数理解析研究所講究録
第 1955 巻 2015 年 114-123

二項式イデアルのグレブナー基底

日 比 孝 之

大阪大学大学院情報科学研究科情報基礎数学専攻

Takayuki Hibi

Department of Pure and Applied Mathematics
Graduate School of Information Science and Technology
Osaka University

二項式イデアルのグレブナー基底は、組合せ論、統計数学などへの応用から、我が国のみならず、欧米諸国においても、活発な研究活動が展開されている。本稿では、特に、有限束、ポリオミノ、有限グラフに付随する二項式イデアルに関する話題を紹介する。

§1. 二項式イデアルとトーリックイデアル

変数 $x_1, \ldots, x_n$ の**二項式**とは、次数の等しい単項式の差となる多項式

$$f = \prod_{j=1}^{n} x_j^{a_j} - \prod_{j=1}^{n} x_j^{b_j}$$

(但し、$a_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $b_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\sum_{j=1}^{n} a_j = \sum_{j=1}^{n} b_j$) のことである。体 K 上の n 変数多項式環 $K[x_1, \ldots, x_n]$ の**二項式イデアル**とは、$x_1, \ldots, x_n$ の二項式が生成する $K[x_1, \ldots, x_n]$ のイデアルである。たとえば、($x_1x_4 - x_2x_3$, $x_2^3 - x_1x_3^2$) など。

整数行列 $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq d \\ 1 \leq j \leq n}}$ の列ベクトルを

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{dj} \end{bmatrix}, \qquad j = 1, \ldots, n$$

とする。このとき、A が**配置行列** であるとは

$$\langle \mathbf{a}_j \cdot \gamma \rangle = 1, \qquad j = 1, \ldots, n$$

となる $\gamma \in \mathbb{R}^d$ が存在するときに言う。但し、$\langle \mathbf{a}_j \cdot \gamma \rangle$ は、$\mathbb{R}^d$ の通常の内積である。

配置行列の例を挙げよう。たとえば、

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

は、典型的な配置行列であり、左側の行列は、2×3 の **Segre 配置**と、右側の行列は、3 変数二次の **Veronese 配置**と、それぞれ、呼ばれる。

一般の整数行列、たとえば、

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

があったとき、すべての成分が 1 である行を一つ加え、

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とすれば、配置行列にすることができる。

配置行列 $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq d \\ 1\leq j\leq n}}$ があったとき

$$\mathrm{Ker}_{\mathbb{Z}}A = \left\{ b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^n \,:\, A\,b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

と置き、$b \in \mathrm{Ker}_{\mathbb{Z}}A$ のとき、多項式環 $K[x_1, \ldots, x_n]$ の二項式 f_b を

$$f_b = \prod_{b_j>0} x_j^{b_j} - \prod_{b_j<0} x_j^{-b_j}$$

と定義する[*1]。たとえば、$b = [1, -3, 0, 2]^\top$ ならば $f_b = x_1x_4^2 - x_2^3$ である。

二項式 f_b（但し、$b \in \mathrm{Ker}_{\mathbb{Z}}A$）の全体が生成するイデアル $I_A \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ を A の**トーリックイデアル**と呼ぶ。

たとえば、3 変数二次の Veronese 配置のトーリックイデアルは、次の 6 個の二項式で生成される。

$$x_1x_4 - x_2^2,\ x_1x_6 - x_3^2,\ x_4x_6 - x_5^2,\ x_2x_3 - x_1x_5,\ x_2x_5 - x_3x_4,\ x_3x_5 - x_2x_6$$

一般に、二項式を二項式で割り算したときの余りは、再び、二項式である。すると、Buchberger アルゴリズムの操作を思い返すと、

（1．1）**補題**　二項式イデアルの被約グレブナー基底は二項式から成る。

可換代数の世界で、特に、二項式イデアルが重宝されるのは、次の定理（1．2）に負う。

（1．2）**定理**（[2]）二項式イデアル I に関する次の条件は同値である。

（i）I はトーリックイデアルである。

（ii）I は素イデアルである。

（1．3）**例**　多項式環 $K[x_1, x_2, x_3]$ の二項式イデアル $(x_1^2 - x_2x_3)$ は素イデアルである。すると、トーリックイデアルとなるが、その配置行列は、

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

である。

---

*1 配置行列の定義から $b = [b_1, \ldots, b_n]^\top \in \mathrm{Ker}_{\mathbb{Z}}A$ ならば $b_1 + \cdots + b_n = 0$ が従う。

一般に、二項式イデアルがあったとき、それが素イデアルであるか否かを判定することは困難である。更に、何らかの代数的なテクニックを駆使し、それが素イデアルであることが判明したとしても、その配置行列を探すことは、簡単なことではない。

§2. 諸例

有限束、ポリオミノ、有限グラフに付随する二項式イデアルを紹介する。

(a) 有限束

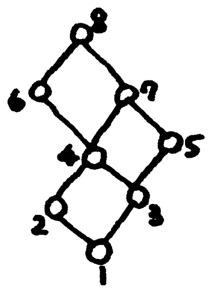
一般に、半順序集合 L が**束**であるとは、L に属する任意の元 α と β について、その**上限** $\alpha \vee \beta$ と**下限** $\alpha \wedge \beta$ が存在するときに言う。詳細は、[7] などを参照されたい。特に、有限束には、最大元と最小元が存在する。

有限束 L があったとき、体 K 上の $|L|$ 変数多項式環 $S = K[x_\alpha : \alpha \in L]$ を準備し、L の元 α と β が比較不可能なとき、S に属する二項式

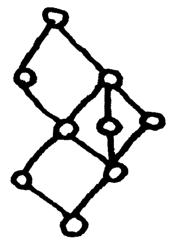
$$x_\alpha x_\beta - x_{\alpha\wedge\beta} x_{\alpha\vee\beta}$$

を考える。そのような二項式の全体の集合を $\mathcal{G}_L$ と置き、$\mathcal{G}_L$ が生成する S の二項式イデアルを I_L と表す。たとえば、(図1) の有限束ならば、$\mathcal{G}_L$ は、次の5個の二項式から成る。

$$x_2x_3 - x_1x_4,\ x_2x_5 - x_1x_7,\ x_4x_5 - x_3x_7,\ x_5x_6 - x_3x_8,\ x_6x_7 - x_4x_8$$



(図1)



(図2)

(2.1) **定理** ([6]) 有限束 L に関する次の条件は同値である。

(i) I_L は素イデアルである。

(ii) L は分配束である。

更に、L が分配束のとき、$\mathcal{G}_L$ は、L の順序を保つ変数の順序[*2] から導かれる逆辞書式順序に関する被約グレブナー基底である。

---

*2 すなわち、$\alpha < \beta$ ならば $x_\alpha < x_\beta$ である。

たとえば、（図１）の有限束は、分配束であり、その二項式イデアル I_L は、配置行列

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

のトーリックイデアルである。

任意の束 L について、二項式イデアル I_L は、squarefree な（単項式で生成される）イニシャルイデアルを持つか？ という懸案の問題が、かなり永い間、君臨していた。一般に、squarefree なイニシャルイデアルを持つイデアルは、根基イデアル（すなわち、$\sqrt{I} = I$ を満たすイデアル）であるから、その問題が肯定的であれば、I_L は根基イデアルである。しかしながら、反例があった。

（２．２）**例**（[３]）有限束（図２）を L とすると、L は、モジュラー束であるが、分配束ではなく、二項式イデアル I_L は、根基イデアルではない。

(b) ポリオミノ

座標平面上の**格子点**とは、整数を成分とする点のことを言う。特に、非負整数を成分とする格子点の全体の集合を $\mathbb{N}^2$ と表す。格子点 $a = (i, j)$ と $b = (k, \ell)$ について、$i \leq k$ かつ $j \leq \ell$ のとき、$a \leq b$ と表す。いま、$a \leq b$ を満たす $\mathbb{N}^2$ の格子点 a と b があったとき、$\mathbb{N}^2$ の部分集合

$$[a, b] = \{ e \in \mathbb{N}^2 : a \leq e \leq b \}$$

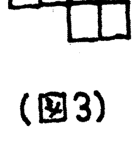
を**区間**と呼ぶ。特に、$a = (i, j)$ と $b = (k, \ell)$ が $i < k$ かつ $j < \ell$ を満たすとき、区間 $[a, b]$ を**真の区間**と言う。真の区間 $[a, b]$ があったとき、a と b を**対角隅**と呼び、$c = (i, \ell)$ と $d = (k, j)$ を**反対角隅**と呼ぶ。

座標平面上の**セル**とは、$(i, j), (i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1)$ を頂点とする正方形のことである。但し、i と j は非負整数である。セル A と B が**隣接する**とは、A と B が辺を共有するときに言う。有限個のセルの集合 $\mathcal{P}$ が**連結**であるとは、$\mathcal{P}$ に属する任意のセル A と B について、$\mathcal{P}$ に属するセルの列

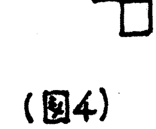
$$A = C_0, C_1, \ldots, C_r = B$$

で、任意の $i = 0, 1, \ldots, r-1$ について、C_i と C_{i+1} が隣接するものが存在するときに言う。

有限個のセルの集合 $\mathcal{P}$ が**ポリオミノ**であるとは、$\mathcal{P}$ が連結であるときに言う。格子点 (i, j) がポリオミノ $\mathcal{P}$ の頂点であるとは、(i, j) が $\mathcal{P}$ に属する少なくとも一つのセルの頂点であるときに言う。たとえば、セルの有限集合（図３）はポリオミノであるが、（図４）はポリオミノではない。



（図3）



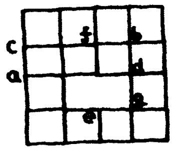
（図4）

ポリオミノ $\mathcal{P}$ の頂点の集合を $V(\mathcal{P})$ とし、$|V(\mathcal{P})|$ 変数多項式環 $S = K[x_a : a \in V(\mathcal{P})]$ を準備する。真の区間 $[a,b]$ が、ポリオミノ $\mathcal{P}$ に含まれるとは、条件『セル C の 4 個の頂点がすべて $[a,b]$ に属するならば、C は $\mathcal{P}$ に属する』が満たされるときに言う。ポリオミノ $\mathcal{P}$ に含まれる真の区間 $[a,b]$ があったとき、$\mathcal{P}$ の**内部 2 マイナー**と呼ばれる二項式 $f_{a,b}$ を

$$f_{a,b} = x_a x_b - x_c x_d$$

と定義する。但し、c と d は真の区間 $[a,b]$ の反対角隅である。ポリオミノ $\mathcal{P}$ の内部 2 マイナーの全体の集合を $\mathcal{G}_\mathcal{P}$ と表し、$\mathcal{G}_\mathcal{P}$ が生成する S の二項式イデアル $I_\mathcal{P}$ を $\mathcal{P}$ の**ポリオミノイデアル**と呼ぶ。

たとえば、(図5) のポリオミノでは、二項式 $f_{a,b} = x_a x_b - x_c x_d$ は内部 2 マイナーであるが、二項式 $f_{e,b} = x_e x_b - x_f x_g$ は内部 2 マイナーではない。



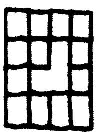
(図5)

ポリオミノ $\mathcal{P}$ が**単純である**とは、穴が空いていないときに言う。ポリオミノ $\mathcal{P}$ が**凸である**とは、次の条件が満たされるときに言う。

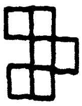
- 非負整数 i, j と i' について、$a = (i,j), (i+1,j), (i,j+1), (i+1,j+1)$ を頂点とするセルと $(i+i',j), (i+i'+1,j), (i+i',j+1), b = (i+i'+1,j+1)$ を頂点とするセルが、両者とも $\mathcal{P}$ に属するならば、区間 $[a,b]$ は $\mathcal{P}$ に含まれる。
- 非負整数 i, j と j' について、$a = (i,j), (i+1,j), (i,j+1), (i+1,j+1)$ を頂点とするセルと $(i,j+j'), (i+1,j+j'), (i,j+j'+1), b = (i+1,j+j'+1)$ を頂点とするセルが、両者とも $\mathcal{P}$ に属するならば、区間 $[a,b]$ は $\mathcal{P}$ に含まれる。

特に、凸なポリオミノは単純である。

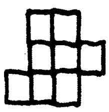
たとえば、(図6) は、単純でないポリオミノ、(図7) は単純であるが、凸でないポリオミノである。他方、(図8) は凸なポリオミノである。



(図6)



(図7)

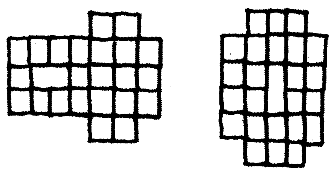


(図8)

(2.3) **定理** ([5、12]) 単純なポリオミノのポリオミノイデアルは素イデアルである。

しかしながら、単純なポリオミノのポリオミノイデアルは、実は、周知のトーリックイデアル([9])と一致する。すると、斬新なトーリックイデアルを探すという観点からは、単純なポリオミノのポリオミノイデアルは、やや興味に乏しい。従って、単純でないポリオミノのポリオミノイデアルで素イデアルとなるものの族を発見することが研究対象となる。

(2.4) **例** (図9) の非単純ポリオミノのポリオミノイデアルは素イデアルであるが、(図10) の非単純ポリオミノのポリオミノイデアルは素イデアルではない。



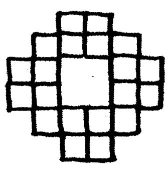
(図9)　(図10)

(2.5) **定理** ([8]) ポリオミノ $\mathcal{P}$ に属するセルの全体の和集合は長方形であるとし、凸なポリオミノ $\mathcal{Q}$ は $\mathcal{P}$ に含まれると仮定する。このとき、$\mathcal{P}\setminus\mathcal{Q}$ がポリオミノであれば、そのポリオミノイデアルは素イデアルである。

しかしながら、定理(2.5)のポリオミノイデアルをトーリックイデアルとして表示すること、すなわち、配置行列を構成することは、未解決である。なお、定理(2.5)の証明は、局所化のテクニックを使って遂行する。

(2.6) **予想**　任意のポリオミノイデアルは、squarefree なイニシャルイデアルを持つ。特に、ポリオミノイデアルは根基イデアルである。

(2.7) **例** (図11) のポリオミノのポリオミノイデアルは素イデアルではないが、squarefree なイニシャルイデアルを持つ。特に、根基イデアルである。



(図11)

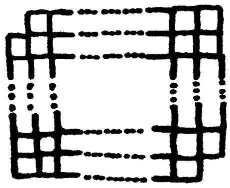
多項式環 $S = K[x_a : a \in V(\mathcal{P})]$ の変数の順序 $x_a < x_b$ を「$i < k$ である」あるいは「$i = k$ かつ $j < \ell$ である」と定義する。但し、$a = (i, j), b = (k, \ell)$ である。その変数の順序から導かれる S の辞書式順序を $<_{\mathrm{lex}}$ とする。

（2．8）**定理**（[11]）ポリオミノ $\mathcal{P}$ に関する次の条件は同値である。

（i）$\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ は $I_{\mathcal{P}}$ の $<_{\text{lex}}$ に関する被約グレブナー基底である。

（ii）$\mathcal{P}$ が（図12）のポリオミノ*3 を含まない。

特に、$\mathcal{P}$ が（図12）のポリオミノを含まなければ、$I_{\mathcal{P}}$ は、squarefree なイニシャルイデアルを持つ。従って、$I_{\mathcal{P}}$ は根基イデアルである。



（図12）

一般のポリオミノイデアルが、単項式順序を適当に選ぶことにより、$\mathcal{G}_{\mathcal{P}}$ を被約グレブナー基底に持つか否かは、未解決問題である。

（c）有限グラフ

有限連結単純グラフ*4G の頂点集合を $\{1,\ldots,n\}$ とし、辺の集合を $E(G)$ とする。体 K 上の $2n$ 変数多項式環 $S=K[x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n]$ を準備し、辺 $\{i,j\}\in E(G)$ に、二項式

$$f_{ij}=x_iy_j-x_jy_i$$

を対応させる*5。そのような二項式の全体の集合 $\{f_{ij}\}_{\{i,j\}\in E(G)}$ が生成するイデアル $J_G\subset S$ を G の **binomial edge ideal** と呼ぶ。

（2．9）**命題**　有限連結単純グラフ G に関する次の条件は同値である。

（i）J_G は素イデアルである。

（ii）G は完全グラフである。

一般に、有限連結単純グラフ G が **closed** であるとは、$\{i,j\}$ と $\{i,k\}$ が G の辺で $i<j,\, i<k$ であるか、あるいは、$i>j,\, i>k$ であるならば、$\{j,k\}$ も G の辺であるときに言う。

（2．10）**命題**　有限連結単純グラフ G に関する次の条件は同値である。

（i）変数の順序 $x_1>\cdots>x_n>y_1>\cdots>y_n$ から導かれる辞書式順序に関して J_G の生成系 $\{f_{ij}\}_{\{i,j\}\in E(G)}$ は J_G のグレブナー基底である。

（ii）G は closed グラフである。

（2．11）**定理**（[4][10]）二項式イデアル J_G は、squarefree なイニシャルイデアルを持つ。特に、J_G は根基イデアルである。

---

*3 すなわち、長方形から左上隅と右下隅にある二つのセルを除去したポリオミノのことである。

*4 単純グラフとは、重複辺とループを持たないグラフのことである。

*5 但し、$i<j$ とする。

§3. “素手”で計算*6するグレブナー基底

体 K 上の n 変数 Laurent 多項式環 $K[\mathbf{t},\mathbf{t}^{-1}]=K[t_1,t_1^{-1},\ldots,t_d,t_d^{-1}]$ を準備する。空間 $\mathbb{R}^d$ の格子点 $\mathbf{a}\in\mathbb{Z}^d$ と（負冪を含む）単項式 $\mathbf{t}^{\mathbf{a}}$ を同一視する。たとえば、$\mathbf{a}=[2,0,-3]^\top$ ならば $\mathbf{t}^{\mathbf{a}}=t_1^2t_3^{-3}$ である。

配置行列 $A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le d\\1\le j\le n}}=[\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n]$ の**トーリック環**とは、$K[\mathbf{t},\mathbf{t}^{-1}]$ の部分環

$$K[A]=K[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1},\ldots,\mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}]$$

のことである。

環の全射 $\pi:K[x_1,\ldots,x_n]\to K[\mathbf{t}^{\mathbf{a}_1},\ldots,\mathbf{t}^{\mathbf{a}_n}]$ を

$$\pi(x_j)=\mathbf{t}^{\mathbf{a}_j},\qquad j=1,\ldots,n$$

と定義する。すると、

（3．1）**補題**（[１４, 補題 1.5.9]）配置行列 A のトーリックイデアル I_A は π の核 $\mathrm{Ker}(\pi)$ に一致する。

本節の表題の“素手”で計算するための準備をする。

- $K[x_1,\ldots,x_n]$ の単項式順序 $<$ を一つ固定する。
- $\mathrm{Ker}(\pi)$ に属する有限個の二項式 $g_1,\ldots,g_s$ を選び $\mathcal{G}=\{g_1,\ldots,g_s\}$ とする。
- $\mathrm{in}_<(\mathcal{G})=(\,\mathrm{in}_<(g_1),\ldots,\mathrm{in}_<(g_s)\,)$ と置く。
- 単項式 $u\in K[x_1,\ldots,x_n]$ が $\mathcal{G}$ に関し**標準的**であるとは、$u\notin\mathrm{in}_<(\mathcal{G})$ であるときに言う。

（3．2）**補題**（[１３, 補題 4.3.4]）条件『単項式 $u\neq v$ が $u\notin\mathrm{in}_<(\mathcal{G}),\ v\notin\mathrm{in}_<(\mathcal{G})$ を満たせば $\pi(u)\neq\pi(v)$ である』を仮定する。すると、$\mathcal{G}$ は I_A の $<$ に関するグレブナー基底である。

以下、D型ルート系に付随する配置行列のトーリックイデアルのグレブナー基底を、補題（3．2）を使って探す。

空間 $\mathbb{R}^n$ の単位座標ベクトルを $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ とする。行列 $\mathbf{D}_n$ を列ベクトル

$$\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j,\qquad \mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j,\qquad 1\le i<j\le n$$

を持つ n 行 $n(n-1)$ 列の行列とし、配置行列

$$\mathbf{D}_n^{\pm}=\left[\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & & & & & & \\ \vdots & & \mathbf{D}_n & & & -\mathbf{D}_n & \\ 0 & & & & & & \\ \hline 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

を議論する。

たとえば、配置行列 $\mathbf{D}_3^{\pm}$ は

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

である。

---

*6 計算機を使わず、紙と鉛筆で手計算することと誤解されるが、そうではない。計算機を使っても計算できないグレブナー基底を、**理論**と**経験**と**勘**と**根性**と**運**で探すことである。

- 変数 x_{ij}^{pq} と z を持つ多項式環 $K[\mathbf{x}, z]$ を準備する。但し、$1 \leq i < j \leq n$, $p \in \{+,-\}$, $q \in \{+,-\}$ である。
- トーリック環 $K[\mathbf{D}_n^{\pm}] \subset K[t_1, t_1^{-1}, \ldots, t_n, t_n^{-1}, s]$ を考え、写像 $\pi : K[\mathbf{x}, z] \to K[\mathbf{D}_n^{\pm}]$ を $\pi(z) = s$ と $\pi(x_{13}^{-+}) = t_1^{-1} t_3 s$ 等で定義し、トーリックイデアル $I_{\mathbf{D}_n^{\pm}} = \mathrm{Ker}(\pi)$ を議論する。
- 多項式環 $K[\mathbf{x}]$ の変数の順序 $<$ で、条件『$i < k$ であるか、あるいは、$i = k$ かつ $j > \ell$ であるとき、$x_{ij}^{pq} < x_{k\ell}^{rs}$ である』を満たすものを一つ固定し、$<$ が導く辞書式順序 $<_{\mathrm{lex}}$ を扱う。
- $K[\mathbf{x}, z]$ の単項式順序 $\prec$ を

$$\prod_{\xi=1}^{a} x_{i_\xi j_\xi}^{p_\xi q_\xi} z^\alpha \prec \prod_{\nu=1}^{b} x_{k_\nu \ell_\nu}^{r_\nu s_\nu} z^\beta$$

となるのは、次の何れかが成立するときと定義する。

(i) $a + \alpha < b + \beta$;

(ii) $a + \alpha = b + \beta$, $\alpha > \beta$;

(iii) $a = b, \alpha = \beta$, $\prod_{\xi=1}^{a} x_{i_\xi j_\xi}^{p_\xi q_\xi} <_{\mathrm{lex}} \prod_{\nu=1}^{b} x_{k_\nu \ell_\nu}^{r_\nu s_\nu}$.

(3.3) **定理** ([1]) 次の (i) から (viii) の二項式から成る集合は、トーリックイデアル $I_{\mathbf{D}_n^{\pm}}$ の単項式順序 $\prec$ に関するグレブナー基底である。

(i) $x_{ij}^{pq} x_{k\ell}^{rs} - x_{ik}^{pr} x_{j\ell}^{qs}, 1 \leq i < j < k < \ell \leq n$;

(ii) $x_{i\ell}^{ps} x_{jk}^{qr} - x_{ik}^{pr} x_{j\ell}^{qs}, 1 \leq i < j < k < \ell \leq n$;

(iii) $x_{ij}^{+p} x_{ik}^{-q} - x_{jk}^{pq} z$, $|\{i,j,k\}| = 3$;*7

(iv) $x_{ij}^{++} x_{ij}^{--} - z^2$, $1 \leq i < j \leq n$;

(v) $x_{ij}^{+-} x_{ij}^{-+} - z^2$, $1 \leq i < j \leq n$;

(vi) $x_{ij}^{p+} x_{ij}^{p-} - x_{1i}^{+p} x_{1i}^{-p}$, $1 < i \neq j \leq n$;

(vii) $x_{1j}^{p+} x_{1j}^{p-} - x_{1n}^{p+} x_{1n}^{p-}$, $1 < j < n$;

(viii) $x_{1i}^{+p} x_{1i}^{-p} x_{jk}^{qr} - x_{ij}^{pq} x_{ik}^{pr} z$, $1 < i, j, k \leq n$, $|\{i,j,k\}| = 3$.

特に、二項式 (viii) は (iii) と (vii) を使って表示できる。すると

(3.4) **系** 定理 (3.3) の (i) から (vii) の二次二項式から成る集合は $I_{\mathbf{D}_n^{\pm}}$ の生成系である。

(3.5) **問題** トーリックイデアル $I_{\mathbf{D}_n^{\pm}}$ は二次二項式からなるグレブナー基底を持つか？

参考文献

[1] S. Aoki, Ta. Hibi and H. Ohsugi, Markov chain Monte Carlo methods for the Box-Behnken designs and centrally symmetric configurations, arXiv:1502.02323.

[2] D. Eisenbud and B. Sturmfels, Binomial ideals, *Duke Math. J.* **84** (1996), 1–46.

[3] V. Ene and T. Hibi, The join-meet ideal of a finite lattice, *J. Commutative Algebra* **5** (2013), 209–230.

*7 For $j < i$, the notation x_{ij}^{pq} is identified with the variable x_{ji}^{qp}.

[4] J. Herzog, T. Hibi, F. Hreinsdóttir, T. Kahle and J. Rauh Binomial edge ideals and conditional independence statements, *Adv. in Appl. Math.* **45** (2010), 317–333.

[5] J. Herzog and S. S. Madani, The coordinate ring of a simple polyomino arXiv:1408.4275.

[6] T. Hibi, Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws, *in* "Commutative Algebra and Combinatorics" (M. Nagata and H. Matsumura, Eds.), Advanced Studies in Pure Math., Volume 11, North–Holland, Amsterdam, 1987, pp. 93–109.

[7] T Hibi, "Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes," Carslaw Publications, Glebe, N.S.W., Australia, 1992.

[8] T. Hibi and A. A. Qureshi, Nonsimple polyominoes and prime ideals arXiv:1502.03669.

[9] H. Ohsugi and T. Hibi, Koszul bipartite graphs, *Adv. in Appl. Math.* **22** (1999), 25 – 28.

[10] M. Ohtani, Graphs and ideals generated by some 2-minors, *Communications in Algebra* **39** (2011), 905–917.

[11] A. A. Qureshi, Ideals generated by 2-minors, collections of cells and stack polyominoes, *J. of Algebra* **357** (2012), 279–303.

[12] A. A. Qureshi, T. Shibuta and A. Shikama, Simple polyominoes are prime, arXiv:1501.05107.

[13] 日比孝之『グレブナー基底』(朝倉書店) 2003 年.

[14] JST CREST 日比チーム (編)『グレブナー道場』(共立出版) 2011 年.