数理解析研究所講究録
第1955巻 2015年 168-179

孤立特異点変形と f^s のパラメータ付き偏微分作用素環での annihilator について

加藤満生*
KATO, MITSUO
琉球大学教育学部
FACULTY OF EDUCATION, UNIVERSITY OF THE RYUKYUS

田島慎一†
TAJIMA, SHINICHI
筑波大学大学院数理物質系数学域
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

Annihilators in the ring of analytic linear partial differential operators associated with a μ-constant deformation of hypersurface isolated singularity are considered. An algorithmic method of computing annihilators is described for E_{12} singularity. A key ingredient of the proposed method is the concept of local cohomology.

1 序

原点を孤立特異点として持つ weighted homogeneous な多項式 f_0 の μ-constant deformation f_t (ここで, $t \in T \subset \mathbb{C}^m$ は変形パラメータを表す) が与えられたとする. このとき, f_t に対し, 「収束冪級数を係数として持つ線形偏微分作用素環における f_t^s の annihilators を求める」という問題について, 数式処理の観点から考察する. Annihilators の計算は, 基本的に, 本稿の第一著者である加藤満生が1981年に発表した論文[14]において与えた構成法に従う. 収束冪級数環におけるパラメータ付きの計算を数式処理システムにより exact に行うために, 局所コホモロジーと多変数留数に関する双対定理に基づくことで導出した計算の枠組みを用いる. 本稿では具体例として, 最も簡単な半擬斉次孤立特異点である

*mkato@edu.u-ryukyu.ac.jp
†tajima@math.tsukuba.ac.jp

E_{12} 特異点を考え, annihilators を実際に構成する. これにより, annihilators の構成に必要となる計算アルゴリズムを明らかにし, より一般的な weighted homogeneous な多項式の μ-constant deformation f_t の場合も収束冪級数を係数に持つ偏微分作用素環でのパラメータ付きの annihilators を exact に求めることが可能となることを示す.

2 準備

E_{12} 特異点は, (自明でない場合を除くと) 最も簡単な μ-constant deformation である. この節では, この E_{12} 特異点に関する基本的事柄をまとめ, 次節以降の計算のための準備をする.

$f_0(x,y) = x^3 + y^7$ とおく. f_0 は weight vector $w = (7,3)$ に関し擬斉次な weighted homogeneous 多項式であり, f_0 の weighted degree $\deg_w(f_0)$ は 21 である. この擬斉次多項式 f_0 に, weighted degree が 22 の項 xy^5 に変形パラメータ t を係数として掛けた項を加えた $f_t(x,y) = x^3 + y^7 + txy^5$ が E_{12} 特異点の定義多項式である. f_0 は f_t の principal part と呼ばれる. 原点 $(x,y) = (0,0)$ は, 超曲面の族 $S_t = \{(x,y) \mid f_t(x,y) = 0\}$ の孤立特異点である. Milnor 数は, 変形パラメータ t によらず一定で 12 に等しい. これらの特異点はすべて, 位相的には S_0 の定める特異点と同型であるが, 複素解析的には, $S_t(t \neq 0)$ と S_0 の特異点は同型ではない. これに対し, f_0 に weighted degree が 22 よりも大きな単項式, 例えば xy^6 を加えた多項式 $x^3 + y^7 + xy^6$ が定める超曲面は位相的にも複素解析的にも f_0 が定める超曲面と同型な特異点を持つことが知られている. 即ち, E_{12} は, f_0 の versal μ-constant deformation である.

Annihilators を構成する際, ヤコビイデアルに対する ideal membership 問題等を解く必要が生じる. その為の準備として先ず, ヤコビイデアルの構造を調べ, 次に ideal membership 問題と syzygy 計算について説明する.

2.1 Jacobi ideals

X を $\mathbb{C}^2$ の原点 O の近傍, $\mathcal{O}_X$ を X の正則関数の成す層 (sheaf), $\mathcal{O}_{X,O}$ を $\mathcal{O}_X$ の原点における茎 (stalk) とする. $\mathbb{C}^2$ の原点 O に台を持つ局所コホモロジーを $\mathcal{H}^2_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ で表す.

$\mathcal{H}^2_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ の元は開集合対 $(X, X-\{O\})$ に対する標準的な相対被覆が定める相対 Čech コホモロジーの要素として表現できる. 記号 $\sum c_{(\lambda_1,\lambda_2)} \left[\frac{1}{x^{\lambda_1+1}y^{\lambda_2+1}}\right]$ を用いて $\mathcal{H}^2_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ に属す局所コホモロジー類を表す. (正確には, Grothendieck symbol を使うべきであるが, この記号を用いても誤解は生じないと思う) このとき, $x^{\kappa_1}y^{\kappa_2}$ と $\left[\frac{1}{x^{\lambda_1+1}y^{\lambda_2+1}}\right]$ の積は相対 Čech コホモロジー群の定義より, 次で与えられる

$$x^{\kappa_1}y^{\kappa_2}\left[\frac{1}{x^{\lambda_1+1}y^{\lambda_2+1}}\right] = \begin{cases} \left[\frac{1}{x^{\lambda_1-\kappa_1+1}y^{\lambda_2-\kappa_2+1}}\right] & \lambda_i \geq \kappa_i, i = 1,\ 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ただし, $(\kappa_1,\kappa_2)\in\mathbb{N}^2, (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{N}^2$ である.

さて, f_t を正則関数と見做し, f_t の収束冪級数環におけるヤコビイデアルを $\mathcal{J}_t$ で表す. 局所コホモロジー $\mathcal{H}^2_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ に属す局所コホモロジー類であり, ヤコビイデアル $\mathcal{J}_t=\langle\partial f_t/\partial x, \partial f_t/\partial y\rangle$ によって annihilate されるもの全体のなす集合 $H_{\mathcal{J}_t}$ を

$$H_{\mathcal{J}_t} := \left\{\psi\in\mathcal{H}^2_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)\;\middle|\; \frac{\partial f_t}{\partial x}(x,y)\psi = \frac{\partial f_t}{\partial y}(x,y)\psi = 0\right\}$$

で定める. 正則関数 f_t は原点を孤立特異点として持つので, $H_{\mathcal{J}_t}$ は有限次元ベクトル空間となる. さらに多変数留数 (Grothendieck local residues) が定める次の pairing は非退化である.

$$\mathrm{res}_O(\ ,\ ) : \mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_t\times H_{\mathcal{J}_t}\longrightarrow\mathbb{C}.$$

従って, $H_{\mathcal{J}_t}$ は剰余空間 $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_t$ の双対ベクトル空間であり, その次元 $\dim_{\mathbb{C}}(H_{\mathcal{J}_t})$ は, Milnor 数 $\dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_t)=12$ と等しい.

注意 通常, ヤコビイデアル $\mathcal{J}_t$ を具体的に扱う際は, 収束冪級数環に項順序を入れ, ヤコビイデアル $\mathcal{J}_t$ のスタンダード基底を求め, それを用いて剰余空間 $\mathcal{O}_{X,O}/\mathcal{J}_t$ の monomial 基底をし, 種々の計算を行う. それに対し, 局所コホモロジー類のなすベクトル空間 $H_{\mathcal{J}_t}$ は, 定義から明らかなように, 項順序によらずに定まる intrinsic な対象である.

ベクトル空間 $H_{\mathcal{J}_t}$ の基底局所コホモロジー類は次で与えられる.

$$\left[\frac{1}{xy}\right],\ \left[\frac{1}{xy^2}\right],\ \left[\frac{1}{xy^3}\right],\ \left[\frac{1}{x^2y}\right],\ \left[\frac{1}{xy^4}\right],\ \left[\frac{1}{x^2y^2}\right],\ \left[\frac{1}{xy^5}\right],\ \left[\frac{1}{x^2y^3}\right],\ \left[\frac{1}{x^2y^4}\right],$$

$$\left[\frac{1}{xy^6}\right]-\frac{1}{3}t\left[\frac{1}{x^3y}\right],\ \left[\frac{1}{x^2y^5}\right]-\frac{5}{7}t\left[\frac{1}{xy^7}\right]+\frac{5}{21}t^2\left[\frac{1}{x^3y^2}\right],$$

$$\left[\frac{1}{x^2y^6}\right]-\frac{5}{7}t\left[\frac{1}{xy^8}\right]-\frac{1}{3}t\left[\frac{1}{x^4y}\right]+\frac{5}{21}t^2\left[\frac{1}{x^3y^3}\right]$$

ただし, これら 12 個の基底局所コホモロジーは, $\mathcal{H}^2_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ に weight vector $w=(7,3)$ と両立する項順序をいれ, その項順序を用いて構成した基底である. また, 各コホモロジー類の先頭項は, それぞれの主項である.

多変数留数の定める pairing は非退化であることから, これら 12 個の局所コホモロジー類がヤコビイデアル $\mathcal{J}_t$ を完全に決定づけることに注意する. 実際, 正則関数 $h(x,y)\in\mathcal{O}_{X,O}$ が与えられたとき,

$$\mathrm{res}_O(h,\psi)=0,\quad \forall\psi\in H_{\mathcal{J}_t}$$

は, $h(x,y)$ が収束冪級数環におけるヤコビイデアル $\mathcal{J}_t$ に属する必用十分条件である. この双対性に基づくことで, ideal membership の判定, normal form の計算, standard 基底計算, イデアル商計算等を行うアルゴリズムを導くことが出来る.

次に，2変数多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ において，多項式 f_t の偏導関数 $\frac{\partial f_t}{\partial x}, \frac{\partial f_t}{\partial y}$ が生成するイデアルを考え J_t で表す．このイデアル $J_t = \langle \partial f_t/\partial x, \partial f_t/\partial y \rangle \subset \mathbb{C}[x,y]$ のことを多項式環におけるヤコビイデアルと呼ぶことにする．イデアル J_t のグレブナ基底は $G = \{g_1, g_2, g_3\}$ で与えられる．ここで

$$g_1 = 25t^3y^9 + 147y^8,\ g_2 = 5txy^4 + 7y^6,\ g_3 = 3x^2 + ty^5$$

であり，項順序は，$x \succ y$ なる辞書式項順序である．

剰余空間 $\mathbb{C}[x,y]/J_t$ のベクトル空間としての次元は，$t = 0$ の時は 12，$t \neq 0$ の時は 13 に等しい．イデアル J_t が $\mathbb{C}^2$ において定める variety $V(J_t)$ の原点における重複度は 12 であることから，$V(J_t)$ は $t \neq 0$ の時，原点以外にも点を 1 つ含むことになる．その点を Q とおく．点 Q の y 座標は $g_1 = (25t^3y + 147)y^8$ より，$147 + 25t^3y = 0$ であることが直ちにわかる．同様に，x 座標は $g_2 = (5tx + 7y^2)y^4$ より，$151263 + 3125t^7x = 0$ であることが分かる．

2.2 ideal membership

正則関数 xy^5 に注目する．ベクトル空間 $H_{\mathcal{J}_t}$ の各基底局所コホモロジーを xy^5 倍することで，特に

$$xy^5(\left[\frac{1}{x^2y^6}\right] - \frac{5}{7}t\left[\frac{1}{xy^8}\right] - \frac{1}{3}t\left[\frac{1}{x^4y}\right] + \frac{5}{21}t^2\left[\frac{1}{x^3y^3}\right]) = \left[\frac{1}{xy}\right]$$

を得る．これより，xy^5 はイデアル $\mathcal{J}_t$ に属さないこと，$x(xy^5), y(xy^5)$ はともに，ヤコビイデアル $\mathcal{J}_t$ に属すことが分かる．

局所コホモロジーを利用したこれらの計算から，$x(xy^5)$ について

$$x(xy^5) = c_1(x,y)\frac{\partial f_t}{\partial x} + c_2(x,y)\frac{\partial f_t}{\partial y}$$

を満たす収束冪級数の組 $c_1(x,y), c_2(x,y)$ が存在することが従う（$y(xy^5)$ についても同様）．

f_t^s の annihilators の計算では，$c_1(x,y), c_2(x,y)$ を具体的に求める必要があるが，一般に，パラメータを含む収束冪級数環における syzygy 計算は困難である．そのため，収束冪級数の組 $c_1(x,y), c_2(x,y)$ を実際に，どの様に求めればよいかという数式処理としての問題を解決する必要が生じる．

今，正則関数 $x(xy^5), y(xy^5)$ を多項式環 $\mathbb{C}[x,y]$ の要素と見做す．$x(xy^5), y(xy^5)$ は明らかに，イデアル J_t に属さない．その理由は，$x(xy^5), y(xy^5)$ が点 Q を零点として持たないからである．これに対し，多項式 $(147 + 25t^3y)(x(xy^5)), (147 + 25t^3y)(y(xy^5))$ は共に，多項式環におけるヤコビイデアル J_t に属すことに注目する（因子として $151263 + 3125t^7x$ を用いても同様．以下の議論では，$\deg_w(x) = 7, \deg_w(y) = 3$ であることと，点 Q を通る

もっとも単純な形の一次式である $147+25t^3y$ を採用). 論文 [20] の計算アルゴリズムで, パラメータを含む多項式環での syzygy 計算を行うことで次の式を得る.

$$(147+25t^3y)(x(xy^5))-49y^5(\frac{\partial f_t}{\partial x})+(-5t^2xy^2+7ty^4)(\frac{\partial f_t}{\partial y})=0,$$

$$(147+25t^3y)(y(xy^5))+35ty^4(\frac{\partial f_t}{\partial x})+(-21x-5t^2ty^3)(\frac{\partial f_t}{\partial y})=0.$$

多項式環でのこれらの計算結果を $147+25t^3y$ で割ることで, 収束冪級数環における次の式を得る.

$$x(xy^5)=\frac{49y^5}{147+25t^3y}(\frac{\partial f_t}{\partial x})-\frac{(-5t^2xy^2+7ty^4)}{147+25t^3y}(\frac{\partial f_t}{\partial y}),$$
$$y(xy^5)=-\frac{35ty^4}{147+25t^3y}(\frac{\partial f_t}{\partial x})+\frac{21x+5t^2ty^3}{147+25t^3y}(\frac{\partial f_t}{\partial y}).$$

3 1階の annihilators

この節では, 前の節の結果を用いることで, E_{12} 特異点を定める $f_t=x^3+y^7+txy^5$ に対し f_t^s の 1階の annihilators を構成できることを示す.

先ず, f_t の主要部 $f_0=x^3+y^7$ の擬斉次性に注目し, Euler 作用素 X_0 を

$$X_0=7x\frac{\partial}{\partial x}+3y\frac{\partial}{\partial y}$$

で定める. このとき, $X_0(f_0)=21f_0, X_0(xy^5)=22(xy^5)$ より,

$$(21s-X_0)f_t^s=-s(txy^5)f_t^s$$

を得る. この式から, $t=0$ の時は, $21s-X_0$ が annihilator であることが直ちにわかる. 以下, $t\neq 0$ として, 恒等式 $\frac{\partial}{\partial x}f_t^s=s\frac{\partial f_t}{\partial x}f_t^{s-1}$, $\frac{\partial}{\partial y}f_t^s=s\frac{\partial f_t}{\partial y}f_t^{s-1}$ を用いて右辺を書き変えてることを考える. その為には, 右辺の f_t^{s-1} の係数がヤコビイデアルに属すような冪級数である必要がある.

さてここで, xy^5 は収束冪級数環におけるヤコビイデアル $\mathcal{J}_t$ に属さないが, $x(xy^5), y(xy^5)$ は共に $\mathcal{J}_t$ に属すことに注意する. 前の節での計算結果を利用すると

$$\begin{aligned}&(147+25t^3y)x(21s-X_0)f_t^s\\&=-ts\{49y^5(\frac{\partial f_t}{\partial x})+(5t^2xy^2-7ty^4)(\frac{\partial f_t}{\partial y})\}f_t^{s-1}\\&=(-t)\{49y^5(s(\frac{\partial f_t}{\partial x}))\}f_t^{s-1}+(-t)\{(5t^2xy^2-7ty^4)(s(\frac{\partial f_t}{\partial y}))\}f_t^{s-1}\\&=-t\{49y^5\frac{\partial}{\partial x}+(5t^2xy^2-7ty^4)\frac{\partial}{\partial y}\}f_t^s.\end{aligned}$$

を得る. 右辺にある偏微分作用素を左辺に移項して f_t^s の annihilator

$$(147+25t^3y)x(21-X_0)+49ty^5\frac{\partial}{\partial x}+(5t^3xy^2-7t^2y^4)\frac{\partial}{\partial y}$$

あるいは,

$$x(21-X_0)+\frac{1}{147+25t^3y}\{49ty^5\frac{\partial}{\partial x}+(5t^3xy^2-7t^2y^4)\frac{\partial}{\partial y}\}$$

を得る. 同様な計算を行うことで

$$(147+25t^3y)y(21-X_0)-35t^2y^4\frac{\partial}{\partial x}+(21tx+5t^3y^3)\frac{\partial}{\partial y}$$

あるいは,

$$y(21-X_0)+\frac{1}{147+25t^3y}\{-35t^2y^4\frac{\partial}{\partial x}+(21tx+5t^3y^3)\frac{\partial}{\partial y}\}$$

を構成することができる. これらは何れも, 特異点である原点に偏微分作用素としての特異性を持つ, 確定特異点型の偏微分作用素であることに注意されたい. 原点での偏微分作用素の係数の vanish の order が Euler 作用素に比べ, 1位ほど高くなっている.

4　2階の annihilator

この節では, f_t^s の2階の annihilator を構成する. 先ず, 前の節と同様に Euler 作用素を

$$X_0=7x\frac{\partial}{\partial x}+3y\frac{\partial}{\partial y}$$

とおき, $h=txy^5$ とおく. 議論の出発点となるのは次の式である.

$$(21s+1-X_0)(21s-X_0)f_t^s=s(s-1)h^2f_t^{s-2}.$$

右辺を書き変えていくことで annihilator を構成的に求めていく. Annihilator の構成をはじめるまえに, 準備として予め基本的な恒等式等をいくつか用意する. 次が成立する.

$$\begin{aligned}
s(s-1)h(\frac{\partial f_t}{\partial x})f_t^{s-2} &= -\frac{\partial}{\partial x}(21-X_0)f^s-s(\frac{\partial h}{\partial x})f_t^{s-1},\\
s(s-1)h(\frac{\partial f_t}{\partial y})f_t^{s-2} &= -\frac{\partial}{\partial y}(21-X_0)f^s-s(\frac{\partial h}{\partial y})f_t^{s-1}.
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
s(s-1)(\frac{\partial f_t}{\partial x})^2f_t^{s-2} &= (\frac{\partial}{\partial x})^2f_t^s-s(\frac{\partial^2 f_t}{\partial x^2})f_t^{s-1},\\
s(s-1)(\frac{\partial f_t}{\partial x})(\frac{\partial f_t}{\partial y})f_t^{s-2} &= (\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial y})f_t^s-s(\frac{\partial^2 f_t}{\partial x\partial y})f_t^{s-1},\\
s(s-1)(\frac{\partial f_t}{\partial y})^2f_t^{s-2} &= (\frac{\partial}{\partial y})^2f_t^s-s(\frac{\partial^2 f_t}{\partial y^2})f_t^{s-1}
\end{aligned}$$

が成立する.

準備が整ったので, 2階の annihilator の構成をはじめる. そのために $(xy^5)^2$ に注目し, $g = xy^5$ とおく. 収束冪級数環 $\mathcal{O}_{X,O}$ において

$$g(\frac{\partial f_t}{\partial x}),\ g(\frac{\partial f_t}{\partial y}),\ (\frac{\partial f_t}{\partial x})^2,\ (\frac{\partial f_t}{\partial x})(\frac{\partial f_t}{\partial y}),\ (\frac{\partial f_t}{\partial y})^2$$

が生成するイデアルを考え, $\mathcal{I}$ で表すことにする. $\mathcal{H}^2_{\{O\}}(\mathcal{O}_X)$ の元でありこのイデアル $\mathcal{I}$ により annihilate されるもの全体のなすベクトル空間を求める. 局所コホモロジーに関する双対性を用いると, $g^2 = (xy^5)^2$ はイデアル $\mathcal{I}$ に属することが分かる. 2節で行った計算と同様に, g^2 に予め因子 $147 + 25t^3y$ を掛け, 多項式環での syzygy 計算を行うことで次を得る.

$$-(147 + 25t^3y)g^2 - 35ty^3g(\frac{\partial f_t}{\partial x}) + 10t^2y^2g(\frac{\partial f_t}{\partial y}) - 7y^4(\frac{\partial f_t}{\partial x})(\frac{\partial f_t}{\partial y}) - ty^3(\frac{\partial f_t}{\partial y})^2.$$

この関係式は, g がヤコビイデアル $\mathcal{J}_t$ 上, integral であることを意味していることに注意する.

さて, 2階の annihilator 構成の議論の出発点としてこの節の最初に与えた式

$$(21s + 1 - X_0)(21s - X_0)f_t^s = s(s-1)h^2f_t^{s-2}.$$

の両辺に左から $147 + 25t^3y$ を掛け, 右辺を変形していく.

$$\begin{aligned}
&(147 + 25t^3y)(21s + 1 - X_0)(21s - X_0)f_t^s \\
&\quad = s(s-1)(147 + 25t^3y)t^2g^2f_t^{s-2} \\
&\quad = t^2s(s-1)\{-35ty^3g(\frac{\partial f_t}{\partial x}) + 10t^2y^2g(\frac{\partial f_t}{\partial y}) - 7y^4(\frac{\partial f_t}{\partial x})(\frac{\partial f_t}{\partial y}) - ty^3(\frac{\partial f_t}{\partial y})^2\}f_t^{s-2} \\
&\quad = t\{35ty^3((\frac{\partial}{\partial x})(21 - X_0)f^s + s(\frac{\partial h}{\partial x})f_t^{s-1}) + 10t^2y^2(-(\frac{\partial}{\partial y})(21 - X_0)f^s - s(\frac{\partial h}{\partial y})f_t^{s-1})\} \\
&\qquad + t^2\{7y^4((\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial y})f_t^s - s(\frac{\partial^2 f_t}{\partial x\partial y})f_t^{s-1}) - ty^3((\frac{\partial}{\partial y})^2f_t^s - s(\frac{\partial^2 f_t}{\partial y^2})f_t^{s-1})\}
\end{aligned}$$

を得る. 式の変形の際に, $h = tg$ に関する恒等式を用いた. この右辺を f_t^s と f_t^{s-1} を含む項に分けて整理すると

$$\{(35t^2y^3(\frac{\partial}{\partial x}) - 10t^3y^2(\frac{\partial}{\partial y}))(21s - X_0) + 7t^2y^4(\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial y}) - t^3y^3(\frac{\partial}{\partial y})^2\}f_t^s$$

と

$$\{35t^2y^3(\frac{\partial h}{\partial x}) - 10t^3y^2(\frac{\partial h}{\partial y}) - 7t^2y^4(\frac{\partial^2 f_t}{\partial x\partial y}) + t^3y^3(\frac{\partial^2 f_t}{\partial y^2})\}sf_t^{s-1}$$

を得る. ここで, 後者である f_t^{s-1} を含む式を計算すると

$$(-30t^4xy^6 + 42t^3y^8)sf_t^{s-1}$$

と等しくなることが分かる．そこでいま，微分作用素 A を

$$A = (147 + 25t^3y)(21s + 1 - X_0)(21s - X_0)$$
$$+(-35t^2y^3(\frac{\partial}{\partial x}) - 10t^3y^2(\frac{\partial}{\partial y}))(21s - X_0) - 7t^2y^4(\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial y}) + t^3y^3(\frac{\partial}{\partial y})^2$$

で定めると，今迄の計算は次のようにまとめることができる．

$$Af_t^s = (-30t^4xy^6 + 42t^3y^8)sf_t^{s-1}.$$

ここまでの式変形で，$s(s-1)f_t^{s-2}$ なる項が消え，式の右辺には sf_t^{s-1} を含む項のみになった．sf_t^{s-1} の係数に含まれる項，xy^6, y^8 は何れも，収束冪級数環におけるヤコビイデアル $\mathcal{J}_t$ に属す．従って，1階の annihilator を求めた時と同じ計算法を用いて，2階の annihilator を構成できることが分かる．此処から先の計算の手順は，幾つかの方法があるがここでは，多項式環での計算を先に行うことにする．$\dfrac{\partial f_t}{\partial y} = 7y^6 + 5xy^4$ より，

$$-30t^4xy^6 + 42t^3y^8 = t^3\{6y^2(\frac{\partial f_t}{\partial y}) - 60txy^6\}$$

を得ることから，右辺を次のように変形する．

$$(-30t^4xy^6 + 42t^3y^8)sf_t^{s-1} = 6t^3y^2(\frac{\partial f_t}{\partial y})sf_t^{s-1} - 60t^4xy^6(sf_t^{s-1})$$

ここで，2節で求めた関係式

$$(147 + 25t^3y)(y(xy^5)) + 35ty^4(\frac{\partial f_t}{\partial x}) + (-21x - 5t^2ty^3)(\frac{\partial f_t}{\partial y}) = 0.$$

を用いれば，3節と同様な計算を行うことで，次の2階の annihilator を得る．

$$(21s + 1 - X_0)(21s - X_0)$$
$$+\frac{1}{147 + 25t^3y}(-35t^2y^3(\frac{\partial}{\partial x}) + 10t^3y^2(\frac{\partial}{\partial y}))(21s - X_0)$$
$$+\frac{1}{147 + 25t^3y}(-7t^2y^4(\frac{\partial}{\partial x})(\frac{\partial}{\partial y}) + t^3y^3(\frac{\partial}{\partial y})^2 - 6t^3y^2(\frac{\partial}{\partial y}))$$
$$+\frac{1}{(147 + 25t^3y)^2}(-2100t^5y^4(\frac{\partial}{\partial x}) + (1260t^4x + 300t^6y^3)(\frac{\partial}{\partial y})).$$

5 考察

一般に, f^s の annihilator ideal は, $f = 0$ の特異点に関し多くの情報を含んでいるが, 特異点の性質と annihilator ideal の諸性質の関係については, 十分には解明されていない. 孤立特異点の複素解析的な性質を考えるときは, その μ-constant deformation を考え, 注目している複素解析的性質が変形に伴ってどのように変化するかを調べることが有効である. 複素解析的な孤立特異点の局所的性質に注目している場合は, 構造環としては収束冪級数環を用いるのが自然であり, 対応する f^s の annihilator は, 必然的に収束冪級数を係数に持つような偏微分作用素を考えることになる.

E_{12} 特異点に対する f_t^s の annihilators の計算から分かるように, 論文 [14] の方法に従って annihilators を構成するには, 次のような計算をパラメータ付の収束冪級数環で行うことになる.

(1) ideal membership の判定
(2) ideal quotient の計算
(3) syzygy 計算
(4) normal form の計算
(5) integral dependence relation の計算

本稿でみたように, 局所コホモロジーと多変数留数に関する双対性に基づくことで, 収束冪級数環がパラメータを含むような場合にも, 幾つかのアルゴリズムを導出し, 開発・実装することで一般の μ-constant deformation の場合もこれらの計算を exact に行うことが可能となる.

謝辞

本研究において第二著者は科学研究費補助金 (課題番号:24540162) の助成を受けている。

参 考 文 献

[1] 阿部隆行, 田島慎一, 孤立特異点に付随する代数的局所コホモロジーとヤコビイデアルに対するグレブナー基底の計算法, 数理解析研究所講究録 **1514** (2006), 141-147.

[2] J. Briançon, F. Geandier et Ph. Maisonobe, Déformation d'une singularité isolée d'hypersurface et polynômes de Bernstein, *Bull. Soc. math. France* **120** (1992), 15–49.

[3] J. Briançon, F. Geandier, Ph. Maisonobe et M. Miniconi, Algorithme de calcul du polynômes de Bernstein : cas non dégéneré, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **39** (3) (1989), 553–610.

[4] P. Cassou-Noguès, Racines de polyôme de Bernstein, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **36** (4) (1986), 1–30.

[5] P. Cassou-Noguès, Etude du comportement du polyôme de Bernstein lors d'une déformation à μ-constant de $x^a + y^b$ avec $(a, b) = 1$, *Compositio Math.* **63** (1987), 291–313.

[6] P. Cassou-Noguès, Polyôme de Bernstein générique, *Abh. math. Sem. Univ. Hamburg* **58** (1988), 103–124.

[7] A. Guimarães and A. Hefez, Bernstein-Sato polynomials and spectral numbers, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* **57** (2007), 2031–2040.

[8] F. Grandier, Déformation à nombre de Milnor constant : quelques résultats sur les polynôme de Bernstein, *Compositio Math.* **77** (1991), 131–163.

[9] H. Grassmann, G.-M. Greuel, B. Martin, W. Neumann, G. Pfister, W. Pohl, H. Schönemann and T. Siebert On an implementation of standard bases and syzygies in SINGULAR, *AAECC*, **7** (1996), 235–249.

[10] A. Grothendieck, Local Cohomology, notes by R. Hartshorne, *Lecture Notes in Math.* **41** (1967), Springer.

[11] C. Hertling and C. Stahlke, Bernstein polynomial and Tjurina numbers, *Geometricae Dedicata* **75** (1999), 137–176.

[12] 柏原正樹, b 函数と超曲面の特異性, 京都大学数理解析研究所講究録, **225** (1975), 16–53.

[13] M. Kashiwara, B-functions and holonomic systems – Rationality of roots of b-functions, *Invent. Math.* **38** (1976), 33–53.

[14] M. Kato, The b function of a μ-constant deformation of $x^7 + y^5$, *Bull. College of Science, Univ. of Ryukyus* **32** (1981), 5–10.

[15] M. Kato, The b function of a μ-constant deformation of $x^9 + y^4$, *Bull. College of Science, Univ. of Ryukyus* **33** (1982), 5–8.

[16] A. Leykin, Constructibility of the set of polynomials with a fixed Bernstein-Sato polynomials : an algorithmic approach, *J. Symbolic Computation* **32** (2001), 663–675.

[17] B. Malgrange, Le polynôme de Bernstein d'une singularité isolée, *Lecture Notes in Math* **459** (1974), 98–119.

[18] T. Mora, An algorithm to compute the equations of tangent cones, *Lecture Notes in Compu. Sci.* **144** (1982), 158–165, Springer.

[19] K. Nabeshima, A speed-up of the algorithm for computing comprehensive Gröbner systems, *Proc. ISSAC 2007*, 299–306. AMC-Press (2007).

[20] K. Nabeshima, On the computation of parametric Gröbner bases for modules and syzygies, *Japan Journal of Industrial and Applied Math.* **27** (2) (2010), 217–238.

[21] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一, 代数的局所コホモロジーを利用したスタンダード基底・グレブナー基底の実装について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1764** (2011), 102–125.

[22] 鍋島克輔, 田島慎一, パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算について–半擬斉次孤立特異点の場合–, 京都大学数理解析研究所講究録 **1784** (2012), 111–122.

[23] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一, パラメータ付き零次元代数的局所コホモロジーを用いたパラメトリック・スタンダード基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1814** (2012), 43–53.

[24] K. Nabeshima and S. Tajima, On efficient algorithms for computing parametric local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities and standard bases, *ISSAC 2014*, 351–358, ACM-Press (2014).

[25] K. Nabeshima and S. Tajima, On the computation of algebraic local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities, *Advanced Studies in Pure Mathematics.* **66** (2015), 143–159.

[26] K. Nabeshima and S. Tajima, Parametric standard bases and algebraic local cohomology for zero-dimensional ideals, preprint.

[27] 鍋島克輔, 田島慎一, 代数的局所コホモロジーを用いたパラメータ付き拡張 ideal membership アルゴリズムについて, 京都大学数理解析研究所講究録掲載予定

[28] Y. Nakamura and S Tajima, On weighted-degrees for algebraic local cohomologies associated with semiquasihomogeneous singularities, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **46** (2007), 105–117.

[29] Y. Nakamura and S. Tajima, Algebraic local cohomologies and local b-functions Attached to semiquasihomogeneous singularities with $L(f) = 2$, *IRMA Lectures in Mathematics and Theoretical Physics*, **20** (2012), 103–116.

[30] H. Nakayama, Algorithm computing the local b-function by an approximate division algorithm in $\hat{D}$, *J. Symbolic Computation* **44**(5) (2009), 449–462.

[31] M. Noro and T. Takeshima, Risa/Asir - a computer algebra system, *Proc. ISSAC 1992* 387–396, ACM-Press (1992).

[32] T. Oaku, Algorithms for the b-function and D-modules associated with a polynomial, *J. Pure and Applied Algebra*, **117, 118** (1997), 495–518.

[33] A. Suzuki and Y. Sato, A simple algorithm to compute comprehensive Gröbner bases using Gröbner Bases, *Proc. ISSAC 2006*, 326–331, AMC-Press (2006).

[34] S. Tajima and Y. Nakamura, Algebraic local cohomology class attached to quasi-homogeneous isolated hypersurface singularities, *Pub. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 1–10.

[35] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について, 京都大学数理解析研究所講究録 **1456** (2005), 126–132.

[36] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について II, 京都大学数理解析研究所講究録 **1568** (2007), 74–80.

[37] S. Tajima and Y. Nakamura, Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class, *J. Symbolic Computation* **44** (2009), 435–448.

[38] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, *Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals*, Advanced Studies in Pure Math., **56** (2009), 341–361.

[39] S. Tajima, Parametric local cohomology classes and Tjurina stratifications for μ-constant deformations of quasi-homogeneous singularities, in Several Topics on Real and Complex Singularities (2014), 189–200, World Scientific

[40] T. Yano, On the theory of b-functions, *Pub. Res. Inst. Math. Sci.* **14** (1978), 111–202.

[41] T. Yano, b-functions and exponents of hypersurface isolated singularities, *Proc. Symposia in Pure Math.* **40** Part 2 (1983), 641–652.