数理解析研究所講究録
第 1955 巻 2015 年 81-90

数式処理システムと組み合せゲーム論
Computer Algebra System and Combinatorial Game Theory

福井昌則
MASANORI FUKUI
関西学院高等部, EM Software
KWANSEI GAKUIN SENIOR HIGH SCHOOL, EM SOFTWARE *

宮寺良平
RYOHEI MIYADERA
関西学院高等部
KWANSEI GAKUIN SENIOR HIGH SCHOOL †

Abstract

私達は，数式処理システムである Mathematica, TI-NSpire CX CAS を用いて，高校生と数学研究を行なっている．その研究において，いくつかのテーマを取り扱っているが，その中で，現在最も注力しているチョコレートゲームについて述べる．チョコレートゲームは石取りゲームと同じ数学的構造を持つゲームであり，よく知られた組み合せゲームの問題である．本講究録では，チョコレートゲームについての説明，そのゲームを研究にするために必要な Grundy 数の説明，数式処理システムの活用，そして現在研究しているチョコレートゲームの証明の概要について述べる．

1 チョコレートゲームについて

チョコレートゲームとは, 石取りゲームと同じ数学的構造を持つゲームであり，よく知られている組み合せゲームの一つである．図 1 のような板状のチョコレートに，一箇所だけ苦くて食べられない部分 (黒色) があり，他の部分は甘くて美味しいチョコレート (灰色) から出来ている．線に沿って, 縦もしくは横一直線にチョコレートをカットして相手に渡す．そして, 苦いチョコレート「だけ」を残された方が負け (言い換えると「だけ」を残して相手に渡せば勝ち) となり，勝ちと負けの二通りしかないシンプルなゲームである．縦もしくは横一直線にチョコレートをカットしなければならず，直角を含むような線分でカットすることは出来ないことに注意されたい．

チョコレートの座標を図 2 のように定義し，必勝法を解析することがこのチョコレートゲームの目的である．私達は座標間に不等式の関係を導入し，不等式を満たすチョコレートゲームを発見した．不等式を満たすチョコレートゲーム (例えば，ここでは $y \leq \lfloor z/2 \rfloor$) は，図 3 のような形をしており，図 4 のように座標を定義する．

*masanori.dev@gmail.com
†runners@kwansei.ac.jp

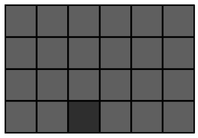

図 1: チョコレートゲーム

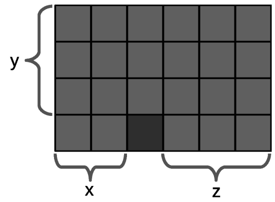

図 2: チョコレートゲームにおける座標の定義

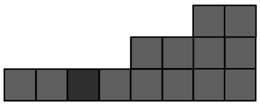

図 3: 不等式を満たすチョコレートゲーム

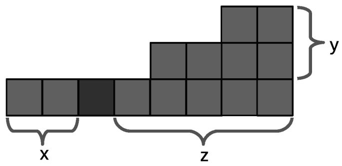

図 4: 不等式を満たすチョコレートゲームにおける座標の定義

ここで，x と y のニム和を以下のように定義する．

定義 1 (ニム和)
x と y をそれぞれ 2 進数で $x = \sum_{i=0}^{n} x_i 2^i, y = \sum_{i=0}^{n} y_i 2^i, x_i, y_i \in \{0,1\}$ と表すと，

$$x \oplus y = \sum_{i=0}^{n} w_i 2^i$$

ここで，$w_i = x_i + y_i (mod\ 2)$ である．

次に，必勝法を解析するために，Grundy 数という概念を用いる．Grundy 数とは，Sprague，Grundy らによって独立に導入された，組み合わせゲームの必勝法解析に用いることが出来る理論である．Grundy 数算出のために move 関数，mex 関数という概念を導入する必要がある．以下，図 1 や図 3 のチョコレートのように $\{x, y, z\}$ の 3 座標ではなく，$\{y, z\}$ の 2 座標を用いて定義などを行っていく．

定義 2 (move 関数)
move 関数とは，与えられた状態から一手で移動出来る全ての状態を列挙する関数であり，現在の座標を $\{y, z\}$ とすると，以下のように表記することが出来る．
$move(\{y, z\}) = \{\{u, v\}; 0 \leq u < y, 0 \leq v < z\}$

定義 3 (mex 関数)
mex(minimum excluded value) 関数とは，非負整数からなる集合 S に含まれていない数字の中で，最も小さい非負整数を出力する関数である．

例 1
$mex\{0,1,2,3\} = 4, mex\{1,2,3,5\} = 0, mex\{0,2,3,4\} = 1.$

定義 4 (Grundy 数)
Grundy 数とは，与えられた状態から一手で移動出来る全ての状態における *Grundy* 数からなる集合に含まれていない最小の非負整数であり，現在の座標を $\{y, z\}$ とすると，以下のように表記することが出来る．
$G(\{y, z\}) = mex\{G(\{u, v\}); \{u, v\} \in move(\{y, z\})\}$

ここで一般的に，Grundy 数が 0 の状態からは，Grundy 数が正の状態にしか移動することが出来ず，Grundy 数が正の状態からは，Grundy 数が 0 の状態に移動することが出来るということが言える．換言すると，Grundy 数が 0 の状態から出発すると，相手がうまくプレイすれば負けとなり，Grundy 数が正の状態から出発すると，自分がうまくプレイすれば勝ちとなる．ここで帰結類について説明を行う．帰結類とは，ゲームの状態を表す概念であり，以下のように定義される．

定義 5 (帰結類)
(a) 先手である自分がうまくプレイすれば，後手がどのような戦略をとっても必ず勝てる．この状態を先手必勝 *(N-Position)* と呼ぶ．
(b) 先手である自分がどのような戦略をとっても，後手がうまくプレイすれば必ず負けてしまう．この状態を後手必勝 *(P-Position)* と呼ぶ．

よって，Grundy 数が正の状態から開始したとき，先手である自分がうまくプレイすれば必ず勝てるのは，先手必勝 (N-Position) となり，Grundy 数が 0 の状態から開始したとき，後手である相手がうまくプレイすれば必ず負けてしまうので，この状態は後手必勝 (P-Position) となる．ここでゲームを 2 つの状態にわけたとき，Grundy 数に関して以下の関係が成立する．

定理 6 (Grundy 数の性質 (直和))
G，H が不偏ゲームだとすると，以下の性質を満たす．

$G(G+H) = G(G) \oplus G(H)$

ここで，$\oplus$ は排他的論理和を表す．

このように分けることにより，ゲームの必勝法解析も分けて考えることが可能となる．この定理の証明については [5] をご覧いただきたい．

2　数式処理システムの活用

著者達は数式処理システムを最大活用して研究を行っている．本章では，数式処理システムで Grundy 数を算出する方法について述べる．

2.1　Mathematica による Grundy 数の計算

筆者達は，数式処理システム Mathematica を最大限活用して研究を行っている．Mathematica は組み込み関数が充実しており，表やグラフの出力も容易に行うことが出来る．今回の研究では Grundy 数を表にして出力する必要があることから，Mathematica を用いることは大変有効である．ソースコードは付録 A の図 8 に掲載している．そのソースコードを改良することにより，さらに違うチョコレートゲームにおける Grundy 数も計算することが出来る．図 5 は Mathematica による Grundy 数の計算結果である．

2.2　TI-BASIC による Grundy 数の計算

TI-BASIC は，texas instruments 社製の TI-Nspire CX CAS などで動く言語であり，グラフ電卓とも呼ばれている．今回，グラフ電卓上で動く Grundy 数算出プログラムを作成した．最初は生徒との研究目的で作成したが，グラフ電卓があればどこでも計算することが出来るので，研究に用いることが増えた．ソースコードを付録 B に掲載している．そのソースコードを改良することにより，座標間に不等式の関係を導入

することが出来る．図 6 はグラフ電卓で計算した Grundy 数の出力例，図 7 はグラフ電卓で TI-BASIC を入力する画面の様子である．

Out[22]=

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0										
1	1										
2	2										
3	3	4									
4	4	3									
5	5	6									
6	6	5	7								
7	7	8	5								
8	8	7	9								
9	9	10	8	11							
10	10	9	11	8							
11	11	12	10	13							
12	12	11	13	10	14						
13	13	14	12	15	10						
14	14	13	15	12	16						
15	15	16	14	17	12	18					
16	16	15	17	14	18	12					
17	17	18	16	19	15	20					
18	18	17	19	16	20	15	21				
19	19	20	18	21	17	22	15				
20	20	19	21	18	22	17	23				
21	21	22	20	23	19	24	17	25			
22	22	21	23	20	24	19	25	17			
23	23	24	22	25	21	26	19	27			
24	24	23	25	22	26	21	27	19	28		
25	25	26	24	27	23	28	22	29	19		
26	26	25	27	24	28	23	29	22	30		
27	27	28	26	29	25	30	24	31	22	32	
28	28	27	29	26	30	25	31	24	32	22	
29	29	30	28	31	27	32	26	33	24	34	
30	30	29	31	28	32	27	33	26	34	24	35

図 5: Mathematica による出力結果

テキスト

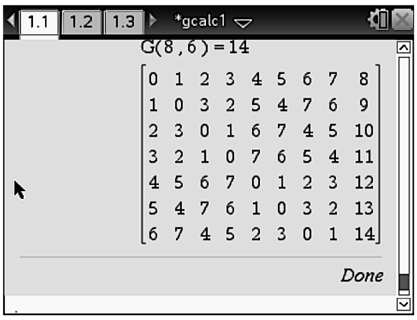

図 6: グラフ電卓での計算結果

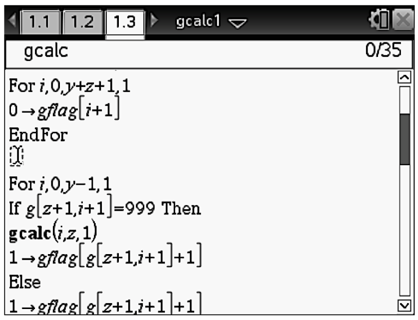

図 7: グラフ電卓でのプログラミングの様子

3　k が奇数である場合に不等式 $f(t) = \lfloor \frac{t}{k} \rfloor$ を満たすチョコレートゲーム

著者達は，次の予想 6 を見つけることができたが，証明は出来ていない．ここでは $k = 3$ の場合について証明の一部を掲載する．完全な証明を付けるとすると，相当な長さになり，A4 のページ数として 30 ページを越えることが予想される．今採用している証明方法では，k の数が増えるに従って増えていき，$k = 5$

では更に倍以上になると予想される．何か全く違った方法を見つける必要がある．

予想 6
奇数kに対して$f(t)=\lfloor \frac{t}{k} \rfloor$とする．このとき，チョコレート$CB(f,y,z)$のGrundy数$G(\{y,z\})$は$p,q\in Z_{\geq 0}$に対して，次の式を満たす．

$$G(\{2p,2q\})=p+2q \tag{1}$$
$$G(\{2p+1,2q+1\})=p+2q+2 \tag{2}$$

$G(\{2p,2q+1\})$

$$=\begin{cases} -p+2q+1 & (2p\times(k+1)\leq 2q) \quad (3)\\ -2p+2q+1+\lfloor \frac{-2p+2q+1}{2k} \rfloor & (2p\times(k+1)>2q) \quad (4)\end{cases}$$

$G(\{2p+1,2q\})$

$$=\begin{cases} -p+2q-1 & ((2p+1)\times(k+1)\leq 2q) \quad (5)\\ -2p+2q-1+\lfloor \frac{-2p+2q-1}{2k} \rfloor & ((2p+1)\times(k+1)>2q) \quad (6)\end{cases}$$

以下，$k=3$としたときの証明の一部を掲載する．

予想 7
$f(t)=\lfloor \frac{t}{3} \rfloor$とする．このとき，チョコレート$CB(f,y,z)$のGrundy数$G(\{y,z\})$は，$p,q\in Z_{\geq 0}$に対して，次の式を満たす．

$$G(2p,2q)=p+2q \tag{7}$$
$$G(2p+1,2q+1)=p+2q+2 \tag{8}$$

$G(\{2p,2q+1\})$

$$=\begin{cases} -p+2q+1 & (2p\times 4\leq 2q) \quad (9)\\ -2p+2q+1+\lfloor \frac{-2p+2q+1}{6} \rfloor & (2p\times 4>2q) \quad (10)\end{cases}$$

$G(\{2p+1,2q\})$

$$=\begin{cases} -p+2q-1 & ((2p+1)\times 4\leq 2q) \quad (11)\\ -2p+2q-1+\lfloor \frac{-2p+2q-1}{6} \rfloor & ((2p+1)\times 4>2q) \quad (12)\end{cases}$$

証明
[1]
(9) を数学的帰納法で証明する．
[1.1]
$m,s\in Z_{\geq 0}$，$2p\times 4\leq 2q$に対して，$\{2p,2q+1\}=\{6m,18m+6s+1\}$とすると，

$$G(\{6m,18m+6s+1\})=15m+6s+1 \tag{13}$$

$$
\begin{aligned}
&move(\{6m, 18m+6s+1\})\\
&= \{\{6m-1, 18m+6s+1\}, \{6m-2, 18m+6s+1\}, ..., \{1, 18m+6s+1\}, \{0, 18m+6s+1\}\} \quad (14)\\
&\cup\{\{6m, 18m+6s\}, \{6m, 18m+6s-1\}, ..., \{6m, 18m+1\}, \{6m, 18m\}\} \quad (15)\\
&\cup\{\{6m-1, 18m-1\}, \{6m-1, 18m-2\}, ..., \{1,1\}, \{0,0\}\} \quad (16)
\end{aligned}
$$

もし $m=0$ ならば， $move(\{6m, 18m+6s+1\}) = move(\{0, 6s+1\})$

$$= \{\{0, 6s\}, \{0, 6s-1\}, ..., \{0,1\}, \{0,0\}\} \quad (17)$$

(7) と (9) を用いて，(17) の Grundy 数を計算すると， $\{6s, 6s-1, 6s-2, ..., 3, 2, 1, 0\}$ となる．そして，Grundy 数の定義より，$G(\{0, 6s+1\}) = 6s+1$ となる．よって，(13) は $m=0$ で成立する．
次に，$m>0$ とする．y 座標 (第一座標) が偶数のとき，(8) を用いて，(14) の Grundy 数を計算する．y 座標 (第一座標) が奇数のとき，(9) を用いる．ここで，y 座標が $6m$ より小さいとき，条件 (9) を満たす．
ここで，$G(\{6m-2, 18m+6s+1\}) = 15m+6s+2, G(\{6m-3, 18m+6s+1\}) = 21m+6s, ..., G(\{1, 18m+6s+1\}) = 18m+6s+2, G(\{0, 18m+6s+1\}) = 18m+6s+1$. 全ての Grundy 数は (13) の右辺である $15m+6s+1$ より大きい．よって，この部分は証明とは無関係である．
次に，(15) の Grundy 数を計算するが，ここで 2 つのグループに分ける．z 座標 (第二座標) が偶数のとき，Grundy 数は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&G(\{6m, 18m+6s\}) = 21m+6s, G(\{6m, 18m+6s-2\}) = 21m+6s-2, ...\\
&\quad , G(\{6m, 12m+6s+2\} = 15m+6s+2, \quad (18)\\
&G(\{6m, 12m+6s\} = 15m+6s, G(\{6m, 12m+6s-2\} = 15m+6s-2, ...,\\
&\quad G(\{6m, 18m+2\} = 21m+2, G(\{6m, 18m\} = 21m \quad (19)
\end{aligned}
$$

ここで，(18) の Grundy 数は，(13) の右辺である $15m+6s+1$ より大きい．よって，(13) の証明とは無関係である．また，z 座標 (第二座標) が奇数のとき，Grundy 数は以下のようになる．

$$
\begin{aligned}
&G(\{6m, 18m+6s-1\}) = 15m+6s-1, G(\{6m, 18m+6s-3\}) = 15m+6s-3, ...\\
&\quad , G(\{6m, 24m+1\} = 21m+1 \quad (20)\\
&G(\{6m, 24m-1\} = 21m-2, G(\{6m, 24m-3\} = 21m-4,\\
&G(\{6m, 24m-5\} = 21m-6, G(\{6m, 24m-7\} = 21m-9...,\\
&G(\{6m, 18m+3\} = 14m+3, G(\{6m, 18m+1\} = 14m+1 \quad (21)
\end{aligned}
$$

(21) の Grundy 数は，$t \in Z_{\geq 0}$ に対して，$7t+5$，もしくは $7t+1$ となる．ここで，(20) の計算に (9) を用い，(21) の計算に (10) を用いる．
次に，(16) の Grundy 数を計算するが，ここで 3 つのグループに分ける．まず，$k \in Z_{\geq 0}$ に対して，Grundy 数が $\{(6m-k, 18m-(3k-2))\}$ となる一つ目のグループの計算をする．ここで，(7) と (8) を用いる．

$$
\begin{aligned}
&G(\{6m-1, 18m-1\}) = 21m-1, G(\{6m-2, 18m-4\}) = 21m-5, G(\{6m-3, 18m-7\}) = 21m-8,\\
&.., G(\{3, 11\}) = 13, G(\{2, 8\}) = 9, G(\{1, 5\}) = 6, G(\{0, 2\}) = 2 \quad (22)
\end{aligned}
$$

(22) の Grundy 数は，$t \in Z_{\geq 0}$ に対して，$7t+6$ もしくは $7t+2$ となる．次に，$k \in Z_{\geq 0}$ に対して，Grundy 数が $\{(6m-k, 18m-3k)\}$ となる二つ目のグループの計算をする．ここで，(7) と (8) を用いる．

$$
\begin{aligned}
&G(\{6m-1, 18m-3\}) = 21m-3, G(\{6m-2, 18m-6\}) = 21m-7, G(\{6m-3, 18m-9\}) = 21m-10,\\
&.., G(\{3, 9\}) = 11, G(\{2, 6\}) = 7, G(\{1, 3\}) = 4, G(\{0, 0\}) = 0 \quad (23)
\end{aligned}
$$

(23) の Grundy 数は，$t \in Z_{\geq 0}$ に対して，$7t+4$，もしくは $7t$ となる．そして，$k \in Z_{\geq 0}$ に対して，Grundy 数が $\{(6m-k, 18m-(3k-1))\}$ となる三つ目のグループの計算をする．ここで，Grundy 数が $\{0,1\}$ のときは (9)，その他のときは，$m>0$ において，(10) と (12) を用いる．

$$G(\{6m-1, 18m-2\}) = 14m-2, G(\{6m-2, 18m-5\}) = 14m-4,$$
$$G(\{6m-3, 18m-8\}) = 14m-6, G(\{6m-4, 18m-11\}) = 14m-9$$
$$.., G(\{3,10\}) = 8, G(\{2,7\}) = 5, G(\{1,4\}) = 3, G(\{0,1\}) = 1 \tag{24}$$

(24) の Grundy 数は，$t \in Z_{\geq 0}$ に対して，$7t+5$，$7t+3$，もしくは $7t+1$ となる．
(19) と (20) の Grundy 数の和集合は，次の集合になる．

$$\{15m+6s, 15m+6s-1, ..., 21m+1, 21m\} \tag{25}$$

(22) を二つのグループに分けると，以下のようになる．

$$\{21m-1, 21m-5, 21m-8, ..., 14m+6, 14m+2\} \tag{26}$$
$$\{14m-1, 14m-5, 14m-8.., 11, 7, 4, 0\} \tag{27}$$

(23) を二つのグループに分けると，以下のようになる．

$$\{21m-3, 21m-7, 21m-10, ..., 14m+7, 14m+4\} \tag{28}$$
$$\{14m, 14m-3, 14m-7.., 11, 7, 4, 0\} \tag{29}$$

(21)，(26)，(28) の和は，次の集合となる．

$$\{21m-1, 21m-2, 21m-3, ..., 14m+2, 14m+1\} \tag{30}$$

(24)，(27)，(29) の和は，次の集合となる．

$$\{14m, 14m-1, 14m-2, ..., 2, 1, 0\} \tag{31}$$

(21)，(30)，(31) の和は，次の集合となる．

$$\{15m+6s, 15m+6s-1, 15m+6s-2, ..., 2, 1, 0\} \tag{32}$$

これは，$move(\{6m, 18m+6s+1\})$ の Grundy 数の集合である．よって，$G(\{6m, 18m+6s+1\}) = 15m+6s+1$ を得る． ∎

$k=3$ の証明の一部であっても，かなり長いのが明らかである．筆者達は，k が一般的な奇数であるときの定理に対する，何か全く違った証明方法を見つける必要がある．

参考文献

[1] S.Nakamura and R.Miyadera,Grundy Numbers of Impartial Chocolate Bar Games,to appear.

[2] S.Nakamura and R.Miyadera,Impartial Chocolate Bar Games,Integers to appear.

[3] A.C.Robin,A poisoned chocolate problem,Problem corner,The Mathematical Gazette Vol.73,No.466 (Dec.,1989),pp. 341-343.An Answer for the above problem is in Vol. 74, No. 468,June 1990,pp. 171-173.

[4] D.Zeilberger,Three-Rowed CHOMP,Adv.Applied Math Vol.26(2001),pp.168-179.

[5] M.H.Albert, 組み合せゲーム理論入門 -勝利の方程式-, 共立出版, 2011. (M.H.Albert,R.J.Nowakowski and D.Wolfe,Lessons In Play,A K Peters.)

[6] 佐藤文広, 石取りゲームの数学 -ゲームと代数の不思議な関係-, 数学書房,2014.

[7] M.Naito,T.Inoue,R.Miyadera,Discrete Mathematics and Computer Algebra System,The Joint Conference of ASCM 2009 and MACIS 2009,COE Lecture Note Vol.22,Kyushu University. `http://gcoe-mi.jp/english/publish_list/pub_inner/id:2/cid:10`

[8] 宮寺 良平, 井上 泰志, 小笠 航, 中村 駿佑, 石取りゲームの変種であるチョコレートゲーム, 情報処理学会論文誌,53(6) pp.1582-1591.

[9] R.Miyadera,S.Nakamura and R.Hanafusa,New Chocolate Games -Variants of the Game of Nim-,Proceeding of Annual International Conference on Computational Mathematics,Computational Geometry Statistics,pp.122-pp.128, 2012.

[10] R.Miyadera,S.Nakamura,Y.Okada,R.Hanafusa, and T.Ishikawa,Chocolate Games -How High School Students Discovered New Formulas Using Mathematica-,Mathematica Journal, Volume 15, 2013. `http://www.mathematica-journal.com/volume/v15/`

A ソースコード (Mathematica)

```
In[12]:= k = 3;
      ss = 30; al = Flatten[Table[{a, b}, {a, 0, ss}, {b, 0, ss}], 1];
      allcases = Select[al, (1 / k) (#[[1]]) ≥ #[[2]] &];
      move[z_] := Block[{p}, p = z;
          Union[Table[{t1, Min[Floor[(1 / k) (t1)], p[[2]]]}, {t1, 0, p[[1]] - 1}],
           Table[{p[[1]], t2}, {t2, 0, p[[2]] - 1}]
          ]
        ];
      Mex[L_] := Min[Complement[Range[0, Length[L]], L]];
      Gr[pos_] := Gr[pos] = Mex[Map[Gr, move[pos]]];
      pposition = Select[allcases, Gr[#] == 0 &];
      gg = 0.75;
      ff[x_] := If[{x[[1]], x[[2]]} == {-1, -1}, "", If[x[[2]] == -1, x[[1]],
           If[x[[1]] == -1, x[[2]], If[x[[1]] ≥ k * x[[2]], Gr[{x[[1]], x[[2]]}], ""]]]];
      b1 = Select[Flatten[Table[{n, m}, {n, 2, ss + 2}, {m, 1, Floor[ss / k] + 2}], 1],
         (#[[1]] - 2) < k * (#[[2]] - 2) &];
      b2 = Table[{1, t}, {t, 2, ss + 2}]; b3 = Table[{t, 1}, {t, 2, ss + 2}];
      Grid[Table[ff[{n, m}], {n, -1, ss}, {m, -1, Floor[ss / k]}], Frame → All,
       Background → {None, None, Join[Table[b1[[s]] → GrayLevel[1], {s, 1, Length[b1]}],
           Table[b3[[s]] → GrayLevel[gg], {s, 1, Length[b3]}],
           Table[b2[[s]] → GrayLevel[gg], {s, 1, Length[b2]}]]}]
```

図 8: Mathematica のソースコード

B ソースコード (TI-BASIC)

```
(grundy 数計算プログラム)
Define gcalc(y,z,k)=
Prgm
Local i,j,k,y,z,gflag,grundy
{}→gflag
For i,0,y+z+1,1
0→gflag[i+1]
EndFor
For i,0,y-1,1
If g[z+1,i+1]=999 Then
gcalc(i,z,1)
1→gflag[g[z+1,i+1]+1]
Else
1→gflag[g[z+1,i+1]+1]
EndIf
EndFor
For j,0,z-1,1
If g[j+1,y+1]=999 Then
gcalc(y,j,1)
1→gflag[g[j+1,y+1]+1]
Else
1→gflag[g[j+1,y+1]+1]
EndIf
EndFor
For k,1,y+z+1,1
If gflag[k]=0 Then
k-1→grundy
Goto endloopk
EndIf
EndFor
Lbl endloopk
grundy→g[z+1,y+1]
Disp "G(",y,",",z,") =",grundy
EndPrgm
```

```
(main 部分のプログラム)
Define main(y,z,k)=
Prgm
{}→ g
Local i,j
constructMat(999,i,j,z+1,y+1) → g
0 → g[1,1]
Disp g
EndPrgm
```