

数学科の問題解決における数学ソフトウェアの活用

(Utilization of Mathematical software for problem-solving in Math. class)

千葉県立船橋啓明高等学校 大橋 真也 (Shinya OHASHI)¹
Chiba prefectural Funabashi-Keimei Highschool

1 はじめに

現行の学習指導要領では、初等中等教育において、「数学的活動」が重視され、これには、「数学分野の総合的な理解」や「現実世界と数学との接続」、「問題解決への活用」などさまざまな意味を含んでいる。高等学校においても「数学的活動」が「課題研究」として、教科書や指導書などにおいてもきちんとした位置づけとなり、年間学習計画の中でも程度の時間数位置づけ、実施することになっている。学校現場では、実施内容に関して、苦慮している場面もあるが、数学を実際に社会におけるデータや事象と結びつけることで、さまざまな実践も報告されている。

その一方で、この「数学的活動」は、「問題解決」の一分野として、活用されてはいるが、数学科の教育の中で問題解決がきちんとした定式化があまりなされていないために、実施内容が明確で内面も見られる。今回の発表では、数学科における問題解決と、その考え方に関して、他分野の内容も含めて考察を行い、「数学的活動」を「問題解決」の一つとして、数学ソフトウェアを活用して、数学を見直す機会とする実践について取り上げる。

2 問題解決とは何か

最初に問題解決に関して、数学科のみならず、いくつかの分野における定義などについて、考察を行い、その分類について考える。

2.1 問題とは何か

はじめに、「問題解決」における「問題」について考える。当然のことであるが、数学科の教科書にある例題や練習問題も問題であり、それらを解くことも問題解決の一つである。しかし、ここではまず一般的な問題解決に関して考える。国語辞典「スーパー大辞林」では、「問題」を次のように記述している。

1. 答えさせるための問い。解答を必要とする問い。
2. 取り上げて討論・研究してみる必要がある事柄。解決を要する事項。
3. 取り扱いや処理を迫られている事柄。

¹conway@pisces.bekkoame.ne.jp

4. 世間の関心や注目が集まっているもの。噂のたね。

5. 面倒な事件。厄介な事件。ごたごた。

1番は、一般的に教科書にある練習問題等を示す問題であろう。また、3, 4, 5に関しては、ここで「問題解決」を考察する内容ではないと考える。そのため、ここでは主に2番のような問題を考える。

また、認知科学や教育の分野では、「問題」は、次のように定義されることも多い。

- 達成すべき目標が達成できずにいる状況

より一般的な定義でもあり、さまざまな分野で活用できる定義でもある。

数学科における「数学的活動」の問題解決は、「スーパー大辞林」の1番にあるような、答えがあらかじめ用意されている問題というわけではなく、2番や後に挙げた定義のように現実の問題などの解法がなかなか定まらないような問題も必要とされている。また、生徒自身が問題と考える興味・関心を高める内容でありたい。

2.2 問題解決の分類

認知科学者である J.Anderson(1980) によると、「問題解決」は次の2つに分類することができる。

1. ルーチン的問題解決 (routine problem solving)

既知の方法を機械的に適用する問題解決過程。確定した解が存在する。アルゴリズム法などが用いられる。

2. 創造的問題解決 (creative problem solving)

既知の方法を適用するだけでは解決せず、新たな方法を導出して、問題を解決していく過程。確定した解がないこともある。ヒューリスティック法などが用いられる。

数学科の教科書の練習問題を解くことや、一般的なペーパーテストで解答する問題解決などのほとんどは、ここで定義される「ルーチン的問題解決」に分類される。このタイプの問題解決では、すでに教授者である先生は答えを知っており、生徒は先生が知っている答えを探すことを問題解決としている。問題解決の方法も教科書や授業などで与えられた方法を用いて行い、必ず確定した解が存在している。そのためか、自ら思考しようとしないうちの子供達にとっては、この問題解決は真の問題解決ではなく、ただ答えを誰かが言ってくれるために待つ時間となっている場合もある。そのため主体的な活動を行うこともできない。

このような問題解決のみでよいのだろうか。教科書にある問題を解決することが目的となっているが、これで現実にある問題を解決する方法となっているのだろうか。また授業がつまらない、授業内容にワクワク感がなく、生徒の興味・関心を高めることができないのも、確定した解が存在し、「問題解決」が先生が隠している「解」を探すだけのゲームになっているからではないだろうか。

2.3 学習指導要領における問題解決の扱い

それでは、学習指導要領では、そのようなルーチン的问题解決のみを、数学科の学習内容としているのだろうか。「高等学校学習指導要領解説(数学)」では、「問題解決」に関して以下のような記述がある。

- 「数学的な思考力や表現力を支えているのは、数学に関する知識や技能、数学的な見方や考え方である。」
- 「数学的な見方や考え方については、数学が構成されていくときの中心となる見方や考え方と、問題解決の過程などにおいて数学を活用していくときの見方や考え方に大きく分けられる。」
- 「前者は、数学の様々な概念や原理・法則がどのような着想や考え方を基にして、どのように構成され組み立てられているかなどに関する見方や考え方である。」
- 「後者は、主として、問題解決等に当たって、問題を数学の対象としてとらえたり、直観、類推、帰納、演繹などにより、いろいろな角度から問題を考察し、解決の方向を構想したりするときの見方や考え方である。」

学習指導要領には、前述した「創造的問題解決」にあたると解釈できる記述もある。しかし現実には、これが教科書やテストなどになる段階で、答えが確定的で解法も確定的な問題がほとんどとなり、さらに「問題を数学の対象として」とらえていこうとする考え方も消えてしまってきている。現実の問題や確定的でない問題を扱っていこうとする動きが「数学的活動」であるはずであるのに、現実の教科書や授業では、なかなかそのようにとらえることができないのが現状である。

2.4 問題解決過程

次に問題解決の手順である問題解決過程について考察する。これらは、近年情報科の教科書などではきちんと定式化され、扱うようになってきている。

2.4.1 一般の問題解決過程

一般に問題解決過程は、高等学校情報科の教科書や問題解決の資料などでは、次のような段階で説明されている。

1. 問題の明確化
2. 分析
3. 解決案の検討
4. 実践
5. 評価

これには、4段階で示す方法や6段階で示す方法などさまざまあるが、基本的な構成は変わらない。また、個々ではこれらの内容の詳細に関しては割愛する。

高等学校情報科の教科書では、これらの過程をアルゴリズム、データベース、情報検索・活用、モデル化とシミュレーションなどの主に4つの手法を用いて、解説している。しかし、その多くは現実的な問題を扱っているにも関わらず、ルーチン的問題解決が多い。高等学校情報科においてもモデル化とシミュレーションなどの単元においては、創造的問題解決を扱う方向で展開しようとはしているが、残念なことに教科書では、確定的な解法や解を用意してしまっている例も少なくはない。この問題解決過程を真に創造的問題解決にも活用するためには、問題の発見過程と解決案の検討の過程を工夫すればよいと考える。

2.4.2 創造的問題解決過程

認知科学者である Wallas は、創造的問題解決の解決過程を以下のように整理している。

1. 準備 (preparation)
2. あたため (incubation)
3. ひらめき (illumination)
4. 検証 (verification)

「準備」とは主に情報収集の段階である。問題の内容を明確にするために、情報収集や試行実験などを行う過程である。また「あたため」とは、その問題とは別なこと、別な観点から考え、客観的に観察したり、今までにないような観点を観察する過程である。必ずしも確定的な方法を使って、早急に解法を行うのではなく、問題をあたためることを目的としている。「ひらめき」の過程ではアイデアを募集する。独創的なアイデアから、解決方法を模索する。また解決案を複数提出し、次の「検証」の段階に結びつける。「検証」は、「ひらめき」が正しいかどうかを検証する段階である。

数学科の問題解決においても、このような創造的問題解決過程を活用することは可能である。また数学ソフトウェアを用いた場合、「準備」や「検証」において、自分の考えを膨らませたり、「ひらめき」などを補完するものとして活用することが考えられる。

2.4.3 Polya の問題解決過程

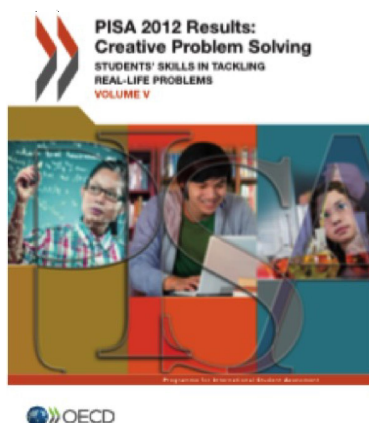
数学教育において、よく引用される問題解決の本である。Polya の「いかにして問題を解くか」では、次のような問題解決過程で説明している。

1. 問題を理解すること
2. 計画を立てること
3. 計画を実行すること
4. ふり返ってみること

より一般的な問題解決過程であり、一般のビジネスの問題にも活用できるものとして、近年ビジネス書などでも引用している例も多い。しかし、Polya も創造的問題解決について触れており、この問題解決過程が創造的問題解決にも活用できるものとしている。

2.5 PISA の問題解決能力

PISA では、「PISA 2012 Results: Creative Problem Solving」でも報告されている通り、「創造的問題解決の能力」について測定をしている。これに関しては、詳細は今回は扱わないが、日本がこの時点で3位に位置している。



2.6 情報科における問題解決

高等学校情報科においては、「高等学校学習指導要領解説(情報)」において、「情報活用の実践力」として、以下のように説明している。

「課題や目的に応じて情報を主体的に収集・判断・表現・処理・創造し、受け手の状況などを踏まえて発信・伝達できる能力」

ここで言われている「情報活用の実践力」は問題解決の能力と重なる部分も多い。しかし、現実には、収集・表現・処理・発信などは教えてはいるが、それらを総合的に判断し、想像することはあまり教えられていないし、誤解釈されている部分も多い。

また、「問題解決」に関しても現学習指導要領においては、明確になり、共通科目「社会と情報」においては、「(4) 望ましい情報社会の構築」の「ウ 情報社会における問題の解決」においては、次のように記述されている。

問題を解決する方法については、問題の発見と明確化、分析、解決策の検討、実践、結果の評価などの問題解決の基本的な流れを理解させ、身の回りにある具体的な問題を解決する実習や例題によって、情報機器や情報通信ネットワークの適切な活用を通して、問題を解決する方法に関する基礎的な知識と技能を習得させる。

また、ここには「問題」に関する定義やその手法に関しても具体的に指示されている。またもう一つの共通科目「情報の科学」では、「(2) 問題解決とコンピュータの活用」、「(3) 情報の管理と問題解決」の2項目で問題解決を扱っており、この科目全体の約半分が問題解決の基本とその解決方法、情報を活用した問題解決に割かれている。

数学科の数学ソフトウェアの問題解決への活用を考えるにあたって、これらの内容は参考にするべき部分が多々ある。

3 問題解決と数学ソフトウェア

それでは、なぜ問題解決に数学ソフトウェアを活用しようと考えているのだろうか。

もちろん使わなくてもできる問題解決もあるが、使うことによって問題解決の扱える範囲が広がることも確かである。確定的な答えや確定的な解法が見つげづらい創造的問題解決においては、試行実験や検証などの場面において、数学ソフトウェアを活用することにより、自分の予測やひらめきなどを検証することもでき、問題解決で扱うことができる問題の範囲も拡大でき、解決段階でもその手法も拡大できると考えるからである。

3.1 Rを用いた問題解決の実践例

第1学年、数学A「確率」+数学I「データの分析」の課題学習(数学的活動)として、2時間の実施した実践について紹介する。

数学Iのデータ分析においては、基本的な内容は教科書およびワークブックを用いて、既に学んでる。

例題 8 相関係数

右の表は、5人の生徒 A, B, C, D, E のある1週間における数学と英語の学習時間(単位: 時間)の記録である。数学と英語の学習時間の相関係数 r を求めよ。

	A	B	C	D	E
数学	6	6	8	9	8
英語	6	7	5	5	5

数学の学習時間を x 時間、英語の学習時間を y 時間として次の表をつくる。

	x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
A	6	6	-1.4	0.4	1.96	0.16	-0.56
B	6	7	-1.4	1.4	1.96	1.96	-1.96
C	8	5	0.6	-0.6	0.36	0.36	-0.36
D	9	5	1.6	-0.6	2.56	0.36	-0.96
E	8	5	0.6	-0.6	0.36	0.36	-0.36
計	37	28	0	0	7.2	3.2	-4.2
平均値	7.4	5.6			1.44	0.64	-0.84

この表から共分散 s_{xy} を求めると、 $(x-\bar{x})(y-\bar{y})$ の平均値より $s_{xy} = -0.84$

x の標準偏差 s_x は、 $(x-\bar{x})^2$ の平均値の正の平方根より $\sqrt{1.44} = 1.2$ (時間)

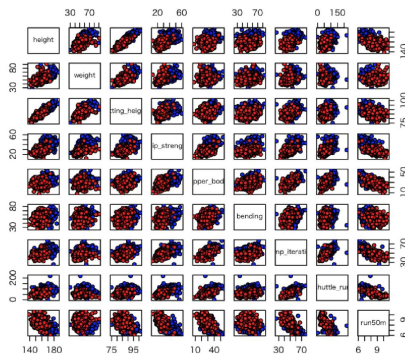
y の標準偏差 s_y は、 $(y-\bar{y})^2$ の平均値の正の平方根より $\sqrt{0.64} = 0.8$ (時間)

よって、相関係数 r は $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y} = \frac{-0.84}{1.2 \times 0.8} = -0.875$

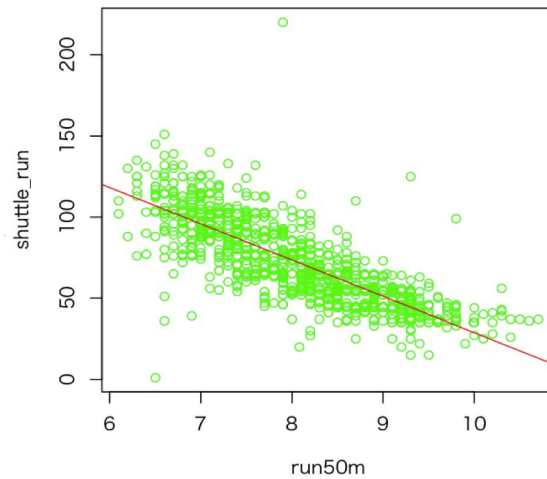
$\bullet 1.2^2 = 1.44$
 $\bullet 0.8^2 = 0.64$ より、
 s_x, s_y をそれぞれ求める。
 \bullet 相関係数 $r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$

教科書やワークブックには、計算の方法や手計算で実習できる程度の小さいサイズのサンプルが掲載されているが、現実感がない例においての計算であるために、単なる公式適用の練習にしかになっていない。

そこで、1時間目は、統計解析ソフトRを用いて、現実に近い2,000件ほどのスポーツテストのデータを用いて、その傾向などを考えさせる実習を行った。散布図行列をつくり、その見づらさの改善なども行い、その傾向の有無などについての考察を行わせた。



また、一部の傾向がありそうなものに関しては、回帰分析を行った。図は、50m走とシャトルランとの相関関係について、回帰分析を行い、負の相関の意味や回帰モデルの意味などについて考える機会を持った。

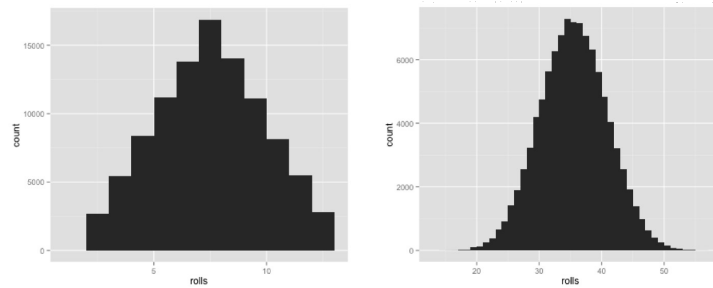


2時間目は、Rを使って、サイコロを作る練習を行った。情報の授業である程度プログラミング実習を行っているので、生徒は、あまり問題もなく、Rのプログラミング環境に慣れることができていたようである。

最初は、単純な正6面体のサイコロをR上で実現することを考えた。最初は、わざと誤った解答なども見せ、作成する上で注意する点などについても説明した。

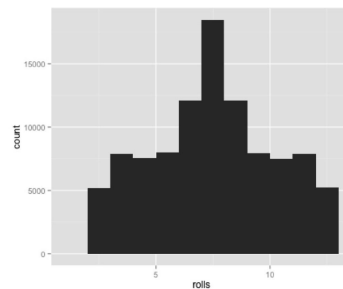
```
> die<-1:6
> dice<-sample(die,size=2)
> dice
[1] 3 5
> dice<-sample(die,size=6)
> dice
[1] 3 4 1 5 6 2
> dice<-sample(die,size=6,replace=TRUE)
> dice
[1] 1 5 1 2 3 6
```

2つのサイコロの和の分布について練習すると、数学の授業ではあまりできなかった3つのサイコロや4つのサイコロについての和の分布について勝手に調べ出す生徒も出てきた。



プログラミング環境に慣れてきたところに、次の「サイドタ」と呼ばれる直方体のサイコロを用意した。これは以前神奈川大学の何森先生が学校紹介用に作成したもので、 $16 \times 18 \times 20\text{mm}$ の直方体の消しゴムにサイコロの目が振ってあるものである。これを転がすとどうなるのか、それぞれの目の確率は分かっているものとして、2つのサイドタを振ったときの目の和の確率を求めさせる。

```
> roll2<-function(){
+ die<-1:6
+ dice<-sample(die,size=2,replace=TRUE,
+ prob=c(0.23,0.17,0.1,0.1,0.17,0.23))
+ sum(dice)
+ }
> rolls<-replicate(100000,roll2())
> qplot(rolls,binwidth=1)
```



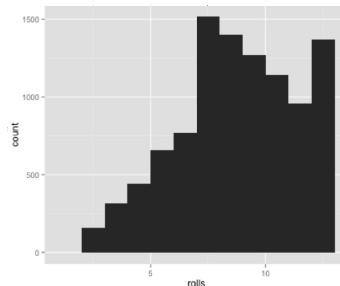
通常の前6面体のサイコロであれば、ある程度教科書の中での計算できることが分かっており、答えを予測することが可能であるが、「サイドタ」では、予測した結果と多少異なる結果が出て、生徒の興味・関心を高めることに成功した。

最後に自由に確率を変更して試す時間を与えると、「へんてこなサイコロ」を作る生徒が続出した。多くはあまり考えずに実施した生徒もいたが、その中にスマホゲームのガチャ(アイテムがガシャポンのように得られる)の確率に近いものをグラフで見たいとして作成していた生徒もいた。


```

> roll3<-function(){
+ die<-1:6
+ dice<-sample(die,size=2,replace=TRUE,
+ prob=c(1/8,1/8,1/8,1/8,1/8,3/8))
+ sum(dice)
+ }
> rolls<-replicate(10000,roll3())
> qplot(rolls,binwidth=1)

```



サイコロのプログラミングは、単純なものではあるが、予測できないものを検証したり、考えるツールとしては、創造的問題解決のツールとして活用できる可能性を見ることができた。

生徒にとっての現実世界は、ネット上のゲームも現実正解の一部である。ゲームの中でのガチャのダブりの確率なども数学的には算出することができるが、このようなプログラミングによって、その状況を予測し、検証する過程は、生徒にとっては新鮮であり、興味・関心を高めることができた。

また、プログラミングによって、現実の形にとらわれないモデルとしてのサイコロを作ることができたことも生徒にとっては、楽しかったようである。

4 おわりに

終わりに今回の考察について、まとめておく。

- 問題解決学習は、数学科や情報科のさまざまな科目で取り上げられている。
- 問題解決には、ルーチン的问题解決と創造的問題解決がある。
- ルーチン的问题解決は、従来から教科書にもあるが、取り扱い方によっては生徒の関心や意欲を低下させることになる。
- 創造的問題解決は、テストや教科書では扱いにくいだが、教科内容への生徒の興味や関心を高めることができると考える。
- 今後、創造的問題解決を数学ソフトウェアを活用して、進める方法を考えていきたい。