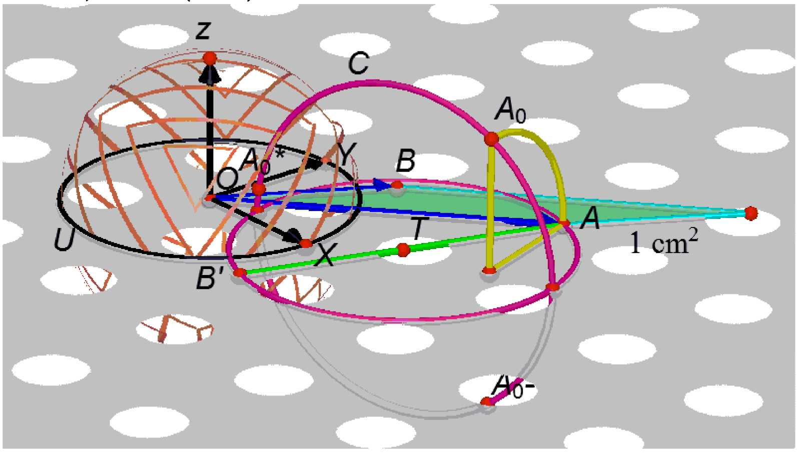

図 2: 3 次元モデル

このモデルにおいて, A_0 の存在範囲は, $\mathbf{R}^3 \backslash z$ 軸 である. 実際, 点 $A_0 = (x,y,z)$ と $SL(2,\mathbf{R})$ の元 M との関係は次のとおりである.

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \dfrac{z}{r}y & y + \dfrac{z}{r}x \\ -\dfrac{z^2+1}{r^2}y + \dfrac{z}{r}x & \dfrac{z^2+1}{r^2}x + \dfrac{z}{r}y \end{pmatrix} \quad 但し, r = \sqrt{x^2+y^2} \tag{1}$$

$$(x,y,z) = \left(\frac{(a^2+b^2+1)(a+d)}{a^2+b^2+c^2+d^2+2}, \frac{(a^2+b^2+1)(b-c)}{a^2+b^2+c^2+d^2+2}, \frac{ac+bd}{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+2}} \right) \tag{2}$$

式 (2) から標語的に言えることとして, x 軸はトレースを表す軸, y 軸は対称性を表す軸, z 軸は内積を表す軸と言えることが挙げられる. たとえば, $z > 0$ であれば, $\angle AOB$ は鋭角, $z < 0$ であれば, $\angle AOB$ は鈍角である. また, 点 A_0 が xy 平面上にあると, 平行四辺形は長方形となる. 一葉双曲面 $x^2+y^2-z^2=1$ 上であれば, 平行四辺形はひし形となる. したがって, xy 平面上の単位円上の点は, 正方形に対応する (図 3).

単位行列

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

は $A_0 = (1,0,0)$ が, $-I_2$ には $A_0 = (-1,0,0)$ がそれぞれ対応している.

4 指数写像の像の可視化

前節で述べた 3 次元モデルは, 次の問題を可視化したいという動機から得られたものである.

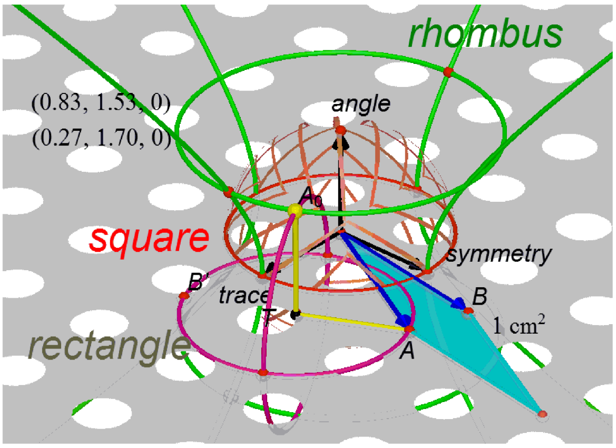

図 3: 長方形, ひし形, 正方形に対応する点 A_0 の集合

$\boxed{\text{問題}}$ $g \in SL(2,\mathbf{R})$ は Tr $g < -2$ なるとき $g = \exp X, X \in \mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$ と表すことができないことを示せ. ([1] p.58, [2] p.93)

実際, 指数写像 $\exp X$ の像は, Tr $g > -2$ と $-I_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ である ([1] p.169). しかし, この指数写像の像をイメージすることは困難である. Tr $g = -2$ は $-I_2$ を除いて指数写像の像ではない. なぜ $-I_2$ だけ特別なのか? 指数写像の像はどんな形なのか? これらの疑問を解決するために考えられたのが 3 次元モデルである.

以下, このモデルでの指数写像の像をみていこう. まず, リー群 $SL(2,\mathbf{R})$ のリー環 $\mathfrak{sl}(2,\mathbf{R})$ の元 X は, 次のような 3 種類に分類される (簡単のため, X は正規化されている).

$$X = \begin{pmatrix} \alpha & \beta+\gamma \\ -\beta+\gamma & -\alpha \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \text{時間的:} & \alpha^2-\beta^2+\gamma^2=+1, \quad X^2=-I_2 \\ \text{光的}\ \ : & \alpha^2-\beta^2+\gamma^2=\ \ 0, \quad X^2=O \\ \text{空間的:} & \alpha^2-\beta^2+\gamma^2=-1, \quad X^2=+I_2 \end{cases}$$

各種に応じて, 指数写像は, 時間パラメータを t として, 次のように与えられる.

$$e^{tX} = \begin{cases} (\cos t)I_2 + (\sin t)X, & Tr(e^{tX}) = 2\cos t \in [-2,2] \\ I_2 + tX, & Tr(e^{tX}) \equiv 2 \\ (\cosh t)I_2 + (\sinh t)X, & Tr(e^{tX}) = 2\cosh t \in [2,\infty) \end{cases}$$

時間的軌道には周期性があり, $-I_2$ を通過することに注意されたい. また, 光的軌道は $Tr = +2$ 曲面内にあり, 実際, 光的軌道全体は $Tr = 2$ 曲面全体と一致している. これら 3 種の軌道全体を考えると, $Tr = -2$ 曲面が指数写像の境界である (ただし, $-I_2$ 以外は, 境界を含まない) ことがわかる.

以上の考察により, 3 次元モデルで Tr の値が一定の曲面の作図ができれば可視化ができたことになる.

$\boxed{Tr = -2 \text{ 曲面の作図法 (図 4(左))}}$

(1) 直線 $L1 : x = -1$ を引く.

(2) 点 T を $L1$ 上に任意に取る.

(3) 点 T を中心として, 単位球面 S^2 に垂直に交わり, xy 平面にも垂直な円 C を描く.
(4) 点 T を $L1$ 上で動かすことによって, 円 C の軌跡 ($Tr = -2$ の曲面) を描く.

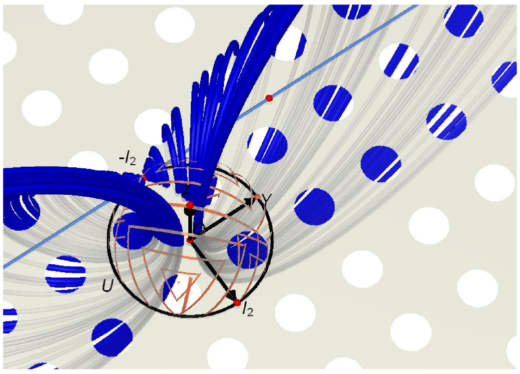
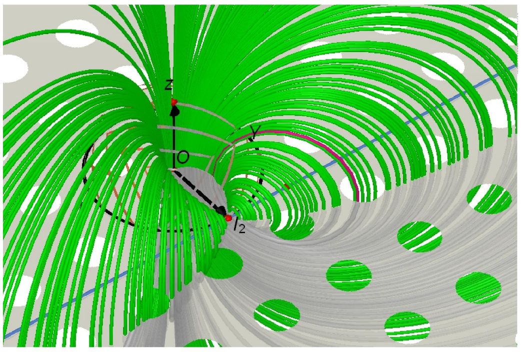

図 4: Tr 一定の曲面 ($Tr = -2$(左), $Tr = +2$(右))

図 4 において, $Tr = -2$ 曲面を S^-, $Tr = +2$ 曲面を S^+ とすると, 時間的軌道全体は, S^- と S^+ とで囲まれた空間となる. 光的軌道全体は, S^+ 曲面となり, 空間的軌道全体は, $x > 0$ 半空間内の S^+ 曲面の外側となる. 以上をまとめると, 指数写像の像は, $x > 0$ 半空間と S^- 曲面の内側の和集合となることがわかる.

5 結論

本稿では, $SL(2, \mathbf{R})$ の 3 次元モデルを考え, その応用を紹介した. 結果として, 指数写像の像を可視化することに成功した. 動的幾何学ソフトを用いた本研究を通して, 動的幾何学ソフトの有用性をまとめてみると次のようになる.

1. 動的幾何学ソフトによる実験と検証

今回, 3 次元モデルを考案するにあたって, Cabri II plus, Cabri 3D で実際に図形を描きながら, 考察を重ねた. 実際に作図することによって, その図形がきちんと定義された図形かがわかり, 視覚化することによって, 新たな発見があり, それをフィードバックしながら推論を深めることができた. もちろん, 代数的な計算を行いながら作業を進める従来の数学研究のスタイルは重要であるが, 幾何学ツールをも取り込んで, 代数と幾何の相補的な関係を研究においても実現できる. 写像が 1 対 1 であることを式で表すことと, 作図が双方向で可能であることとは同値であるから, 計算が正しいかどうかを作図で確かめることができるというのは非常にありがたい.

2. 動的幾何学ソフトによる可視化

今回, 3 次元モデルで指数写像の像を可視化できた. このモデルは, 非可換性の可視化にも利用できると思われる. また, 群作用の可視化, リー環の演算の可視化など, 群や環の可視化は, 数学研究のみならず, 数学教育にも大いに役立つと思われる.

参考文献

[1] 示野信一 『演習形式で学ぶリー群・リー環』サイエンス社, 2012.

[2] 山内恭彦・杉浦光夫 『連続群論入門』培風館, 1960.