数理解析研究所講究録
第 1952 巻 2015 年 135-142

Exact convergence rate of the Wong-Zakai approximation to RDEs driven by Gaussian rough paths

東北大学・理学研究科 永沼 伸顕
Nobuaki Naganuma
Mathematical Institute, Tohoku University

1 はじめに

Coutin-Qian の条件を満たす d 次元 Gauss 過程によって駆動される確率微分方程式の解を Wong-Zakai 近似を用いて近似した場合の収束の速さについて報告する．Wong-Zakai 近似の収束の速さに関する先行研究として，[FR14] と [BFRS13] があり，前者は決定論的な意味での，後者は確率論的な意味での収束の速さを考察している．本研究では，後者の精密化を図りその収束の速さが最適であることを示す．

最適な収束の速さを見つけることは，Wong-Zakai 近似の近似誤差の漸近挙動を知る上で大きな手がかりになる．Euler 近似や Milstein 近似の近似誤差の漸近挙動については多くの研究がある．たとえば，マルチンゲールにより駆動される確率微分方程式の解に対する近似に関しては，[KP91, JP98] により深い研究がなされいる．彼らは，近似誤差に対して中心極限定理の一種が成立することを示している．最近では非整数 Brown 運動により駆動される確率微分方程式の解に対する近似についても研究が進んでおり，近似誤差に対するいくつかの極限定理が示されている [NN07, GN09, Nag14, HLN14].

本稿で考える問題を定式化する．独立同分布な成分をもつ平均 0 の連続な d 次元 Gauss 過程 $X=(X^1,\ldots,X^d)$ は，$1/3<\lambda<1/2$ に対して Coutin-Qian の条件を満たすとする (定義 3 参照)．この Gauss 過程 X を駆動過程とする確率微分方程式

$$dY_t=\sigma(Y_t)\,dX_t, \qquad Y_0=y_0\in\mathbf{R}^e, \tag{1}$$

をラフパス解析の枠組みで考え，$Y=(Y^1,\ldots,Y^e)$ で解を表わす．ここで

σ は $(e \times d)$ 行列値の関数である．次に，Wong-Zakai 近似を定義する．はじめに，Gauss 過程 X を $X(m)_t = (X_{\tau_k^m} - X_{\tau_{k-1}^m})2^m(t - \tau_{k-1}^m) + X_{\tau_{k-1}^m}$, $\tau_{k-1}^m \le t \le \tau_k^m$, と折れ線近似する．ただし $\tau_k^m = k2^{-m}$ である．そして，(1) の X を $X(m)$ で置き換えた確率常微分方程式を考え，その解 $Y^{\mathrm{WZ}(m)}$ を用いて Y を近似する．この手法を Wong-Zakai 近似という．以上の設定で次の定理が成り立つ:

定理 1. Gauss 過程 X は，$1/3 < \lambda < 1/2$ に対して Coutin-Qian の条件を満たすとする．関数 σ は十分な微分可能性をもつとし，さらに，σ 自身とすべての導関数は有界であると仮定する．このとき，任意の $r \ge 1$ に対して，自然数 m に依存しない正定数 C が存在して，

$$\boldsymbol{E}\left[\left(\sup_{0\le t\le 1}|Y_t^{\mathrm{WZ}(m)} - Y_t|\right)^r\right]^{1/r} \le C2^{-m(2\lambda-1/2)} \tag{2}$$

が成り立つ．

この定理について，幾つか注意を述べる．

注意 2.
- 定理 1 は，Hurst 定数 $1/3 < H < 1/2$ を持つ非整数 Brown 運動を駆動過程とする確率微分方程式に対して適用可能である．この場合には $\lambda = H$ と取ればよい．
- 定理 1 より，収束の速さは $2^{-m(2\lambda-1/2)}$ を上限として持つことが分かる．一方で，$\sigma(y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y^1 \end{pmatrix}$ を係数および Hurst 定数 $1/3 < H < 1/2$ の非整数 Brown 運動を駆動過程としてもつ確率微分方程式を考えると，この収束の速さが最適であることも分かる．
- 評価 (2) のような近似の収束の早さの研究は [BFRS13] で行われており，あるクラスの Gauss 過程で駆動される確率微分方程式の解と近似解に対して，(2) の左辺が $2^{-m\kappa}$ の早さで収束することを示している．ただし，$0 < \kappa < 2\lambda - 1/2$ である．定理 1 は $\kappa = 2\lambda - 1/2$ の場合に相当する．これについては第 4 節で注意を与える．

以降の構成について触れる．第 2 節ではラフパス解析の基本的な事実を列挙する．第 3 節では証明の概略を与える．第 4 節では先行研究との関連を述べる．

2 ラフパス解析

ラフパス解析の基礎事項をまとめる．まず，$\triangle = \{(s,t); 0 \leq s < t \leq 1\}$ とおく．そして，N 階切り捨てテンソル代数を $T^N(\mathbf{R}^d) = \bigoplus_{n=0}^N (\mathbf{R}^d)^{\otimes n}$ と書く．$T^N(\mathbf{R}^d)$ には積 $*$ が定義できる．Lipschitz 連続な関数 $x : [0,1] \to \mathbf{R}^d$ に対して，$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}^0 \equiv 1, \boldsymbol{x}^1, \ldots, \boldsymbol{x}^N) : \triangle \to T^N(\mathbf{R}^d)$ を

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x}_{st}^n &= (\boldsymbol{x}_{st}^{\alpha_1 \cdots \alpha_n})_{\alpha_1 \cdots \alpha_n \in \{1,\ldots,d\}^n} \\
&= \left(\int_{s<u_1<\cdots<u_n<t} dx_{u_1}^{\alpha_1} \cdots dx_{u_n}^{\alpha_n} \right)_{\alpha_1 \cdots \alpha_n \in \{1,\ldots,d\}^n}
\end{aligned}
$$

と定める．そして，$\boldsymbol{x}$ を $S_N(x)$ と書き，x のリフトとよぶ．このリフト $\boldsymbol{x} \equiv S_N(x)$ は Chen の等式 $\boldsymbol{x}_{st} = \boldsymbol{x}_{st_1} * \boldsymbol{x}_{t_1 t}$, $0 \leq s < t_1 < t \leq 1$, を満たし，また，有限な p 次変分

$$
\|\boldsymbol{x}\|_{p\text{-var}}^p = \sum_{n=1}^N \sup_{0=\tau_0<\cdots<\tau_k=1} \sum_{l=1}^k |\boldsymbol{x}_{\tau_{l-1}\tau_l}^n|_{(\mathbf{R}^d)^{\otimes n}}^{p/n}
$$

を持つ．ここで，sup は区間 $[0,1]$ のすべての有限分割 $0 = \tau_0 < \cdots < \tau_k = 1$ を渡る．次に，$2 \leq p < \infty$ に対して，geometric rough path の空間 $(G\Omega_p(\mathbf{R}^d), \rho_{p\text{-var}})$ を

$$
G\Omega_p(\mathbf{R}^d) = \overline{\left\{ S_{\lfloor p \rfloor}(x) : \triangle \to T^{\lfloor p \rfloor}(\mathbf{R}^d); \begin{array}{c} x \text{ は } [0,1] \text{ から } \mathbf{R}^d \text{ への} \\ \text{Lipschitz 連続な関数} \end{array} \right\}}^{\rho_{p\text{-var}}},
$$

$$
\rho_{p\text{-var}}(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{x}}) = \max_{1 \leq n \leq \lfloor p \rfloor} \sup_{0=\tau_0<\cdots<\tau_k=1} \left(\sum_{l=1}^k |\boldsymbol{x}_{\tau_{l-1}\tau_l}^n - \tilde{\boldsymbol{x}}_{\tau_{l-1}\tau_l}^n|_{(\mathbf{R}^d)^{\otimes n}}^{p/n} \right)^{n/p}
$$

で定義する．

次にラフパス解析における微分方程式

$$
dy_t = \sigma(y_t)\, dx_t, \qquad y_0 : \text{given}, \tag{3}
$$

の解の概念について述べる．任意の $\boldsymbol{x} \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ に対して，適切な Lipschitz 連続な関数の列 $\{x^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ を取ることで $\boldsymbol{x}^{(n)} = S_{\lfloor p \rfloor}(x^{(n)}) \to \boldsymbol{x}$ とできる．そして，(3) の x を $x^{(n)}$ で置き換えた通常の意味での常微分方程式の初期値問題の解 $y^{(n)}$ を考える．すると，この解の列 $\{y^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ は一様位相において Cauchy 列であることが示されるので，その極限 y を用いて，ラフパス解析における常微分方程式 (3) の解という．とくに，$\boldsymbol{x} = S_{\lfloor p \rfloor}(x)$ となる Lipschitz 連続関数 x が存在するときは，ラフパス解析における解は通常の常微分方程式の解と一致する．さらに，解写像 $I : \boldsymbol{x} \mapsto y$ は局所 Lipschitz 連続であって

$$
\sup_{0 \leq t \leq 1} |y_t^{(n)} - y_t| \leq C \rho_{p\text{-var}}(\boldsymbol{x}^{(n)}, \boldsymbol{x}) \tag{4}
$$

が成り立つ．ただし，C は n には依存しないが，

$$\|\boldsymbol{x}\|_{p\text{-var}} \le M, \qquad \sup_n \|\boldsymbol{x}^{(n)}\|_{p\text{-var}} \le M$$

を満たす M には依存する正定数である．

以上により，d 次元 Gauss 過程 X に対応するラフパス $\boldsymbol{X} \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ が存在すればラフパス解析の枠組みで確率微分方程式を定式化できることが分かる．次に，Gauss 過程 X に対応するラフパスが存在するための十分条件を述べる．まず，関数 $f : [0,1]^2 \to \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d$ に対して

$$f\begin{pmatrix} s,t \\ u,v \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} s \\ u \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} s \\ v \end{pmatrix} - f\begin{pmatrix} t \\ u \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} t \\ v \end{pmatrix}$$

とおく．このとき，X の分散 $R_X(s,t) = \boldsymbol{E}[X_s \otimes X_t]$ に対しては，

$$R_X\begin{pmatrix} s,t \\ u,v \end{pmatrix} = \boldsymbol{E}[(X_t - X_s) \otimes (X_v - X_u)].$$

となる．

定義 3 (Coutin-Qian の条件)．d 次元 Gauss 過程 X が Coutin-Qian の条件を $0 < \lambda < 1$ に対して満たすとは，ある正定数 C が存在して

$$\left| R_X\begin{pmatrix} s,t \\ s,t \end{pmatrix} \right| \le C|t-s|^{2\lambda} \text{ for any } 0 < s,t < 1,$$

$$\left| R_X\begin{pmatrix} s,s+\epsilon \\ t,t+\epsilon \end{pmatrix} \right| \le C|t-s|^{2\lambda-2}\epsilon^2 \text{ for any } 0 < \epsilon < |t-s|$$

を満たすことをいう．

定義 4. 正の数 $1 \le \rho < \infty$ を固定する．関数 $f : [0,1]^2 \to \mathbf{R}^d \otimes \mathbf{R}^d$ と $s < t$, $u < v$ に対して

$$V_\rho(f; [s,t] \times [u,v]) = \sup_{\substack{\{t_k\}:\text{partition of } [s,t], \\ \{t'_l\}:\text{partition of } [u,v]}} \left\{ \sum_{k,l} \left| f\begin{pmatrix} t_{k-1}, t_k \\ t'_{l-1}, t'_l \end{pmatrix} \right|^\rho \right\}^{1/\rho}.$$

とおく．そして $V_\rho(f; [0,1]^2) < \infty$ であるときに，f は finite ρ-variation in 2D sense であるという．

Gauss 過程 X の分散 R_X が，$1 \le \rho < 2$ に対して，$V_\rho(R_X; [s,t]^2)^\rho \le C(t-s)$ を満たすならば，$p > 2\rho$ なる p に対して，$\boldsymbol{X}(m) = S_{\lfloor p \rfloor}(X(m)) \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ が $\boldsymbol{X} \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ に概収束する．そして Coutin-Qian の条件を $1/4 < \lambda \le 1/2$

に対して満たすならば，$\rho = 1/(2\lambda)$ として先の不等式が成立するので，$\boldsymbol{X}(m)$ は収束する．これらの事実については [LQ02], [FV10b] を参照のこと (歴史的には，はじめに [CQ02] において，Coutin-Qian の条件の下で極限の存在が示され，ついで [FV10a] において，分散の変分に対する仮定の下で極限の存在が示された).

3 証明の概略

以下，Gauss 過程 X は，$1/3 < \lambda < 1/2$ に対して Coutin-Qian の条件を満たすとする．はじめに，$p > 1/(1/2-\lambda)$ なる p を固定する．当然 $1/(1/2-\lambda) > 1/\lambda$ なので，先に述べた通り $\boldsymbol{X}(m) = S_{\lfloor p \rfloor}(X(m)) \in G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ と定めれば，$m \to \infty$ のときに $G\Omega_p(\mathbf{R}^d)$ において $\boldsymbol{X}(m)$ は収束するので極限を $\boldsymbol{X}$ と書く．このとき，$\boldsymbol{X}(m)$ と $\boldsymbol{X}$ の差に関して以下の評価が成り立つ (簡単のため成分ごとに表記する):

命題 5. 自然数 $n = 1, 2, 3$ に対して，m に依存しない正定数 C_n が存在して，

$$
\begin{aligned}
(5) \quad & \boldsymbol{E}[|\boldsymbol{X}(m)_{st}^{\alpha_1\cdots\alpha_n} - \boldsymbol{X}_{st}^{\alpha_1\cdots\alpha_n}|^2]^{1/2} \\
& \qquad \le C_n\{2^{-m} \wedge (t-s)\}^{2\lambda-1/2}(t-s)^{1/2-\lambda}(t-s)^{(n-1)\lambda} \\
& \qquad \le C_n\{2^{-m} \wedge (t-s)\}^{2\lambda-1/2}(t-s)^{n(1/2-\lambda)}
\end{aligned}
$$

が任意の $(s,t) \in \{(\tau_k^m, \tau_l^m); 0 \le k < l \le 2^m\}$ に対して成り立つ．

命題 5 は次のように示される．簡単のため $n = 2$ のときを考える．Chen の等式から

$$
(6) \qquad \boldsymbol{X}(m)_{st}^{\alpha\beta} - \boldsymbol{X}_{st}^{\alpha\beta} = \sum_{k=2^m s+1}^{2^m t} \left\{\boldsymbol{X}(m)_{\tau_{k-1}^m \tau_k^m}^{\alpha\beta} - \boldsymbol{X}_{\tau_{k-1}^m \tau_k^m}^{\alpha\beta}\right\}
$$

が従う．ここで折れ線近似を用いているが故に項の打ち消しが起きていることに注意する．次に，$I_{k,l}^{(m)} = 2^{4m\lambda}\boldsymbol{E}[\{\boldsymbol{X}(m)_{\tau_{k-1}^m \tau_k^m}^{\alpha\beta} - \boldsymbol{X}_{\tau_{k-1}^m \tau_k^m}^{\alpha\beta}\}\{\boldsymbol{X}(m)_{\tau_{l-1}^m \tau_l^m}^{\alpha\beta} - \boldsymbol{X}_{\tau_{l-1}^m \tau_l^m}^{\alpha\beta}\}]$ は，すべての $l - k \ge 1$ に対して $|I_{k,l}^{(m)}| \le C|k-l|^{2\lambda-2}$ と評価できる．よって (6) の右辺の 2 乗平均が評価できる．

実は，(5) が任意の $(s,t) \in \triangle$ に対して成り立つ．これは命題 5 と $\boldsymbol{X}(m)$ や $\boldsymbol{X}$ の Hölder 連続性から従う．さらに，Lyons の拡張定理の手法を真似ることで，すべての自然数 n について (5) が成り立つことも分かる．最後に Garsia-Rodemich-Rumsey の補題を適用すると次が得られる:

定理 6. 任意の $r \geq 1$ と $p > 1/(1/2 - \lambda)$ に対して，m に依存しない正定数 C が存在して

$$\boldsymbol{E}[\rho_{p\text{-var}}(\boldsymbol{X}(m), \boldsymbol{X})^r]^{1/r} \leq C2^{-m(2\lambda-1/2)}$$

が成り立つ．

一見，解写像 I の局所 Lipschitz 連続性 (4) と定理 6 から定理 1 が直ちに導かれるように見える．しかし，我々の設定においては (4) に現れる Lipschitz 定数 C は確率変数であるため，その可積分性が問題となるが，[CLL13], [BFRS13] の議論により，可積分性が示され，定理 6 から定理 1 が導かれる．

4 主定理に関する注意

本研究では，(4) に現れる Lipschitz 定数の可積分性と定理 6 より定理 1 を導いた．一方で，[BFRS13] では，以下の定理を用いて収束の速さを求めている．

定理 7 ([FR14, Theorem 1 and 5]). Gauss 過程 X の分散 R_X は，$1 \leq \rho < 2$ に対して定数 C' が存在して，$V_\rho(R_X; [s,t]^2)^\rho \leq C'|t-s|$ を満たすとする．このとき，任意の $r \geq 1$，$1/\gamma + 1/\rho > 1$ なる $\gamma > \rho$，さらに，$p > 2\gamma$ なる p に対して定数 C が存在して

$$\boldsymbol{E}[|\rho_{p\text{-var}}(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}(m))|^r]^{1/r} \leq C2^{-m\left(\frac{1}{2\rho}-\frac{1}{2\gamma}\right)}$$

がすべての $m \in \mathbf{N}$ に対して成り立つ．

一見，定理 6 は定理 7 から導ける様にも見える．実際，$1/4 < \lambda' < \lambda$ なる λ' に対して，$\rho = 1/(2\lambda)$ および $\gamma = 1/(1-2\lambda')$ とおくと，$\gamma > \rho$ と $1/\gamma + 1/\rho > 1$ が成り立つ．よって，定理 7 から収束の速さとして $1/(2\rho) - 1/(2\gamma) = 2\lambda' - 1/2$ が得られる．しかし，収束の速さとして $2\lambda - 1/2$ を得るために，$\lambda' = \lambda$ とすると $1/\gamma + 1/\rho = 1$ となるので，定理 7 は適用できない．次に，定理 7 が $1/\gamma + 1/\rho = 1$ に対して示そうと，[FR14] の証明を修正することを考えると，難しいように見える．これは，2 次元 Young 積分の評価 ([FR14, Lemma 2]) を用いて命題 6 に類することを示していることに由来する．しかし，2 次元 Young 積分の評価を拡張できるかは一般にはよくわからない．いずれにせよ，定理 6 を定理 7 から導くことは容易ではない．そこで命題 6 を示すために，[FR14] の手法ではなく，第 3 節で述べた手法を取った．

参考文献

[BFRS13] Christian Bayer, Peter K. Friz, Sebastian Riedel, and John Schoenmakers. From rough path estimates to multilevel Monte Carlo. 2013.

[CLL13] Thomas Cass, Christian Litterer, and Terry Lyons. Integrability and tail estimates for Gaussian rough differential equations. *Ann. Probab.*, 41(4):3026–3050, 2013.

[CQ02] Laure Coutin and Zhongmin Qian. Stochastic analysis, rough path analysis and fractional Brownian motions. *Probab. Theory Relat. Fields*, 122:108–140, 2002.

[FR14] Peter K. Friz and Sebastian Riedel. Convergence rates for the full Gaussian rough paths. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 50(1):154–194, 2014.

[FV10a] Peter K. Friz and Nicolas B. Victoir. Differential equations driven by Gaussian signals. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 46(2):369–413, 2010.

[FV10b] Peter K. Friz and Nicolas B. Victoir. *Multidimensional stochastic processes as rough paths*, volume 120 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2010. Theory and applications.

[GN09] Mihai Gradinaru and Ivan Nourdin. Milstein's type schemes for fractional SDEs. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.*, 45(4):1085–1098, 2009.

[HLN14] Yaozhong Hu, Yanghui Liu, and David Nualart. Rate of convergence and asymptotic error distribution of Euler approximation schemes for fractional diffusions. *ArXiv e-prints*, 2014.

[JP98] Jean Jacod and Philip Protter. Asymptotic error distributions for the Euler method for stochastic differential equations. *Ann. Probab.*, 26(1):267–307, 1998.

[KP91] Thomas G. Kurtz and Philip Protter. Wong-Zakai corrections, random evolutions, and simulation schemes for SDEs. In *Stochastic analysis*, pages 331–346. Academic Press, Boston, MA, 1991.

[LQ02] Terry J. Lyons and Zhongmin Qian. *System control and rough paths.* Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2002. Oxford Science Publications.

[Nag14] Nobuaki Naganuma. Asymptotic error distributions of the Crank-Nicholson scheme for SDEs driven by fractional Brownian motion. *J. Theor. Probab.*, 2014. To appear, DOI 10.1007/s10959-014-0539-y.

[NN07] Andreas Neuenkirch and Ivan Nourdin. Exact rate of convergence of some approximation schemes associated to SDEs driven by a fractional Brownian motion. *J. Theoret. Probab.*, 20(4):871–899, 2007.