数理解析研究所講究録
第1952巻 2015年 186-190

ランダム行列に関連したディリクレ形式の芯集合と関連する話題

長田博文 (九州大学) & 種村秀紀 (千葉大学)

Introduction. この原稿は平成26年度「確率論シンポジウム」の講演

Cores of Dirichlet forms related to Random Matrix Theory
2014/12/19: 京都大学数理解析研究所

に基づく。幾つかの結果のアナウンスメントと、背景を説明する。

上述の講演では無限次元干渉ブラウン運動を記述するDirichlet形式の「芯集合」について議論した。無限次元干渉ブラウン運動を記述するDirichlet形式の研究は、[13]に始まり、その後[26, 1, 24, 25]その他によって研究されてきた。これらの、Dirichlet形式の定義域は、「芯集合」の閉包として構成される。それぞれの論文で芯集合がことなり、その閉包として得られるDirichlet形式の定義域が一致するか否かはまだ分かっていなかった。また、これら以外にも、ランダム行列に関係する確率力学の構成方法として1次元系に於いては、時空間相関関数による代数的な方法が有り、そこにおけるDirichlet形式の定義域は、「多項式」というべき代数的には取り扱いやすい、従って、かなり狭い集合（これも芯と呼ぶ）の閉包を含む集合であった。今回の結果で、これらの芯集合の取り方によらず、その閉包は常に同一であることをが示せた。

ランダム行列に関係する無限粒子系の確率力学には、確率解析的構成と代数的構成の2つが存在する。[20]において緩やかな仮定の下で、無限次元確率微分方程式の強解の存在と、強一意性を証明した。今回の結果を[20]の結果と組み合わせると、（芯集合の閉包の一致のみならず、それらを含む定義域を持つ）準正則Dirichlet形式の一意性がいえる。その結果、明らかに異なるこれら2つの構成による確率力学が、同一であることが証明された。

2つの種類の数学に橋を架けた結果、様々な事実が判明した。例えば、確率解析的構成を通じて、伊藤の公式、martingale理論、Dirichlet形式理論など用いることが出来る。その結果、確率解析を用いることで、相関関数の計算ではとても分からない、粒子の運動のパスレベルの定性的性質が分かる。そのような例の1つが、2次元以上或いは1次元空間で反発力を持つ干渉ポテンシャルの下で、粒子同士の非衝突を証明することである。キャパシティの概念が関係するため、代数的方法ではとても証明できることでは無い。逆に、代数的構成を用いることで、無限次元の干渉粒子系にもかかわらず、様々な平均量が時空間相関関数を用いて計算することが可能になった。無論、代数的構成は、**1次元系かつ逆温度$\boldsymbol{\beta=2}$の対数ポテンシャル**に限られており、確率解析的方法のような適用範囲の広さはない。一方、確率解析的手法は非常に広範囲の対象に適用できるロバストな方法である。今回の話は、地味で特別な話題と思われるかもしれないが、以上の結果を導く上で、なくてはならないものである。

Set up & 主結果：

Sを$\mathbb{R}^d$の連結閉集合で境界がLebesgue測度ゼロかつSは内点の閉包と一致するとする。Sをその配置空間とする。μをSの確率測度、つまり点過程とする。$\mathbb{D}$をSの標準的2次場とし

$$\mathcal{E}^{\mu}(f,g)=\int_{\mathsf{S}}\mathbb{D}[f,g]d\mu,\quad \|f\|_1^2=\|f\|_{L^2(\mu)}^2+\mathcal{E}^{\mu}(f,f).$$

Sの関数fが滑らかとは、$f(\mathsf{s})=\check{f}(s_1,\ldots)$, $\mathsf{s}=\sum_i\delta_{s_i}$で定まる対称な関数$\check{f}$が、滑らかであること、また、$f$が局所的(local)とは、あるコンパクト集合$K$に対して$\sigma[\pi_K]$可測であることである。ただし$\pi_K(\mathsf{s})=\mathsf{s}(\cdot\cap K)$は$\mathsf{S}$の射影である。

$$\mathcal{D}_{\infty}=\{f; f \text{ is local \& smooth}\}$$

これを元にいくつかの芯集合を考える。

$$\mathcal{D}_{\infty}^{\mu} = \{f \in \mathcal{D}_{\infty}; \|f\|_1 < \infty\}$$

配置空間 S の多項式の空間の元 F は、$\mathbb{R}^{\ell}$ の関数空間 $\mathcal{A}^{\ell}$ の和 $\mathcal{A}$ ($\ell \in \mathbb{N}$) の元 Q と $\mathbb{R}^d$ の関数空間 $\mathcal{B}$ の元 ϕ_i で次のように与えられる元である。

$$F(\mathsf{s}) = Q(\langle \phi_1, \mathsf{s} \rangle, \ldots, \langle \phi_{\ell}, \mathsf{s} \rangle)$$

この $\mathcal{A}$ と $\mathcal{B}$ の選択によって様々な多項式が考えられる。ここでは

$$\mathcal{P}^{\mu}[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \{F \in \mathcal{D}_{\infty}^{\mu};\ F \text{ is polynomial with } \mathcal{A} \text{ and } \mathcal{B}\}.$$

と置き、次の集合を考える。

- $\mathcal{P}_1$: $\mathcal{A}^{\ell} = \mathbb{R}^{\ell}$ の (普通の意味の) 多項式, $\mathcal{B} = C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$
- $\mathcal{P}_2$: $\mathcal{A}^{\ell} = C_b^{\infty}(\mathbb{R}^{\ell})$, $\mathcal{B} = C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$

論文 [13] では、$\mathcal{D}_{\infty}^{\mu}$ が採用されている。$\mathcal{P}_1$ は、代数的構成をしたときの多項式、また、$\mathcal{P}_2$ は [1, 26] で使われた集合である。以下を仮定する。

仮定：
(A1) 相関関数は局所的に L^{1+}.
(A2) $(\mathcal{E}^{\mu}, \mathcal{D}_{\infty}^{\mu})$ は $L^2(\mu)$ で closable.

この時、明らかに、

$$\mathcal{P}_1,\ \mathcal{P}_2 \subset \mathcal{D}_{\infty}^{\mu}.$$

が成立する。更に次の等式が成立する。

定理 1 ([19]) 条件 (A1) と (A2) のもとで、これらの芯集合の閉包はすべて同じである。

$$\overline{\mathcal{P}_1} = \overline{\mathcal{P}_2} = \overline{\mathcal{D}_{\infty}^{\mu}}$$

- [1, 13, 24, 25, 26] の Dirichlet 形式の定義域はそれぞれの上述の集合の閉包になっている。従って対応する拡散過程は同一である。しかし、ランダム行列関係の代数的構成による Dirichlet 形式の定義域は一般には tail の部分が非自明である可能性が有り、そのため、より大きな定義域になる可能性がある。同様の可能性が定理 3 で扱う場合も生じる。これらが実は起こらないと言うことを ISDE の解の一意性から示したのが次の結果である。

定理 2 ([19, 22])： [20] の「ISDE の解の一意性定理」が成り立つ状況では、これらの Dirichlet 形式の拡張になっている quasi-regular Dirichlet 形式はすべて同一であり、特に、対応する確率力学はすべて同じである。

- 定理 2 と [23]、更に [20] の「無限次元確率微分方程式 (ISDE) の解の一意性定理」から従う。
- [9] で開発した一般論との組み合わせでも定理 2 は証明できる。時空間相関関数を計算した [23] の手法とは異なる。この方法は解析的で有り、ロバストで広い範囲に適用できる。しかし [23] の手法は、時間非一様な近似にも適用でき、一方が一方を含むわけではない。

有界領域近似/有限粒子系近似： 更に重要な応用をのべる。無限次元干渉ブラウン運動は有限系の極限で得られるが、様々な近似がある中で、特に**有界領域の粒子系から領域を全空間に広げる操作**で無限粒子系を構成することを有界領域近似と呼ぶ。この有界領域近似には、従来、2 つの

標準的な近似 (操作) が存在した。2 つの操作の違いは、有界領域で無限粒子系を考えるとき、粒子が領域の境界に達したとき、どのような境界条件で運動することにするか、と言う差異である。

一般次元の干渉ブラウン運動の構成は Lang [11, 12] に始まる。ここで無限粒子系を、有界領域の粒子系の極限として構成した。なお、この有界領域とは $S_r = \{|x| \le r\}$ だが、そこに任意有限個の粒子を考えるので、そういう意味で（任意有限個の粒子の運動の全体だから）粒子が運動する空間としての状態空間は、無限次元の空間になる。

Lang は、Dirichlet 形式は扱わず、SDE として領域 S_r の境界で反射壁条件を満たすものを考え、その極限が収束することで、全空間の無限粒子系の確率力学を ISDE の解として構成した。Dirichlet 形式としては、Lang に対応する Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}_r, \hat{\mathcal{D}}_r)$ は単調増大になる。(domain が、小さくなっていく)。これは、この有界領域を考えるとき、最も大きな Dirichlet 形式の定義域 $\hat{\mathcal{D}}_r$ を考えたものである。

一方、[13] に於いては、これに加えて、最も小さな Dirichlet 形式の定義域 $\mathcal{D}_r$ を考えた。この場合、Dirichlet 形式 $(\mathcal{E}_r, \mathcal{D}_r)$ は単調減少になる。(domain が、大きくなっていく)。ここでは、境界を一点化したもので、最も小さな定義域を考えたものである。

Lang [11, 12] は、反射壁を考え、また、[13] では、境界を 1 点にするという境界条件を考えた。前者は最も大きな領域（Dirichlet 形式の）を採用し、後者は、最も小さなものを採用している。ここで、(有界領域の) 無限粒子系として考えた場合、粒子の空間は、

$$S_r = \{|x| \le r\}$$

ではなく、

$$\sum_{m=0}^{\infty} S_r^m$$

であることに注意する。S_r の場合（そこに 1 つだけ粒子があるわけだが）最も小さな定義域は典型例として歴史的な論文 [2] であげられている。上述の、この小さい方の定義域は、その無限粒子系版である。

これら 2 つの有界領域近似（finite volume approximation）は、前者は単調増大な Dirichlet 形式の近似列、後者は単調減少の近似列となる。明らかに、極限は、後者が標準的なものと思え、上述の 2 つの定理の閉包と常に一致する。しかし、前者と後者の一致は、実は、極めて非自明な問題で有り、一般には成立しない。従来、この 2 つの無限系の Dirichlet 形式、従って確率力学の同一性は、未解決であった。これに対して定理 2 の系として、以下の結果を得た。

定理 3 ([22])： [20] の「ISDE の解の一意性定理」が成り立つ状況では、有界領域近似に於いて、これら 2 種類の近似列から得られる 2 つの確率力学は同じである。

注意： • 定理 3 では ISDE の解の一意性から、対応する準正則 Dirichlet 形式の一意性を示した。この手法は [25] による。ある意味、「準正則 Dirichlet 形式の一意性」より難しい「ISDE の解の一意性」を経由して証明しているため、ISDE の解の一意性が分からない場合はこの結果を適用できない。そういう意味で「本当」の方法ではなく、別のより幾何的な方法があるかもしれない。唯、問題は tail の部分なので、位相的に性質が悪く、軟化作用素の類いを構成できないので、今の所この方向は手詰まりである。

• [18] で Ginibre 干渉ブラウン運動の tagged 粒子が劣拡散的な漸近挙動をすることを示した。この結果は「商 Dirichlet 空間」で、極限の係数 (自己拡散行列) を表現することが、1 つの鍵になっている。他の話題と、方向性は異なるが、ここでも Dirichlet 形式の扱いが重要な要素となっている。

● 有界領域近似ではない、有限粒子系近似について、[9] で一般論を構築した。更にそれを、Dyson モデルの（中心の位置をずらした）bulk 極限に応用することで、SDE gap という現象を発見した [10]。その際も定理 1 と定理 2 の結果を使用している。尚、代数的な構成が可能な場合は、極限の一致は [10] とは違った、具体的な計算による手法で [23] で示されている。この手法は、収束を時空間相関関数の具体的計算に帰着させるため、時間非一様な場合も扱えるという利点がある。いずれにせよ定理 1 の結果はこれらの結果を示す際に使用されている。

References

[1] Albeverio, S., Kondratiev, Yu. G., Röckner, M., *Analysis and geometry on configuration space: the Gibbsian case*,, J. Funct. Anal. **157**, 242-291 (1998).

[2] Fukushima, M., *On boundary conditions for multi-dimensional Brownian motions with symmetric resolvent densities*,, J. Math. Soc. **21** (1969) 58-93.

[3] Honda, R., Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to Bessel random point fields*, arXiv:1405.0523 [math.PR] (preprint).

[4] Johansson, K.:Non-intersecting paths, random tilings and random matrices. Probab. Theory Relat. Fields **123**, 225-280 (2002).

[5] Johansson, K.:Discrete polynuclear growth and determinantal processes. Commun. Math. Phys. **242**, 277-329 (2003).

[6] Katori, M., Tanemura, H.: Noncolliding Brownian motion and determinantal processes. J. Stat. Phys. **129**, 1233-1277 (2007).

[7] Katori, M., Tanemura, H.: Zeros of Airy function and relaxation process,*J. Stat. Phys.* **136**, 1177–1204 (2009).

[8] Katori, M., Tanemura, H.: Markov property of determinantal processes with extended sine, Airy, and Bessel kernels. Markov processes and related fields **17**, 541–580 (2011).

[9] Kawamoto, Y., Osada, H.: Finite particle approximations of interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials. (in preparation)

[10] Kawamoto, Y., Osada, H.: Universality of Dyson's model in infinite dimensions and SDE gaps. (in preparation)

[11] Lang, R., *Unendlich-dimensionale Wienerprocesse mit Wechselwirkung I*, Z. Wahrschverw. Gebiete **38** (1977) 55-72.

[12] Lang, R., *Unendlich-dimensionale Wienerprocesse mit Wechselwirkung II*, Z. Wahrschverw. Gebiete **39** (1978) 277-299.

[13] Osada, H., *Dirichlet form approach to infinite-dimensional Wiener processes with singular interactions*,, Commun. Math. Phys. **176**, 117-131 (1996).

[14] Osada, H., *Tagged particle processes and their non-explosion criteria*, J. Math. Soc. Japan, **62**, No. **3** (2010), 867-894.

[15] Osada, H., *Infinite-dimensional stochastic differential equations related to random matrices*, Probability Theory and Related Fields, Vol **153**, (2012) pp 471-509.

[16] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials*, Annals of Probability, Vol **41**, (2013) pp 1-49.

[17] Osada, H., *Interacting Brownian motions in infinite dimensions with logarithmic interaction potentials II: Airy random point field*, Stochastic Processes and their Applications, Vol **123**, (2013) pp 813-838.

[18] Osada, H., *Ginibre interacting Brownian motions in infinite dimensions are subdiffusive*, (preprint/draft)

[19] Osada, H., Tanemura, H., *Cores of Dirichlet forms related to Random Matrix Theory*, Proc. Jpn. Acad., Ser. A, Vol. 90, 145-150 (2014).

[20] Osada, H., Tanemura, H. *Infinite-dimensional stochastic differential equations and tail σ-fields*, (preprint) arXiv:1412.8674 [math.PR]

[21] Osada, H., Tanemura, H. *Infinite-dimensional stochastic differential equations arising from Airy random point fields*, (preprint) arXiv:1408.0632 [math.PR].

[22] Osada, H., Tanemura, H. *Uniqueness of quasi-regular Dirichlet forms describing interacting Brownian motions in infinite dimensions*, (in preparation).

[23] Osada, H., Tanemura, H. *Strong Markov property of determinantal processes with extended kernels*, (preprint) arXiv:1412.8678 [math.PR].

[24] Tanemura, H., *A system of infinitely many mutually reflecting Brownian balls in $\mathbb{R}^d$*, Probab. Theory Relat. Fields **104** (1996) 399-426.

[25] Tanemura, H., *Uniqueness of Dirichlet forms associated with systems of infinitely many Brownian balls in $\mathbb{R}^d$*, Probab. Theory Relat. Fields **109** (1997) 275-299.

[26] Yoshida, M., *Construction of infinite-dimensional diffusion processes through Dirichlet forms,*, Probability Theory and Related Fields, **106**, 265-297 (1996).