数理解析研究所講究録
第 1953 巻 2015 年 40-45

完全正値インストゥルメントとコホモロジー論

名古屋大学情報科学研究科
岡村 和弥[1]

1 準備：von Neumann 代数

- von Neumann 代数 $\mathcal{M}$：ある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素の全体 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の *-部分代数[2] で超弱位相[3] で閉じているもの。同様に，C*-代数とは $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ のノルムで閉じた *-部分代数のことをいう。$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の部分集合 S に対し，S' で S の任意の元と可換な $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の元全体を表す。$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の *-部分代数 $\mathcal{M}$ が超弱位相で閉じていることと $\mathcal{M} = (\mathcal{M}')' =: \mathcal{M}''$ を満たすことは等価である。

- $\mathcal{M}, \mathcal{N}$：それぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}, \mathcal{K}$ 上の von Neumann 代数とする。

  1. (線型) 写像 $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ が超弱連続とは，任意のネット $\{M_\alpha\} \subset \mathcal{M}$ s.t. $M_\alpha \to^{uw} M$ に対して $T(M_\alpha) \to^{uw} T(M)$ を満たすもの。$\mathcal{M}$ の双対空間 $\mathcal{M}^*$ の元であって超弱連続であるものの全体を $\mathcal{M}_*$ で表す。$\mathcal{M}_*$ の任意の元 ω はある $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ s.t. $\sum_n \|x_n\|^2, \sum_n \|y_n\|^2 < \infty$ が存在して $\omega(M) = \sum_n \langle x_n | M y_n\rangle$, $M \in \mathcal{M}$ と表示可能であることが知られている。$\mathcal{M}_{*,+}$ を $\mathcal{M}_*$ の元 ω であって正値性 $\omega(M) \geq 0$, $\forall M \geq 0$ を満たすもの全体を表す。そして，$\mathcal{M}_{*,1}$ を $\mathcal{M}_{*,+}$ の元 ω であって規格化 $\omega(1) = 1$ されているもの全体を表す。

  2. 正値写像 $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ に対して次は等価：
     (A) $\mathcal{M}_+ = \{M \in \mathcal{M} \mid M \geq 0\}$ の任意の増大[4] ネット $\{M_\alpha\}$ s.t. 上限 M を持つ，すなわち，任意の α に対して $M_\alpha \geq M$ かつ $M = \sup_\alpha M_\alpha$ に対して，
     $$T(M) = \sup_\alpha T(M_\alpha). \tag{1}$$
     この条件を満たす正値写像を**正規 (normal)** という。
     (B) T は超弱連続。
     $\mathcal{M}_{*,1}$ の元を $\mathcal{M}$ 上の正規状態という。

  3. 写像 $T : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ が**完全正値 (completely positive, CP)** 写像であるとは，任意の $n \in \mathbb{N}$, $M_1, M_2, \cdots, M_n \in \mathcal{M}$, $N_1, N_2, \cdots, N_n \in \mathcal{N}$ に対して，
     $$\sum_{i,j=1}^n N_i^* T(M_i^* M_j) N_j \geq 0 \tag{2}$$
     が成り立つことを言う。

---

[1]連絡先 okamura@math.cm.is.nagoya-u.ac.jp

[2] *-代数とは代数であって，対合 $* : A \to A^*$ $((A^*)^* = A, (\alpha A + \beta B)^* = \overline{\alpha} A^* + \overline{\beta} B^*, (AB)^* = B^* A^*$ を満たす写像) で閉じているもの。*-部分代数とは *-代数の部分集合であってそれ自身 *-代数であるもの。

[3]「ネット $\{A_\alpha\} \subset \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ が $A \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に超弱収束する」とは，任意の $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ s.t. $\sum_n \|x_n\|^2, \sum_n \|y_n\|^2 < \infty$ に対して，$|\sum_n \langle x_n | (A_\alpha - A) y_n\rangle| \to 0$ が成立することをいう。これを $A_\alpha \to^{uw} A$ と表す。この収束により定まる位相を超弱位相という。

[4] $\alpha \leq \beta$ ならば $M_\alpha \leq M_\beta$ を満たすこと。

本稿に関連する作用素環論の詳細事項については[3, 5, 19, 20, 21, 22]を参照していただきたい。また，小嶋泉氏との共著[12]には量子論の代数的定式化について新しい観点からまとめられている。

2　量子測定とその歴史的経緯

量子測定とは，

物理：系の性質等を解析するために不可欠な物理過程であって，
特に量子系を対象とするもの

数学：代数的（非可換）確率空間と測度論的確率空間を結びつける基本的概念

と標語的に述べられる。また，歴史的経緯も理解の助けになると思われるので，簡単ではあるが本研究に特に関わる事項の紹介を以下で行っていく。

1932 年 J. von Neumannは著書“量子力学の数学的基礎”（みすず書房, 1957, [10]の翻訳）において
(*i*) 測定のモデル化（von Neumannモデル[5]），
(*ii*) 離散物理量 $A = \sum_j a_j E^A(\{a_j\})$ の測定の際，測定で出力 $\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ を得たときの正規状態（密度作用素）ρ の変化が

$$\rho \mapsto \frac{\sum_{a\in\Delta} E^A(\{a\})\rho E^A(\{a\})}{\mathrm{Tr}[\rho E^A(\Delta)]} = \frac{\sum_{a\in\mathbb{R}} E^A(\{a\})\rho E^A(\{a\}) \cdot E^A(\Delta)}{\mathrm{Tr}[\rho E^A(\Delta)]} \tag{3}$$

で与えられることを**反復可能性仮説 (repeatability hypothesis)** の下に導出した。ただし，von Neumannは A が非縮退であること，すなわち，任意の j に対し $\dim E^A(\{a_j\}) = 1$ を仮定していた。

1951 年 G. Lüders [8]はvon Neumannの(*ii*) (3)式で与えられる状態変化で仮定されていた A が非縮退であるという仮定を排除した。現在では離散物理量 A に対する測定による状態変化(3)式は**von Neumann-Lüdersの射影仮説 (projection postulate)** と呼ばれている。

1962 年 中村と梅垣[9]は写像 $\rho \mapsto \sum_{a\in\mathbb{R}} E^A(\{a\})\rho E^A(\{a\})$ （(3)式右辺の分子参照）が（梅垣により導入された）$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ から $\{A\}''$（A から生成されるvon Neumann代数）への条件付き期待値[6]であることを指摘し，連続スペクトルを持つ物理量の場合に

[5] [11, 7]においてFourier変換の観点から議論されている。

[6] ψ がvon Neumann代数 $\mathcal{M}$ 上の荷重 (weight) であるとは，写像 $\psi : \mathcal{M}_+ \to [0, +\infty]$ であって，$\psi(M_1 + M_2) = \psi(M_1) + \psi(M_2)$, $M_1, M_2 \in \mathcal{M}_+$ および $\psi(\lambda M) = \lambda\psi(M)$, $\lambda \geq 0$, $M \in \mathcal{M}_+$ を満たすもののことである。$\mathcal{M}$ 上の荷重 ψ は非零 $M \in \mathcal{M}_+$ に対し $\psi(M) \neq 0$ ならば忠実，任意の有界な増大ネット $\{M_\alpha\} \subset \mathcal{M}_+$ に対し $\sup_\alpha \psi(M_\alpha) = \psi(\sup_\alpha M_\alpha)$ ならば正規，$\mathfrak{p}_\psi = \{M \in \mathcal{M}_+ \mid \psi(M) < +\infty\}$ が $\mathcal{M}$ を生成するならば半有限 (semifinite) とそれぞれ呼ばれる。$\mathcal{M}$ 上の正規忠実半有限荷重 ψ と $\psi|_{\mathcal{N}}$ が半有限となる $\mathcal{M}$ の部分von Neumann代数 $\mathcal{N}$ に対し，次の3条件を満たす写像 $\mathcal{E} : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ を ψ に関する $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への条件付き期待値と呼ぶ：(*i*) $\|\mathcal{E}(M)\| \leq \|M\|$, $M \in \mathcal{M}$; (*ii*) $\mathcal{E}(N) = N$, $N \in \mathcal{N}$; (*iii*) $\psi = \psi \circ \mathcal{E}$. ψ に関する $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への条件付き期待値は存在すれば一意でしかも忠実であることが知られている。ψ に関する $\mathcal{M}$ から $\mathcal{N}$ への条件付き期待値の存在とモジュラー自己同型群に対する不変性 $\sigma_t^\psi(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$, $t \in \mathbb{R}$ は等価である。$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ をはじめとした半有限von Neumann代数の場合には通常トレースTrを規準荷重にとる。詳細は[21]参照。

も同様な条件付き期待値が存在すると予想した。この研究によりはじめて数学的議論が可能になった。

1967 年 しかし，W. Arveson [2] により，連続スペクトルを持つ場合にそのような条件付き期待値は存在しないと証明された。

1970 年 Arveson の結果を受けて，E.B. Davies と J.T. Lewis [4] が**インストゥルメント (instrument)** の概念を導入し，反復可能性仮説を前提としない測定の抽象的・一般的取扱いを可能にした。同時期に Helstrom, Holevo らによって POVM (positive operator-valued measure) が導入され，量子測定ひいては量子情報の基盤整備が進んだ。

1984 年 小澤 [14] により完全正値インストゥルメント (CP instrument) が導入され，量子力学的測定の完全な特徴づけがなされた。

$\mathcal{M}$ を可分 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とし，$(S,\mathcal{F})$ を可測空間とする。

- $\mathcal{M}$ 上の正規な完全正値線型写像の族 $\mathcal{I}=\{\mathcal{I}(\Delta)\}_{\Delta\in\mathcal{F}}$ は次の 2 条件を満たすとき $(\mathcal{M},S)$ に対する CP instrument と呼ばれる：
  (1) 互いに素な列 $\{\Delta_j\}\subset\mathcal{F}$，$\rho\in\mathcal{M}_*$ と $M\in\mathcal{M}$ に対し，
  $$\rho(\mathcal{I}(\cup_j\Delta_j)M)=\sum_j\rho(\mathcal{I}(\Delta_j)M). \tag{4}$$
  (2) $\mathcal{I}(S)1=1$。
  今後，$\mathcal{I}(\Delta)M$ を $\mathcal{I}(\Delta,M)$ とも表記する。
- $(\mathcal{M},S)$ に対する測定過程 $\mathbb{M}$ とは，
  1. Hilbert 空間 $\mathcal{K}$,
  2. $\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ 上の正規状態 σ,
  3. スペクトル測度 $E:\mathcal{F}\to\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$,
  4. $\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上のユニタリー作用素 U

  からなる 4 つ組 $\mathbb{M}=(\mathcal{K},\sigma,E,U)$ で次を満たすもののことを言う：
  $$\{\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(\Delta)M\mid M\in\mathcal{M},\Delta\in\mathcal{F}\}\text{ は }\mathcal{M}\text{ に含まれる。}$$
  ここで $\mathcal{I}_{\mathbb{M}}$ は $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),S)$ に対する CP instrument であり
  $$\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(\Delta)X=(id\otimes\sigma)[U^*(X\otimes E(\Delta))U],\quad X\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),\Delta\in\mathcal{F} \tag{5}$$
  で定義される。

この測定過程は von Neumann モデルの一般化として定義された。

定理 1. 次の一対一対応が存在する：
(i) $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),S)$ に対する測定過程 $\mathbb{M}=(\mathcal{K},\sigma,E,U)$ （の統計的同値類），
(ii) $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}),S)$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}$。
この対応は次式で与えられる：
$$\mathcal{I}(\Delta)X=(1\otimes\sigma)[U^*(X\otimes E(\Delta))U],\quad \Delta\in\mathcal{F},X\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}). \tag{6}$$

量子力学（正確には von Neumann 代数が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の場合）以外の一般の量子系（一般の von Neumann 代数）ではこの対応が成立するのか否か約 30 年間明らかになっていなかった。それを明らかにしたのが小澤正直氏との共同研究である今回の成果 [13] である。

量子測定理論とその先行研究に関するより詳細な議論は [17, 18] を参照して頂きたい。

3 今回の結果：一般の von Neumann 代数における測定の特徴付け

$\mathcal{M}$ を可分 Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とし[7]，$(S,\mathcal{F})$ を可測空間とする。

- 2 種類の作用素代数的テンソル積：$\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ をそれぞれ Hilbert 空間 $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ 上の von Neumann 代数とする。$\mathcal{M}\otimes_{\mathrm{alg}}\mathcal{N}$ で $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の代数的テンソル積を表す。$\mathcal{M}\otimes_{\mathrm{alg}}\mathcal{N}$ の $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ のノルムによる閉包を $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の **C*-テンソル積**[8] と呼び，$\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ と表す。また，$\mathcal{M}\otimes_{\mathrm{alg}}\mathcal{N}$ の $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}\otimes\mathcal{K})$ の超弱位相による閉包を $\mathcal{M}$ と $\mathcal{N}$ の **W*-テンソル積**と呼び，$\mathcal{M}\,\overline{\otimes}\,\mathcal{N}$ と表す。このとき，$\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}$ は $\mathcal{M}\,\overline{\otimes}\,\mathcal{N}$ の超弱稠密な C*-部分代数である。

- φ を $\mathcal{M}$ 上の忠実[9] な正規状態とする。$(\mathcal{M},S)$ に対する任意の完全正値インストゥルメント $\mathcal{I}$ に対し，

$$\mathcal{I}(\Delta)M=\Psi_{\mathcal{I}}(M\otimes\chi_{\Delta}),\quad M\in\mathcal{M},\Delta\in\mathcal{F} \tag{7}$$

  を満たす単位的完全正値写像 $\Psi_{\mathcal{I}}:\mathcal{M}\otimes L^{\infty}(S,\varphi\circ\mathcal{I})\to\mathcal{M}$ が一意に存在する。

- $(\mathcal{M},S)$ に対する完全正値インストゥルメント $\mathcal{I}$ が**正規拡張性質 (normal extension property, NEP)** をもつとは，正規な完全正値写像 $\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}}:\mathcal{M}\,\overline{\otimes}\,L^{\infty}(S,\varphi\circ\mathcal{I})\to\mathcal{M}$ で $\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}}|_{\mathcal{M}\otimes L^{\infty}(S,\varphi\circ\mathcal{I})}=\Psi_{\mathcal{I}}$ を満たすものが存在することである。

このとき，次の結果が成り立つ。

定理 2. $(\mathcal{M},S)$ に対する完全正値インストゥルメント $\mathcal{I}$ に対し，以下は同値である：
(1) $\mathcal{I}$ は *NEP* をもつ。
(2) $(\mathcal{M},S)$ に対する測定過程 $\mathbb{M}=(\mathcal{K},\sigma,E,U)$ で

$$\mathcal{I}(\Delta)X=(1\otimes\sigma)[U^{*}(X\otimes E(\Delta))U],\quad \Delta\in\mathcal{F},X\in\boldsymbol{B}(\mathcal{H}). \tag{8}$$

この結果から，一般の von Neumann 代数における定理 1 は次のような形になることが了解される：

---

[7]条件を緩めて，可分とは限らない Hilbert 空間上の σ-有限 von Neumann 代数でも以下の議論は成立する。

[8]C*-代数のテンソル積はテンソル積をつくる C* 代数の対に応じては無数に存在することが知られている。本稿で C*-テンソル積と呼んだのは Hilbert 空間上に忠実に表現された C*-代数に対して（圏論的な意味で）自然に定義される**極小テンソル積 (minimal tensor product)** である。他にも自然なテンソル積として**極大テンソル積 (maximal tensor product)** や，von Neumann 代数がからむ場合に正規テンソル積 (normal tensor product)，双正規テンソル積 (binormal tensor product) などがある。詳しくは [6] および [19] を参照。

[9]$A\geq 0$ が $\varphi(A)=0$ ならば $A=0$ となること。

定理 3 (定理 1 の一般化). 次の一対一対応が存在する：
(i) $(\mathcal{M}, S)$ に対する測定過程 $\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$（の統計的同値類），
(ii) 正規拡張性質 *(NEP)* をもつ $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}$。
この対応は次式で与えられる：

$$\mathcal{I}(\Delta)M = (1 \otimes \sigma)[U^*(M \otimes E(\Delta))U], \quad \Delta \in \mathcal{F}, M \in \mathcal{M}. \tag{9}$$

「NEP をもたない CP instrument は存在するか？」という問題は上の結果から自然に想起される問題である。以下 2 つは NEP をもたない CP instrument の例である：

例 1. m を $[0,1]$ 上の *Lebesgue* 測度とする。次式で定義される $(L^\infty([0,1],m),[0,1])$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}_m$：

$$\mathcal{I}_m(\Delta)f = \chi_\Delta f, \quad \Delta \in \mathcal{B}([0,1]), f \in L^\infty([0,1],m). \tag{10}$$

例 2. $\mathcal{N}$ を可分 *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の *AFD (approximately finite-dimensional)*[10] II_1 因子環，A を連続スペクトルをもつ $\mathcal{N}$ の自己共役元，そして，$\mathcal{E}$ を $\mathcal{N}$ から $\{A\}' \cap \mathcal{N}$ への条件付き期待値とする。次式で定義される $(\mathcal{N}, \mathbb{R})$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}_A$：

$$\mathcal{I}_A(\Delta)N = \mathcal{E}(N)E^A(\Delta), \quad N \in \mathcal{N}, \Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \tag{11}$$

von Neumann 代数によっては全ての CP instrument が NEP をもつ：

命題 1. 条件付き期待値 $\mathcal{E} : \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{M}$ が存在する *von Neumann* 代数 $\mathcal{M}$ において，$(\mathcal{M}, S)$ に対する任意の *CP instrument* は *NEP* をもつ。

問題の設定を緩め,「どのような von Neumann 代数ならば，CP instrument は NEP をもつ CP instrument で“近似”できるか？」という視点で眺めたとき，von Neumann 代数に関する次の性質が問題解決の鍵を握る：

- $\mathcal{M}$ が単射的（入射的，injective）であるとは，任意の C*-代数の対 $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ と完全正値写像 $T : \mathcal{X} \to \mathcal{M}$ に対し，完全正値写像 $\widetilde{T} : \mathcal{Y} \to \mathcal{M}$ で $\widetilde{T}|_\mathcal{X} = T$ となるものが存在するときをいう。

この単射性はコホモロジー論の概念であり，対象を C*-代数とし，射をその間の完全正値写像とする圏の単射的対象の定義に他ならない。単射的 von Neumann 代数は Connes の業績に代表される von Neumann 代数の構造理論で中心的役割を果たした。C. Anantharaman-Delaroche [1] の主結果を用いることで次の結果が得られる：

定理 4. 単射的 *von Neumann* 代数 $\mathcal{M}$ において，$(\mathcal{M}, S)$ に対する任意の *CP instrument* は *NEP* をもつ *CP instrument* で近似できる。

ここでいう近似可能とは，各 CP instrument $\mathcal{I}$ に対し，NEP をもつ CP instrument のネット $\{\mathcal{I}_\alpha\}$ で $\mathcal{I}_\alpha(\Delta)M \to^{uw} \mathcal{I}(\Delta)M$, $M \in \mathcal{M}$, $\Delta \in \mathcal{F}$ が成り立つものが存在することを意味する。

[13] では他にも事後状態の族 [15, 16] の存在と NEP の関係や，代数的場の量子論における局所測定を扱っており，先行研究で得られていた結果の適用範囲を大きく広げることに成功した。

[10] 有限次元 von Neumann 部分代数の包含に関する増大ネット $\{\mathcal{N}_\alpha\}$ により $\mathcal{N} = \overline{\cup_\alpha \mathcal{N}_\alpha}^{uw}$ と表せるとき，von Neumann 代数 $\mathcal{N}$ は AFD (approximately finite-dimensional) であるという。

参考文献

[1] C. Anantharaman-Delaroche, Pacific J. Math. **171**, (1995), 309-341.

[2] W. Arveson, Amer. J. Math. **89**, 578-642 (1967).

[3] O. Bratteli and D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics* (vol. 1), Springer-Verlag (1979).

[4] E.B. Davies and J.T. Lewis, Comm. Math. Phys. **17**, 239–260 (1970).

[5] J. Dixmier, *Von Neumann algebras*, (North-Holland, 1981).

[6] E.G. Effros and E.C. Lance, Adv. Math. **25** (1977), 1-34.

[7] R. Harada and I. Ojima, Open Sys. Inf. Dyn. **16**, 55-74 (2009).

[8] G. Lüders, Ann. Physik **8**, 322-328 (1951) [英訳あり].

[9] M. Nakamura and H. Umegaki, Math. Jpn. **7**, 151-157 (1962).

[10] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (Springer-Verlag, Berlin, 1932); *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1955).

[11] I. Ojima,"Micro-Macro Duality in Quantum Physics", pp.143-161 in Proc. Intern. Conf. on Stochastic Analysis, Classical and Quantum (World Scientific, 2005), arXiv:math-ph/0502038.

[12] 小嶋 泉, 岡村 和弥,『無限量子系の物理と数理』, サイエンス社, (2013).

[13] K. Okamura and M. Ozawa, arXiv:1501.00239.

[14] M. Ozawa, J. Math. Phys. **25**, 79-87 (1984).

[15] M. Ozawa, Publ. RIMS **21** (1985), 279-295.

[16] M. Ozawa, J. Math. Phys. **26**, 1948-1955 (1985).

[17] M. Ozawa, Ann. Phys.(N.Y.) **331**, 350-416 (2004).

[18] M. Ozawa, Sugaku Expositions **27**, 195-221 (2014), arXiv:1201.5334.

[19] V. Paulsen, *Completely bounded maps and operator algebras*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, (2002).

[20] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras I*, (Springer, 1979).

[21] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras II*, (Springer, 2002).

[22] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras III*, (Springer, 2002).