数理解析研究所講究録
第 1955 巻 2015 年 33-41

悪条件性に注目した近似GCDの見積もり
Estimation of the Degree of Approximate GCD in Ill-Condisioned Cases

讃岐 勝
MASARU SANUKI
筑波大学医学医療系 & 筑波大学附属病院総合臨床教育センター
FACULTY OF MEDICINE, UNIVERSITY OF TSUKUBA
&
CENTER FOR MEDICAL EDUCATION AND TRAINING, UNIVERSITY OF TSUKUBA HOSPITAL *

Abstract

本稿では，入力多項式の組が悪条件の場合（微小主係数の近似共通因子を持つ場合）にそれらが持つ近似 GCD の次数を見積もる方法を提案する．Bezout 行列を異なった方法で計算するとき，一方は数値的安定に構成可能，もう一方の方法では大きな計算誤差（桁落ち誤差）が発生するが，桁落ちが規則的に発生することを利用して次数を見積もる．ランク落ちなど数学的性質を利用するのではなく，数値的不安定といった有限精度で計算するために発生する誤差を利用する．

1 はじめに

本稿では，浮動小数係数全体の集合 $\mathbb{F}$ を係数に持つ多項式環を $\mathbb{F}[x]$ で表す．$\deg(f)$ を多項式 f の次数，$||f||$ を f の多項式ノルム（係数の絶対値の最大値）とする．GCD・近似 GCD（後述）を計算したい多項式 f と g は $n=\deg(f)>\deg(g)$ と仮定する（$\deg(f)=\deg(g)$ のときは，頭項消去を行いその結果を g と置き直す）．

近似 GCD は次で定義される．

定義 1 (近似 GCD)
入力多項式 f と $g\in\mathbb{F}[x]$ が $f=c\tilde{f}+\Delta_f$ と $g=c\tilde{g}+\Delta_g$ と多項式の積和で表現され，Δ_f と Δ_g がそれぞれ f と g に比べ小さいとする．このとき，c を f と g の近似共通因子と呼び，次数最大の c を近似 GCD と呼ぶ． ∎

多項式の係数は浮動小数係数で与えられ，摂動 Δ_f,Δ_g は 0 でなく実際に含まれる微小な項である．浮動小数 GCD[Schönhage85] ではなく近似 GCD であることを強調する．

近似 GCD の計算アルゴリズムは数多く提案されている．互除法 [SN89, SS07] および QR 法 [CWZ04] を基にする算法以外は，入力に近似 GCD の次数を必要とする．これらの算法を見ると，低い次数から徐々に次数を増やして良さそうなものを調べる方法 (rank-revealing)[YZ05]，特異値分解によって次数を定める方法 [Zen04a]，高速 LU 分解によって計算する方法 [BB07]，既に次数に関する情報が入手済みである方法，

*sanuki@md.tsukuba.ac.jp

に大きく分けられる．高速LU分解に基づく方法は近似GCDを計算する過程で次数を見積もるため実際には1つのアルゴリズムとみなすことができる．その他の方法については，算法の過程とは別に次数を決める必要がある．しかしながら，次数そのものを見積もる研究はあまりなく，Winkler-Lao[WL11]による方法など限られた研究があるが，ベースは特異値による方法であるため計算量が大きく，実際にGCDをしらみつぶしに計算してしまった方が良いなど実用的である次数の見積もる研究はほとんどされてない．

一方，近似GCDの悪条件性に関する研究もほとんどされていない．微小主係数の近似共通因子を持つときに問題が算法が不安定になることが知られており[CWZ04, SS07]，それぞれの著者は良条件にするための方法を提案している．また近似代数に限らず，悪条件の問題が現れたらそれを良条件化する方法を考えるのが通常であるが，悪条件の場合においては，決まった振る舞いで計算が不安定になることが多い．それ故，利用する価値はあると考える．

本稿では，悪条件性（不安定）に注目した高速に次数を見積もる方法を提案する．それゆえ，悪条件，すなわち，微小主係数をもつ近似共通因子という条件のもと議論をすすめる．Sylvester行列，Bezout行列，Bezout-Hankel行列は入力多項式から構成できる行列でありGCD計算のためよく利用される[DG02]．また，行列から別の行列への変換も知られており，多項式の性質を知るため利用される．しかし，この変換は数値的に安定しない場合があり，その性質を本稿では利用する．

2章では，利用するBezout行列とBezout-Hankel行列およびその間の関係式(A)について復習をする．3章では，微小主係数の近似共通因子を持つ場合の関係式(A)の振る舞いについて，いくつかの例を示し近似GCDの次数を見積もる方法を提案する．4章では，提案した次数を見積もる方法の計算量を簡単に見積もる．5章では，本稿をまとめる．

本稿で述べる方法はアイデアを述べているに過ぎず改良が必要であるが，整数係数の多項式のGCDについても適応可能である．

2 アイデア

最初に，多項式 $f(x)$ と $g(x)$ に関するBezout行列とBezout-Hankel行列を定義する．

定義 2 (Bezout 行列)
$f(x)$ と $g(x)$ から構成されるBezout行列 $\mathrm{Bmat}(f,g)$ は次で定義される．

$$\mathrm{Bmat}(f,g) = \begin{pmatrix} b_{0,0} & \cdots & b_{0,n-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1,0} & \cdots & b_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}. \tag{1}$$

ここで，(i,j) 要素 $b_{i-1,j-1}$ は多項式 $\dfrac{f(x)g(y)-f(y)g(x)}{x-y} = \sum_{0\le i,j\le n-1} b_{i,j}x^iy^j \in \mathbb{F}[x,y]$ の $x^{i-1}y^{j-1}$ 係数である．∎

特に，$\mathrm{Bmat}(f,1)$ は $f(x)$ の係数から構成される次の行列である．

$$\mathrm{Bmat}(f,1) = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_2 & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ \vdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ f_n & & & \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}. \tag{2}$$

定義 3 (Bezout-Hankel 行列)
$f(x)$ と $g(x)$ から構成される Bezout-Hankel 行列 $\mathrm{Han}(f,g)$ は次で定義される.

$$\mathrm{Han}(f,g) = \begin{pmatrix} h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ h_2 & \iddots & \iddots & h_{n+1} \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots \\ h_n & h_{n+1} & \dots & h_{2n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n\times n}, \tag{3}$$

ここで，各要素 h_i は $\frac{g}{f}$ を無限遠点上（$x=\infty$）で Taylor 展開したときの x^{-i} 次の係数である：

$$\frac{g(x)}{f(x)} = h_1x^{-1} + h_2x^{-2} + h_3x^{-3} + \dots.$$

∎

$\mathrm{Bmat}(f,g)$ は対称行列，$\mathrm{Bmat}(f,1)$ と $\mathrm{Han}(f,g)$ は Hankel 行列である：行列 $M=(m_{i,j})$ が $m_{i,j}=m_{i+1,j-1}$ をみたすとき，行列 M は Henkel 行列であるという.

Bezout 行列 $\mathrm{Bmat}(f,g)$ と Bezout-Hankel 行列 $\mathrm{Han}(f,g)$ の間に，次の関係式がある [HF89].

$$\mathrm{Bmat}(f,g) = \mathrm{Bmat}(f,1)\mathrm{Han}(f,g)\mathrm{Bmat}(f,1). \tag{4}$$

ここで，各行列を生成する際に桁落ち誤差が生じないことを保証する必要があり，次が成り立つ.

補題 4 (Bezout 行列の生成：)
微小主係数な近似共通因子を持つ $f(x)$ と $g(x)$ が与えられた時，*Bezout* 行列 $\mathrm{Bmat}(f,g)$ の構成において，桁落ち誤差は発生しない. ∎

補題 5 (Bezout-Hankel 行列の生成)
微小主係数な近似共通因子を持つ $f(x)$ と $g(x)$ が与えられた時，*Bezout-Hankel* 行列 $\mathrm{Han}(f,g)$ の構成において，桁落ち誤差は発生しない. ∎

3 微小主係数の近似共通因子を持つ場合の振る舞い

$\mathrm{Bmat}(f,g) = \mathrm{Bmat}(f,1)\mathrm{Han}(f,g)\mathrm{Bmat}(f,1)$ において，悪条件の場合にどうようような振る舞いをするか例を 2 つあげる．例 1 では良条件の場合，例 2 では悪条件，すなわち微小主係数の近似共通因子を持つ場合の振る舞いについてである.

例 1 (近似共通因子の主係数が小さくない)
f と g は次で与える.

$$\begin{aligned} f(x) &= (3x^3+x^2-x+1)(x^4+3x^2-3x+4)+0.001x^5-0.00001x^3-0.0004, \\ g(x) &= (3x^3+x^2-x+1)(x^3-3x^2-3x+4)+0.001x^4+0.00001x^2. \end{aligned}$$

次の行列は $\mathrm{Bmat}(f,g)$ と $\mathrm{Bmat}(f,1)\mathrm{Han}(f,g)\mathrm{Bmat}(f,1)$ をそれぞれ計算後に差を計算した結果である．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Bmat}(f,g)-\mathrm{Bmat}(f,1)\mathrm{Han}(f,g)\mathrm{Bmat}(f,1)\\
&=\left(\begin{array}{ccc|cccc}
2\times10^{-7} & 1\times10^{-6} & 2\times10^{-6} & -8\times10^{-7} & 4\times10^{-8} & 1\times10^{-7} & 1\times10^{-7}\\
1\times10^{-6} & 2\times10^{-6} & -6\times10^{-7} & -1\times10^{-7} & 9\times10^{-7} & 1\times10^{-7} & 9\times10^{-8}\\
2\times10^{-6} & -6\times10^{-7} & -1\times10^{-7} & 9\times10^{-7} & 1\times10^{-7} & 9\times10^{-7} & -2\times10^{-8}\\
\hline
-8\times10^{-7} & -1\times10^{-7} & 9\times10^{-7} & 1\times10^{-7} & 9\times10^{-8} & -2\times10^{-9} & 1\times10^{-14}\\
4\times10^{-8} & 9\times10^{-7} & 1\times10^{-7} & 9\times10^{-8} & 2\times10^{-9} & 0.0 & 0.0\\
1\times10^{-7} & 1\times10^{-7} & 9\times10^{-7} & -2\times10^{-9} & 7\times10^{-15} & 0.0 & 0.0\\
1\times10^{-7} & 9\times10^{-8} & -2\times10^{-8} & 1\times10^{-14} & 0.0 & 0.0 & 0.0
\end{array}\right).
\end{aligned}
$$

差を見ると，各要素のノルムの大きさは $O(10^{-6})$ と入力多項式と同程度であり，計算は精度よく行われていることがわかる．

例 2 (近似共通因子の主係数が小さい)
f と g を次で与える．

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (0.01x^3+x^2-x+1)(x^4+3x^2-3x+4)+0.001x^5-0.00001x^3-0.0004,\\
g(x) &= (0.01x^3+x^2-x+1)(x^3-3x^2-3x+4)+0.001x^4+0.00001x^2.
\end{aligned}
$$

次の行列は $\mathrm{Bmat}(f,g)$ と $\mathrm{Bmat}(f,1)\mathrm{Han}(f,g)\mathrm{Bmat}(f,1)$ をそれぞれ計算後に差を計算した結果である．

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{Bmat}(f,g)-\mathrm{Bmat}(f,1)\mathrm{Han}(f,g)\mathrm{Bmat}(f,1)\\
&=\left(\begin{array}{ccc|cccc}
678 & 78 & 0.69 & 9\times10^{-4} & -6\times10^{-5} & -5\times10^{-7} & -5\times10^{-15}\\
78 & 0.69 & 9\times10^{-4} & -5\times10^{-7} & -5\times10^{-7} & 4\times10^{-15} & 0.0\\
0.69 & 9\times10^{-4} & -6\times10^{5} & -5\times10^{-7} & -1\times10^{-14} & 4\times10^{-16} & 7\times10^{-18}\\
\hline
9\times10^{-4} & -6\times10^{5} & -5\times10^{-7} & 7\times10^{-15} & -2\times10^{-15} & 0.0 & 0.0\\
-6\times10^{5} & -5\times10^{-7} & -7\times10^{-15} & 0.0 & -2\times10^{-16} & 0.0 & 0.0\\
-5\times10^{-7} & -9\times10^{-16} & -9\times10^{-16} & 2\times10^{-16} & 0.0 & 0.0 & 0.0\\
-8\times10^{-15} & 0.0 & 7\times10^{-18} & 0.0 & 7\times10^{-18} & 0.0 & 0.0
\end{array}\right).
\end{aligned}
$$

(1,1), (1,2) ,(1,3), (2,1), (2,2), (3,1) 要素にて，大きな桁落ちが起きた．上部分 3×3 行列の上三角行列部のみ桁落ちがおきた．部分行列のサイズは近似 *GCD* の次数 $k=3$ に一致している．

例 2 においてなぜ大きな桁落ちが起きたか考える．まず，$\tilde{g}/\tilde{f}$ と $(c\tilde{g})/(c\tilde{f})$ の無限遠点上での Taylor 展開は同じであることに注意する．

入力多項式から Bezout 行列 $\mathrm{Bmat}(f,g)$ が桁落ちなく生成できることを補題 4 で指摘した．このため，注目するのは $\mathrm{Bmat}(f,1)\mathrm{Han}(f,g)\mathrm{Bmat}(f,g)$ であり，積を計算する前の各行列は精度よく生成される．

$\frac{g}{f}$ は無限遠点上で次のようにべき級数展開される．

$$
\begin{aligned}
\frac{c(x)\tilde{g}(x)+\Delta_g}{c(x)\tilde{f}(x)+\Delta_f} &= \frac{c(x)\tilde{g}(x)+\Delta_g}{c(x)\tilde{f}(x)\left(1+\dfrac{\Delta_f}{c(x)\tilde{f}(x)}\right)}\\
&= \frac{\tilde{g}(x)}{\tilde{f}(x)}-\frac{\tilde{g}(x)\cdot\Delta_f}{c(x)\tilde{f}(x)^2}+\frac{\Delta_g}{c(x)\tilde{f}(x)}+\cdots. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

ここで，

$$\begin{aligned}\frac{g(x)}{f(x)} &= \frac{g_{n-1}}{f_n x^1} + \dots,\\ \frac{1}{c(x)} &= \frac{1}{c_k x^k} - \frac{c_{k-1}}{{c_k}^2 x^{k+1}} + \frac{-c_k c_{k-2} + {c_{k-1}}^2}{{c_k}^3 x^{k+2}} + \dots.\end{aligned}$$

より，$|c_k|$ が小さい時，g/f と $\tilde{g}/\tilde{f}$ の無限遠点上でのべき級数展開において $1/x^{k+1}, 1/x^{k+2}, \dots$ の係数の大きさは大きく異なり，$\gamma = |c_k|$ を用いて次のように見積もることができる．

命題 6
$\gamma = |c_k| \ll 1$ とする．$\tilde{g}/\tilde{f}$ の無限遠点上でのべき級数展開を $\tilde{h_1} x^{-1} + \tilde{h_2} x^2 + \dots$ と表すとき，

$$|\tilde{h}_i|/|h_i| = \begin{cases} O(1) & (1 \le i \le k),\\ O(\frac{1}{\gamma^{i-k}}) & (k < i \le n+k),\\ O(\frac{1}{\gamma^k}) & (i > n+k).\end{cases}$$

∎

命題 6 より，Bezout-Hankel 行列の各要素の大きさは次のように見積もることができる．

補題 7 (Order-estimate Bezout-Hankel matrix in small-leading coefficient GCD case)
$\gamma = |c_k| \ll 1$ とする．このとき，*Bezout-Hankel* 行列は γ によって次のように評価できる．

$$\mathrm{Han}(f,g) \propto \left(\begin{array}{ccc|cccc} O(1) & \cdots & O(1) & O(1/\gamma) & \cdots & \cdots & O(1/\gamma^{n-k-1}) \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ O(1) & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \hline O(1/\gamma) & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & O(1/\gamma^n) \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ O(1/\gamma^{n-k-1}) & \cdots & \cdots & O(1/\gamma^n) & O(1/\gamma^n) & \cdots & O(1/\gamma^n) \end{array}\right). \tag{6}$$

ここで，上記行列は k 次で仕切られている． ∎

一方，$\gamma = |c_k| \ll 1$ のとき Bezout 行列 $\mathrm{Bmat}(f,g)$ の各要素は次のように評価できる。

$$\mathrm{Bmat}(f,g) \propto \left(\begin{array}{ccc||c} O(1) & \cdots & O(1) & O(\gamma) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ O(1) & \cdots & O(1) & O(\gamma) \\ \hline\hline O(\gamma) & \cdots & O(\gamma) & O(\gamma^2) \end{array}\right). \tag{7}$$

それゆえ，$\mathrm{Bmat}(f,1)\mathrm{Han}(f,g)\mathrm{Bmat}(f,1)$ の桁落ち量は次のように見積もることができる．

$\mathrm{Bmat}(f,1)\mathrm{Han}(f,g)\mathrm{Bmat}(f,1)$ において，(i,j) 要素は次の式であわらされる．

$$\sum_p \sum_q b_{i,p}^{(f)} \cdot h_{p,q} \cdot b_{q,j}^{(f)} \tag{8}$$

ここで，$b_{i,p}^{(f)}$ は $\mathrm{Bmat}(g,1)$ の (i,p) 要素，$h_{p,q}$ は $\mathrm{Han}(f,g)$ の (p,q) 要素であり，$h_{p,q} = h_{f+g-1}$ を満たす．

$p > n-i$ のとき $b_{i,p}^{(f)} = 0$，$q > n-j$ のとき $b_{q,j}^{(f)} = 0$ である $\mathrm{Bmat}(f,1)\mathrm{Han}(f,g)\mathrm{Bmat}(f,1)$ において，(i,j) 要素は

$$\sum_{p \le n-i} \sum_{q \le n-j} b_{i,p}^{(f)} \cdot h_{p+q-1} \cdot b_{q,j}^{(f)} \tag{9}$$

- $i > k$ または $j < k$ のとき：
  計算で必要となる $h_{p,q}$ は $p+q-1 \le k$ である．この範囲内で各要素は $O(1)$ である．ゆえに，γ に依存する桁落ち誤差は発生しない．
- $i+j-1 > k$ のとき：
  上記と同様の理由で γ に依存する桁落ち誤差は発生しない．
- $i+j-1 \le k$ のとき：
  このとき，計算で必要となる $h_{p,q}$ は $p+q-1 > k$ となる場合が発生し，大きな桁落ちが発生する．

桁落ち量は要素によって異なり，桁落ちの発生する要素の場所は近似 GCD の次数 k に依存する．

Amount of Cancellation error of $\mathrm{Bmat}(f,1)\mathrm{Han}(f,g)\mathrm{Bmat}(f,1)$

$$\propto \left(\begin{array}{ccc|cc} O(1/\gamma^{k-1}) & \cdots & O(1/\gamma^0) & 0 & \cdots \\ \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \cdots \\ O(1/\gamma^0) & \iddots & \iddots & 0 & \cdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}\right).$$

次数は次の方法によって見積もることができる．

アルゴリズム 1 (近似 GCD の次数の見積り)

```
Input   :  f(x) and g(x) in F[x]
Output  :  The degree of approximate GCD of f and g
           % Construct Bezout matrix directly
              B1 = Bmat(f, g);
           % Construct Bezout matrix by multiplications
              B2 = Bmat(f, 1)Han(f, g)Bmat(f, 1);
           % Compare B1 with B2
             S = B1 - B2;
           % Check the degree
           If there is bigger element in S, then there is the approximate GCD;
              % Estimate the degree
              if
           Else return 1;
```

ただし，提案した方法は「共通因子の微小主係数」飲みにしか注目していない．そのため，いくつかのケースではうまく行かない場合がある．次はその一例である．

例 3 (あまりうまくいなない例：近似 GCD の第 2 主係数が 0)
f と g を次で与える．

$$\begin{aligned} f(x) &= (0.01x^4 + 0x^3 - x^2 - x + 1)(x^4 + 3x^2 - 3x + 4) + 0.001x^5 - 0.00001x^3 - 0.0004, \\ g(x) &= (0.01x^4 + 0x^3 - x^2 - x + 1)(x^3 - 3x^2 - 3x + 4) + 0.001x^4 + 0.00001x^2. \end{aligned}$$

本例は，このとき g/f の無限遠点上での *Taylor* 展開を行なっても係数は膨張しない．膨張しない原因の 1 つとして，近似共通因子の第 *2* 主係数は 0 であることが原因である．

このため，第 2 主係数が 0 であるか否かを簡単に判定できる必要がある．多くの場合，次の方法によって判定が可能である．

補題 8 (近似共通因子の第 2 主係数の微小であるかの判定法)
Bezout 行列 $\mathrm{Bmat}(f,g)$ の $(n-1,n)$ 要素 $b_{n-2,n}$ が小さい時第 *2* 主係数の微小である：

$$b_{n-2,n} \ll b_{i,n} \text{ for } i \leq n-2.$$

∎

4 計算量の見積り

重要となるのは計算量である．計算量が $O(n^2)$ 以上であれば実際に計算してしまったほうが良い．提案した方法では次の計算を行い，それぞれ計算量は次の通りである．

1. Bezout 行列の作成
   f と g の積によって行列の要素は計算される，すなわち，計算量は n 次の多項式同士の積と同じである：$M(n)$.
2. Bezout-Hankel 行列の作成
   $1/f$ の無限遠点上のべき級数と，この結果と g の積によって行列の要素は計算される．$1/f$ の n 項までの計算は $O(n)$ で計算できる．それ故，全体は $M(n)$ で計算できる．
3. 行列積 $\mathrm{Bmat}(f,1)\mathrm{Han}(f,g)\mathrm{Bmat}(f,1)$
   Hankel 行列とベクトルの積は $O(n\log n)$ の計算量で計算できる [GL89]．故に，$\mathrm{Han}(f,g)\mathrm{Bmat}(f,1)$ は $O(n^2\log n)$ の計算量で計算でき，全体は $O(2n^2\log n)$ の計算量で計算できる．
4. 行列同士の差の計算
   n^2 の要素があるので，n^2 回の減算（加算）を行う：$S(n^2)$.

ここで，例より行列全てについて，計算を行う必要はなく，1 行目または 1 列目だけが計算できれば，次数の判定はできる．このため，計算量は次のように改善される．

- 行列積の計算：$O(n\log n)$

故に，次が言える．

命題 9 (計算量：次数判定)
アルゴリズム *1* の計算量は，

$$2M(n) + O(n\log n) + S(n). \tag{10}$$

注意 1
Half-GCD 法とそれほど計算量は変わらないが，提案したアルゴリズムはすべて浮動小数演算で実行される．そのため，計算量以上にアルゴリズム自身は高速である．

5 まとめ

例で示した通り，算法自身は荒削りなこともあり不安定であるが，改良による精度の向上が必要である．
また，次数を求めることよりも互いに素であるかの判定方法に算法を改良することも 1 つの方法である．桁落ちが発生したら共通因子を持つ，すなわち互いに素ではないことが言える．互いに素であるときは絶対に桁落ちが起きないので，安定性も期待できる．許容度に関する影響を受けないので，近似 GCD における互いに素判定には利用できないが [BL98a, BL98b]，整数係数の場合の高速判定への応用が考えられる．提案した方法の計算量は Half-GCD 方と変わらないが，浮動小数演算ですべて実行可能なため，実際に行う前のテストとして利用可能と期待できる．

参考文献

[Barnett70] S. Barnett. *Greatest common divisor of two polynomials.* Linear Algebra Appl., **3**, 1970, 7–9.

[Barnett71] S. Barnett. *Greatest common divisor of several polynomials.* Proc. Camb. Phil. Soc., **70**, 1971, 263–268.

[BB07] D. Bini and P. Boito, *Structured matrix-based methods for polynomial ϵ-gcd: analysis and comparisons*, Proc. of ISSAC'07, ACM Press, 2007, 9–16.

[BL98a] B. Beckermann and G. Labahn, *When are two numerical polynomials relatively prime?*, J. Symb. Comput., **26** (1998), 677–689.

[BL98b] B. Beckermann and G. Labahn, *A fast and numerically stable Euclidean-like algorithm for detecting relatively prime numerical polynomials*, J. Symb. Comput., **26** (1998), 691–714.

[BP94] D. Bini and V.Pan, *Polynomial and Matrix Computations*, Birkhäuser, 1994.

[CGTW95] R. Corless, P. Gianni, B. Trager and S. Watt, *The singular value decomposition for polynomial systems*, Proc. of ISSAC'95, ACM Press, 1995, 195–207.

[CWZ04] R. Corless, S. Watt and L. Zhi, *QR factoring to compute the GCD of univariate approximate polynomials*, IEEE Trans. Signal Proces., **52(12)** (2004), 3394–3402.

[CZG02] E.-W. Chionh, M. Zhang and R. N. Goldman. *Fast computation of the Bezout and Dixon resultant matrices.* J. Symb. Compu., **33**(2002), 13–20.

[DG02] G. M. Diaz-Toca and L. Gonzalez-Vega. *Barnett's theorems about the greatest common divisor of several univariate polynomials though Bezout-like matrices. J. Symb. Compu.*, **34**, (2002), 59–81.

[GL89] G. H. Golub and C. F. Van Loan, *Matrix computations*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, Maryland, 1989.

[HF89] U. Helmke and P. A Fuhrmann. Bezoutians. Linear Algebra Appl., **122/123/124**, 1989, 1039-—1097.

[Schönhage85] A. Schönhage. Quasi-GCD. *J. Complexity*, **1**, 1985, 118–147.

[SN89] T. Sasaki and M-T. Noda, *Approximate square-free decomposition and root-finding of ill-conditioned algebraic equations*, J. Inform. Proces., **12** (1989), 159–168.

[SS07] M. Sanuki and T. Sasaki, *Computing approximate GCDs in ill-conditioned cases*, Proc. of SNC 2007, 2007, 170–179.

[WL11] J. R. Winkler and X. Lao, *The calculation of the degree of an approximate greatest common divisor of two polynomials*, J. of Comp. and Appl. Math., **235(6)**, 2011, 1587–1603.

[YZ05] T. Y. Li and Z. Zeng, *A rank-revealing method with updating, downdating, and applications*, SIAM J. Matrix Anal. Appl., **26** (2005), no. 4, 918–946.

[Zen04a] Z. Zeng, *The approximate GCD of inexact polynomials part I: a univariate algorithm*, to appear, 2004.

[Zhi03] L. Zhi, *Displacement structure in computing the approximate GCD of univariate polynomials*, Proc. of ASCM2003, World Scientific, 2003, 288–298.

[ZMF00] C. J. Zarowski, X. Ma and F. W. Fairman, *QR-factorization method for computing the greatest common divisor of polynomials with inexact coefficients*, IEEE Trans. Signal Proces., **48(11)** (2000), 3042–3051.