数理解析研究所講究録
第 1952 巻 2015 年 22-29

対称安定過程におけるファインマン・カッツ型期待値の増大度

東北大学大学院理学研究科　和田正樹 (Masaki Wada)
Mathematical Institute, Tohoku University
（東北大学大学院理学研究科　竹田雅好教授との共同研究）

2014 年 12 月 16 日発表

1 問題の背景

$\mathbb{M}=(\{X_t\}_{t\geq 0},\mathbb{P}_x)$ は、生成作用素 $H=(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$ をもつ $\mathbb{R}^d$ 上の過渡的な対称安定過程 $(0<\alpha<(2\wedge d))$ とする。このとき、対応する正則ディリクレ形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が

$$\mathcal{E}(u,v)=\frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d}(u(y)-u(x))(v(y)-v(x))\frac{A_{d,\alpha}}{|x-y|^{d+\alpha}}dxdy,\qquad \mathcal{F}=H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^d)$$

により与えられる。ここで、$H^{\frac{\alpha}{2}}(\mathbb{R}^d)$ は $\alpha/2$ 次のソボレフ空間であり、$A_{d,\alpha}$ は

$$A_{d,\alpha}=\frac{\alpha\cdot 2^{\alpha-1}\Gamma(\frac{d+\alpha}{2})}{\pi^{d/2}\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})},\quad \Gamma(s)=\int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$$

で定める。$\mathbb{M}$ の推移確率密度関数を $p(t,x,y)$ とすると、過渡性よりグリーン関数 $G(x,y):=\int_0^\infty p(t,x,y)dt$ が定まり、次のような測度の族を定義できる。

定義 1.1. (1) μ が加藤クラスに属す $(\mu\in\mathcal{K})$ とは、以下の式が成立することである。

$$\lim_{a\to 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|\leq a}G(x,y)\mu(dy)=0$$

(2) μ がグリーン緊密である $(\mu\in\mathcal{K}_\infty)$ とは、$\mu\in\mathcal{K}$ であって、以下の式が成立することである。

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{|y|\geq R}G(x,y)\mu(dy)=0 \tag{1.1}$$

以下、$\mu\in\mathcal{K}_\infty$ に対して、シュレディンガー形式を $\mathcal{E}^\mu(u,u)=\mathcal{E}(u,u)-(u,u)_\mu$ により与える。ここで、$(u,u)_\mu$ は $L^2(\mathbb{R}^d,\mu)$ における内積である。$\mathcal{E}^\mu$ の生成作用素を H^μ と表す。方程式 $\partial u/\partial t=-Hu$ が基本解として、マルコフ過程 $\mathbb{M}$ の推移確率密度関数 $p(t,x,y)$ をもつのと同様、方程式 $\partial u/\partial t=-H^\mu u$ も基本解をもつことが知られている ([1])。その基本解を $p^\mu(t,x,y)$ と表したとき、$p^\mu(t,x,y)$ の挙動が $p(t,x,y)$ のそれ ((3.1) を参照のこと) と比べてどうか考えたい。直感的には、μ が十分小さいときには似たような振る舞いをすることが予想される。その小ささを表す上で、以下の量を定める。

$$\lambda(\mu):=\inf\{\mathcal{E}(u,u)\mid u\in\mathcal{F},(u,u)_\mu=1\}$$

これは $\mathbb{M}$ の、μ とルヴューズ対応する正値連続加法的汎関数 A_t^μ による時間変更の確率過程における底スペクトルである。この値が大きいほど μ は小さく、以下のように3種類に分類する。

定義 1.2. (1) μ が劣臨界的とは、$\lambda(\mu) > 1$ を満たすことである。
(2) μ が臨界的とは、$\lambda(\mu) = 1$ を満たすことである。
(3) μ が優臨界的とは、$\lambda(\mu) < 1$ を満たすことである。

[13] では、μ が有限0次エネルギー積分をもつとき、すなわち $\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} G(x,y)\mu(dx)\mu(dy) < \infty$ の条件下では、基本解の安定性が成り立つための必要十分条件が μ の劣臨界性であることを示している。ここで、基本解の安定性とは $p^\mu(t,x,y) \asymp p(t,x,y)$ となること、つまり適切な正定数 c_1, c_2 により

$$c_1 p(t,x,y) \leq p^\mu(t,x,y) \leq c_2 p(t,x,y)$$

が成立することである。これを示すためのカギは [9] による次の同値性である。

$$\text{(i) } \lambda(\mu) > 1 \Leftrightarrow \text{(ii) } \sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_x\left[e^{A_\infty^\mu}\right] < \infty \Leftrightarrow \text{(iii) } G^\mu(x,y) := \int_0^\infty p^\mu(t,x,y)dt < \infty \quad (x \neq y) \tag{1.2}$$

劣臨界性が必要であることは、基本解の安定性と $\mathbb{M}$ の過渡性から (iii) が成立することから示された。十分であることを示すには、まず (ii) より $h(x) = \mathbb{E}_x\left[e^{A_\infty^\mu}\right]$ がシュレディンガー作用素 H^μ における調和関数であり、適切な正定数 c_0 により $1 \leq h(x) \leq c_0$ を満たすことに注意する。ここで、シュレディンガー形式にドゥーブの h-変換を施して得られるディリクレ形式が $L^2(h^2(x)dx)$ 上に、

$$\mathcal{E}^{\mu,h}(u,u) = \frac{1}{2}\iint_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} (u(x)-u(y))^2 \frac{A_{d,\alpha}h(x)h(y)}{|x-y|^{d+\alpha}} dxdy$$

により与えられるので、これは Chen と熊谷 [2] の意味での α-安定型過程と見なせて、推移確率密度関数 $p^\mu(t,x,y)/h(x)h(y)$ をもつことから十分性が示された。

以上のことから、μ が臨界的もしくは優臨界的ならば、$p^\mu(t,x,y)$ は $p(t,x,y)$ とは異なる挙動をもつことがわかる。特に、μ が臨界的なときには、調和関数 $h(x)$ を定めドゥーブ変換を行える点は劣臨界的なときと同様であるが、$h(x) \asymp 1 \wedge |x|^{\alpha-d}$ が成り立ち $|x| \to \infty$ で減衰している点では大きく異なる。それ故、変換後の確率過程は α-安定型過程ではなく Chen と熊谷の結果を適用できず、$p^\mu(t,x,y)$ の具体評価は興味深い問題である。現在のところ、$\mathbb{M}$ が3次元のブラウン運動の場合のみについては、Grigor'yan により [4] で具体評価が与えられているが、この手法を適用するためには多くの条件が必要であるため、その他の場合に応用するのは容易ではない。このため、まずは $p^\mu(t,x,y)$ そのものではなく、(1.2) の (i) と (ii) における同値性に着目し、$p^\mu(t,x,y)$ の空間積分（ファインマン・カッツ型期待値）$\mathbb{E}_x\left[e^{A_t^\mu}\right] = \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(t,x,y)dy$ について、$t \to \infty$ とした際の発散の様子を与えることにした。

2 先行結果と主結果

μ が優臨界的なときは、ファインマン・カッツ型期待値の増大度は [10] で確立されている。このとき、シュレディンガー作用素 H^μ の最小固有値は負、すなわち

$$C(\mu) := -\inf\{\mathcal{E}^\mu(u,u) \mid u \in \mathcal{F},\ (u,u)_m = 1\} > 0$$

が成立する。最小固有値に対応する固有関数 $h(x)$ とすると、福島のエルゴード定理を経て、

$$\mathbb{E}_x\left[e^{A_t^\mu}\right] \sim c_1 h(x) e^{C(\mu)t} \quad (t \to \infty)$$

が得られ、ファインマン・カッツ型期待値は指数関数的に増大する。ここで $A \sim B$ は $B/A \to 1$ を意味する。然るに、μ が臨界的なときには $C(\mu) = 0$ であるから、ファインマン・カッツ型期待値は指数関数的には増大しえない。$\mathbb{M}$ が過渡的な標準正規ブラウン運動で μ が $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度 m に関して絶対連続の場合は、Simon による [7] や Cranston 達による [3] で以下の結果が得られている。

定理 2.1. 臨界的な測度 μ が、コンパクトな台をもつ非負で無限回微分可能な関数 $V(x)$ により $\mu = V \cdot m$ と表されるとき、ファインマン・カッツ期待値は $t \to \infty$ で以下の増大度をもつ。

$$\mathbb{E}_x[e^{A_t^\mu}] \sim \begin{cases} c_1 h(x) t^{\frac{1}{2}} & (d=3) \\ c_2 h(x) t/\log t & (d=4) \\ c_3 h(x) t & (d \geq 5) \end{cases}$$

但し、c_i は適切な正定数で $h(x)$ は $(\Delta/2 + V)h = 0$ を満たすような関数である。

これに対して、安定過程において得られた主結果は次の通りである。

定理 2.2. *([12, Theorem1.1])*
臨界的な測度 $\mu \in \mathcal{K}_\infty$ がコンパクトな台をもつとき、ファインマン・カッツ型期待値は $t \to \infty$ で以下の漸近挙動をもつ。

$$\mathbb{E}_x[e^{A_t^\mu}] \sim \frac{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{\alpha})\langle\mu, h_0\rangle} h_0(x) t^{\frac{d}{\alpha}-1} \quad (1 < d/\alpha < 2), \tag{2.1}$$

$$\mathbb{E}_x[e^{A_t^\mu}] \sim \frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}\langle\mu, h_0\rangle} h_0(x) \frac{t}{\log t} \quad (d/\alpha = 2), \tag{2.2}$$

$$\mathbb{E}_x[e^{A_t^\mu}] \sim \frac{\langle\mu, h_0\rangle}{(h_0, h_0)_m} h_0(x) t \quad (d/\alpha > 2). \tag{2.3}$$

ここで $h_0(x)$ はシュレディンガー作用素 H^μ の基底状態であり、第 1 章に登場した調和関数 $h(x)$ そのものである。また、$\langle\mu, h_0\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} h_0(x)\mu(dx)$ である。

ブラウン運動が $\alpha = 2$ の安定過程であることから、主結果における増大の次数は定理 2.1 と整合している。しかし、対称安定過程及び一般の測度 μ への拡張を行う上で特に工夫すべきことが 2 点あった。

(a) レゾルベントの漸近展開を得る上で、ブラウン運動ではハンケル関数を用いることができたが、対称安定過程では直接的な計算を行う必要があった。
(b) レゾルベントに対応する作用素は、関数 V では $\sqrt{V}$ を用いて $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上に定義できたが、測度 μ では代わりに A_t^μ による時間変更の確率過程及び対応するディリクレ形式を用いて、$L^2(\mu)$ 上に定めた。

以下の証明の概略では、主にこれらの事柄を詳しく述べる。

3 証明の概略

3.1 レゾルベント核の漸近展開

$\{X_t\}_{t\geq 0}$ の生成作用素は $(-\Delta)^{\alpha/2}$ であるから、

$$\mathbb{E}_x\left[e^{iu\cdot(X_t-x)}\right]=e^{-t|u|^\alpha}$$

が成立し、推移確率密度関数 $p(t,x,y)$ はフーリエ逆変換により

$$p(t,x,y)=B_{d,\alpha}t^{-\frac{d}{\alpha}}g\left(\frac{|x-y|}{t^{1/\alpha}}\right),\quad B_{d,\alpha}=\frac{\Gamma(d/\alpha)}{\alpha\cdot 2^{d-1}\pi^{d/2}\Gamma(d/2)} \tag{3.1}$$

とわかる。ここで、$g:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ は、$g(0)=1$、 $g(w)\asymp 1\wedge w^{-d-\alpha}$ 及び $g(0)-g(w)\leq c_1w^2$ を満たす正値関数である。$\beta\geq 0$ に対して β-次レゾルベントを

$$G_\beta(x,y)=\int_0^\infty e^{-\beta t}p(t,x,y)dt$$

により定める。このとき、レゾルベントの $\beta\to 0$ における漸近展開が以下のように得られる。

定理 3.1. *([14, Theorem 2.4])*

(1) $1<d/\alpha<2$ のとき

$$G_\beta(x,y)=G(x,y)-\frac{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}}{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}\beta^{\frac{d}{\alpha}-1}+E_\beta(x,y),$$
$$E_\beta(x,y)\leq c_1\beta|x-y|^{2\alpha-d}$$

(2) $d/\alpha=2$ のとき

$$G_\beta(x,y)=G(x,y)-\frac{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)}\beta\log\beta^{-1}+E_\beta(x,y),$$
$$|E_\beta(x,y)|\leq c_1\beta(1+|\log|x-y||+\beta|x-y|^\alpha)$$

(3) $d/\alpha>2$ のとき

$$G_\beta(x,y)=G(x,y)-\beta\tilde{G}(x,y)+E_\beta(x,y)$$

ここで $\tilde{G}(x,y)=\displaystyle\int_0^\infty tp(t,x,y)dt$ であり、

$$E_\beta(x,y)\leq\begin{cases}c_1\beta^{\frac{d}{\alpha}-1} & (2<d/\alpha<3)\\ c_1\beta^2\log\beta^{-1}+c_2\beta^2(1+|\log|x-y||+\beta|x-y|^\alpha) & (d/\alpha=3)\\ c_1\beta^2|x-y|^{3\alpha-d} & (d/\alpha>3)\end{cases}$$

3.2 時間変更の確率過程及びコンパクト作用素の設定

$\beta \geq 0$ に対して、$\mathbb{M}^\beta = (\{X_t\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}_x^\beta)$ を $\mathbb{M}$ の β-消滅過程とする。つまり、マルコフ過程の生存時間を ζ、フィルトレーションを $\{\mathscr{F}_t\}_{t\geq 0}$ とすると $\mathbb{P}_x^\beta(\Lambda; t < \zeta) = e^{-\beta t}\mathbb{P}_x(\Lambda)$ が $\Lambda \in \mathscr{F}_t$ に対して成り立つとする。このとき、対応するディリクレ形式は $\mathcal{E}_\beta(u,u) = \mathcal{E}(u,u) + \beta(u,u)_m$ で与えられる。更に、$\mathbb{M}^\beta$ を A_t^μ で時間変更したもの $\check{\mathbb{M}}^{\beta,\mu}$ を、以下のように定める。

$$\check{\mathbb{M}}^{\beta,\mu} = (\{X_{\tau_t}\}_{t\geq 0}, \mathbb{P}_x^\beta), \qquad \tau_t = \inf\{s > 0 \mid A_s^\mu > t\}$$

更に A_t^μ の台 Y を

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \mathbb{P}_x(T > 0) = 0\}, \qquad T = \inf\{t > 0 \mid A_t^\mu > 0\}$$

と定め、$\mathcal{F}_e^\beta$ を $(\mathcal{E}_\beta, \mathcal{F})$ の拡大ディリクレ空間とすると、$\check{\mathbb{M}}^{\beta,\mu}$ に対応するディリクレ形式が $L^2(Y,\mu)$ 上に以下のように構成される。

$$\check{\mathcal{F}}^\beta = \{\psi \in L^2(Y,\mu) \mid \exists u \in \mathcal{F}_e^\beta, Y \text{ 上 } \psi = u \ \mu\text{-a.e.}\}$$
$$\check{\mathcal{E}}^\beta(\psi,\psi) = \mathcal{E}_\beta(H_Y u, H_Y u), \quad H_Y u(x) = \mathbb{E}_x^\beta[u(X_{\sigma_Y})]$$

ここで、σ_Y は Y への到達時刻である。このとき、$\mathcal{F}_e^\beta$ と $\check{\mathcal{F}}^\beta$ は次の意味で同一視することが可能である。

- $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $u \in \mathcal{F}_e^\beta$ を Y に制限した $u|_Y$ は $\check{\mathcal{F}}^\beta$ に属す。
- 逆に、Y 上の関数 $\psi \in \check{\mathcal{F}}^\beta$ に対して、$\check{\mathcal{F}}^\beta$ の定義式で登場した u により $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $H_Y u$ を定めると、これは Y 上では ψ に等しく、$\mathcal{F}_e^\beta$ に属す。

$\check{\mathbb{M}}^{\beta,\mu}$ のグリーン作用素は $L^2(Y,\mu)$ 上で

$$\mathcal{G}_\beta f(x) = \int_Y G_\beta(x,y) f(y)\mu(dy)$$

により定められるが、$\mathcal{G}_\beta f \in \check{\mathcal{F}}^\beta$ であること、先に述べた $\check{\mathcal{F}}^\beta$ と $\mathcal{F}_e^\beta$ の同一視及び、$\mathcal{F}_e^\beta$ が $L^2(\mathbb{R}^d,\mu)$ にコンパクトに埋め込まれること ([11]) から、この作用素はコンパクトであるとわかる。作用素 $\mathcal{G}_\beta$ の最大固有値を γ_β で与え、対応する固有関数で $L^2(Y,\mu)$ ノルムが 1 に等しいものを h_β とする。この時点では h_β は Y 上の関数であるが、Y の外では

$$h_\beta(x) = \frac{1}{\gamma_\beta}\int_{\mathbb{R}^d} G_\beta(x,y) h_\beta(y)\mu(dy)$$

と拡張すると、$\check{\mathcal{F}}^\beta$ の元を $\mathcal{F}_e^\beta$ と同一視することに相当する。$\mathbb{R}^d$ 上全体で、このように定義した h_β は

$$\frac{1}{\gamma_\beta} = \inf\{\mathcal{E}_\beta(u,u) \mid u \in \mathcal{F}_e^\beta, (u,u)_\mu = 1\} = \mathcal{E}_\beta(h_\beta, h_\beta)$$

を満たしている。$1/\gamma_0$ が第 1 章における $\lambda(\mu)$ そのものであることも踏まえて、次が示される。

補題 3.2. h_β は h_0 に $\mathcal{E}$-弱収束及び $L^2(\mu)$-強収束し、$\lim_{\beta\to 0} \gamma_\beta = \gamma_0 = 1$ である。

更に、μ がコンパクト台をもつことと、レゾルベント核 $G_\beta(x,y)$ の漸近展開を用いて作用素 $\mathcal{G}_\beta$ の漸近展開が次のように得られる。

(1) $1 < d/\alpha < 2$ のとき、

$$\mathcal{G}_\beta = \mathcal{G}_0 - \frac{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}}{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}\beta^{\frac{d}{\alpha}-1}\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$$

ただし、$\mathcal{D}_1$ 及び $\mathcal{D}_2$ は次のように定める。

$$\mathcal{D}_1 f(x) = \int_Y f(y)\mu(dy), \quad \mathcal{D}_2 f(x) = \int_Y E_\beta(x,y) f(y)\mu(dy).$$

(2) $d/\alpha = 2$ のとき、$1 < d/\alpha < 2$ における $\mathcal{D}_1$ 及び $\mathcal{D}_2$ により

$$\mathcal{G}_\beta = \mathcal{G}_0 - \frac{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}}{\Gamma(\alpha+1)}\beta\log\beta^{-1}\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$$

(3) $d/\alpha > 2$ のとき、$\mathcal{D}_1 f(x) = \int_Y \tilde{G}(x,y) f(y)\mu(dy)$ 及び $1 < d/\alpha < 2$ における $\mathcal{D}_2$ により

$$\mathcal{G}_0 - \beta\mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$$

$\mathcal{D}_2$ の作用素ノルムが $E_\beta(x,y)$ のもつ β のオーダーに等しいことに注意すると、[6] 同様にして $\mathcal{D}_1$ までの項でコンパクト作用素における 1 次摂動理論 ([5]) が適用できて γ_β の $\beta \to 0$ での漸近展開が得られる。

定理 3.3. 最大固有値 γ_β は、d/α に応じて以下の漸近展開をもつ。

$$\gamma_\beta = 1 - \frac{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}\langle\mu, h_0\rangle^2}{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}\beta^{\frac{d}{\alpha}-1} + o(\beta^{\frac{d}{\alpha}-1}) \quad (1 < d/\alpha < 2) \tag{3.2}$$

$$\gamma_\beta = 1 - \frac{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}\langle\mu, h_0\rangle^2}{\Gamma(\alpha+1)}\beta\log\beta^{-1} + o(\beta\log\beta^{-1}) \quad (d/\alpha = 2) \tag{3.3}$$

$$\gamma_\beta = 1 - (h_0, h_0)_m\beta + o(\beta) \quad (d/\alpha > 2) \tag{3.4}$$

3.3 ターベリアン定理からファインマン・カッツ型期待値の時間増大度

まずは、以下の等式が成立することに注意する。

$$\mathbb{E}_x[e^{A_t^\mu}] = 1 + \int_0^t p_s^\mu\mu(x)ds, \quad p_s^\mu\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^d} p^\mu(s,x,y)\mu(dy).$$

$\int_0^t p_s^\mu\mu(x)ds$ の $t \to \infty$ での振る舞いを知るためには、レゾルベント $G_\beta^\mu\mu$ の $\beta \to 0$ での振る舞いを調べ、ターベリアンの定理を適用すればよい。レゾルベント方程式から

$$G_\beta^\mu\mu = (1-\mathcal{G}_\beta)^{-1}(G_\beta\mu).$$

であるが、h_β への射影 $P_\beta f(x) = (f, h_\beta)_\mu h_\beta$ とそれ以外の部分への直交分解を考えて、以下を得る。

$$G_\beta^\mu\mu = (1-\gamma_\beta)^{-1}(G_\beta\mu, h_\beta)_\mu h_\beta + R_\beta, \quad R_\beta \in \mathcal{F}_e, \quad \sup_{0\le\beta\le1}\mathcal{E}(R_\beta, R_\beta) < \infty \tag{3.5}$$

(3.2)–(3.5) に注意すると、$\mathcal{E}$-弱収束の意味で次が成立する。

$$\lim_{\beta\to0}\beta^{\frac{d}{\alpha}-1}G_\beta^\mu\mu(x) = \frac{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}\langle\mu, h_0\rangle}h_0(x) \qquad (1 < d/\alpha < 2) \tag{3.6}$$

$$\lim_{\beta\to 0}\beta\log\beta^{-1}G_\beta^\mu\mu(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}\langle\mu,h_0\rangle}h_0(x)\qquad(d/\alpha=2)\tag{3.7}$$

$$\lim_{\beta\to 0}\beta G_\beta^\mu\mu(x)=\frac{\langle\mu,h_0\rangle}{(h_0,h_0)_m}h_0(x)\qquad(d/\alpha>2)\tag{3.8}$$

これを各点収束に強めるためには、まず $\epsilon>0$ と $x\in\mathbb{R}^d$ に対して $p^\mu(\epsilon,x,y)dy=:g(y)dy$ が $\mathcal{K}_\infty$ に属すこと、[8] より $(u,u)_{g\cdot m}\le\|Gg\|_\infty\mathcal{E}(u,u)$ となることに注意する。このとき、$\mathcal{E}$-弱収束から $L^2(g\cdot m)$-弱収束が導けるため、(3.6)–(3.8) の両辺に p_ϵ^μ を作用させるとよい。p_ϵ^μ と G_β^μ の可換性も加味すると、次が得られる。

補題 3.4. $x\in\mathbb{R}^d$ の各点において、以下の式が成立する。

$$\lim_{\beta\to 0}\beta^{\frac{d}{\alpha}-1}G_\beta^\mu p_\epsilon^\mu\mu(x)=\frac{\alpha\Gamma(\frac{d}{2})\sin((\frac{d}{\alpha}-1)\pi)}{2^{1-d}\pi^{1-\frac{d}{2}}\langle\mu,h_0\rangle}h_0(x)\quad(1<d/\alpha<2)$$

$$\lim_{\beta\to 0}\beta\log\beta^{-1}G_\beta^\mu p_\epsilon^\mu\mu(x)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2^{1-d}\pi^{-\frac{d}{2}}\langle\mu,h_0\rangle}h_0(x)\quad(d/\alpha=2)$$

$$\lim_{\beta\to 0}\beta G_\beta^\mu p_\epsilon^\mu\mu(x)=\frac{\langle\mu,h_0\rangle}{(h_0,h_0)_m}h_0(x)\quad(d/\alpha>2)$$

ここで、関数 $k(\beta)$ を

$$k(\beta)=\begin{cases}\beta^{\frac{d}{\alpha}-1} & (1<d/\alpha<2)\\ \beta\log\beta^{-1} & (d/\alpha=2)\\ \beta & (d/\alpha>2)\end{cases}$$

とすると、次のターベリアンの定理が得られる。

補題 3.5. ν は $[0,\infty)$ 上のボレル測度で、全ての $\beta>0$ に対して $\int_0^\infty e^{-\beta t}\nu(dt)<\infty$ が成り立つとする。このとき $\lim_{\beta\to 0}k(\beta)\int_0^\infty e^{-\beta t}\nu(dt)=D\ge 0$ ならば、$\lim_{t\to\infty}k\left(\frac{1}{t}\right)\nu[0,t)=\frac{D}{\Gamma((d/\alpha)\wedge 2)}$ である。

$G_\beta^\mu p_\epsilon^\mu\mu(x)=\int_0^\infty e^{-\beta t}p_{t+\epsilon}^\mu\mu(x)dt$ であることに注意して、この定理を適用すると $k\left(\frac{1}{t}\right)\int_0^t p_{s+\epsilon}^\mu\mu(x)ds$ の $t\to\infty$ における極限が求まる。更に

$$k\left(\frac{1}{t+\epsilon}\right)\int_0^{t+\epsilon}p_s^\mu\mu(x)ds=k\left(\frac{1}{t+\epsilon}\right)\int_0^t p_{s+\epsilon}^\mu\mu(x)ds+k\left(\frac{1}{t+\epsilon}\right)\int_0^\epsilon p_s^\mu\mu(x)ds$$

において $t\to\infty$ とすると、第 2 項が 0 に収束すること、$\frac{k(1/(t+\epsilon))}{k(1/t)}$ が 1 に収束することから、定理 2.2 が得られる。

4 今後の展望

定理 3.1 で与えたレゾルベントの漸近展開では、誤差項 $E_\beta(x,y)$ は $|x-y|\to\infty$ としたとき発散する関数で上から評価されている。作用素 $\mathcal{G}_\beta$ の漸近展開でも、そのまま適用するために十分条件として、μ にコンパクト性を課していた。しかしながら、$\mu\in\mathcal{K}_\infty$ であっても、定義式 (1.1) に基づき現在得られている漸近展開を x と y が両方とも適切なコンパクト領域に含まれている場合のみ適用し、それ以外のときには $G_\beta(x,y)$ を別の関数で上下から評価を行えば、γ_β の上下からの評価が得られるので、$(1-\gamma_\beta)/k(\beta)$ は $\beta\to 0$ で、(3.2)–(3.4) の第 2 項に現れる定数に収束することが示される。3 章 3 節の議論については、少なくとも μ が 0 次有限エネルギーをもつときには、$\mu\in\mathcal{K}_\infty$ に対しても正しい。

参考文献

[1] Albeverio, S., Blanchard, P., Ma, Z.-M.: Feynman-Kac semigroups in terms of signed smooth measures, In Random partial differential equations (Oberwolfach, 1989), Birkhäuser, Inter. Ser. Num. Math. 102, 1–31, (1991).

[2] Chen, Z.-Q. and Kumagai, T.: Heat kernel estimates for stable-like processes on d-sets, Stoc. Proc. Appli. 108, 27–62, (2003).

[3] Cranston, M., Koralov, L., Molchanov, S., Vainberg, B.: Continuous model for homopolymers, Journal of Funct. Anal. 256, 2656–2696, (2009).

[4] Grigo'yan, A.: Heat kernels on weighted manifolds and applications, Contemp. Math. 338, 93–191, (2006).

[5] Kato, T.: Perturbation thoery of linear operators, Reprint of the 1980 Edition, Springer, (1980).

[6] Klaus, M. and Simon, B.: Coupling constant thresholds in nonrelativistic quantum mechanics. I. Short-range two-body case, Analysis of Physics 130, 251–281, (1980).

[7] Simon, B.: Large time behavior of the L^p norm of Schrödinger semigroups, Journal of Functional analysis 40, 66–83, (1981).

[8] Stollmann, P., Voigt, J.: Perturbation of Dirichlet forms by measures, Potential Anal. 5, 109-138, (1996).

[9] Takeda, M.: Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric α-stable processes, Proc. Amer. Math. Soc. 134, 2729–2738, (2006).

[10] Takeda, M.: Large deviations for additive functionals of symmetric stable processes, J. Theor. Probab. 21, 336–355, (2008).

[11] Takeda, M., Tsuchida, K.: Differentiability of spectral functions for symmetric α-stable processes, Trans. Amer. Math. Soc. 359, (2007), 4031–4054.

[12] Takeda, M., Wada, M.: Large time asymtotics of Feynman-Kac functions for symmetric stable processes, preprint.

[13] Wada, M.: Perturbation of Dirichlet forms and stability of fundamental solutions, Tohoku Math. Journal 66, (2014), 523–537.

[14] Wada, M.: Asymptotic expansion of resolvent kernels and behavior of spectral functions for symmetric stable processes, submitted.