数理解析研究所講究録
第 1955 巻 2015 年 180-187

代数的局所コホモロジーを用いたパラメータ付き拡張 ideal membership アルゴリズムについて

鍋島克輔*
NABESHIMA, KATSUSUKE
徳島大学大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部
INSTITUTE OF SOCIO-ARTS AND SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKUSHIMA

田島慎一†
TAJIMA, SHINICHI
筑波大学大学院数理物質系数学域
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

It is known that a membership problem of ideals in a local ring, is solved by local cohomology. Here, an extended ideal membership algorithm is considered in the ring of convergent power series. The key of the proposed method is to compute syzygyies in a polynomial ring (global ring) and the use of local cohomology. It is shown that the problem in a local ring can be solved, efficiently in a "global ring". This is an epoch-making method for solving extended ideal membership problems.

1 目的

$\mathbb{C}^n$ の原点 O の開近傍を X とし，多項式 $f_1, f_2, \dots, f_s \in \mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ が $\{a \in X | f_1(a) = f_2(a) = \cdots = f_s(a) = 0\} = \{O\}$ を満たすと仮定する．このとき，収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上でのイデアル $\mathcal{I}_O = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ の所属問題は，$f_1, f_2, \dots, f_s$ により annihilate される代数的局所コホモロジー類によって解くことが可能である [12, 14].

本稿では，収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上において，多項式 h がイデアル $\mathcal{I}_O$ に含まれているとき，

$$h = p_1 f_1 + p_2 f_2 + \cdots + p_s f_s$$

となる $p_1, \dots, p_s \in \mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ を求める計算法 (拡張 ideal membership アルゴリズム) を紹介する．また，$f_1, f_2, \dots, f_s$ が係数にパラメータを持つ場合も同様に，パラメータ付き拡張 ideal membership アルゴリズムを構成することができることも述べる．

ここで注意すると，多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ 上での拡張 ideal membership 問題は $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ のグレブナー基底を用いることで解くことが可能である．しかし，本稿では，局所環である収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 上での拡張 ideal membership 問題を考えているので，p_i は冪級数となるので，簡単には求めることができない．

*nabeshima@tokushima-u.ac.jp
†tajima@math.tsukuba.ac.jp

例えば，多項式 $f_1 = 3x^2 + 2y^8, f_2 = 16xy^7 + 10y^9$ を考える．このとき，多項式環 $\mathbb{C}[x, y]$ 上で f_1, f_2 により生成されるイデアル $I = \langle f_1, f_2\rangle$ を考えると，$xy^9 \notin I$ であることは，I のグレブナー基底 G とその G によるノーマル・フォームを計算することで確認できる．しかし，収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x, y\}$ 上で f_1, f_2 により生成されるイデアル $\mathcal{I}_O = \langle f_1, f_2\rangle$ を考えると，$xy^9 \in \mathcal{I}_O$ である．実際，

$$
\begin{aligned}
xy^9 &= -\frac{8y^7}{15}\left(1-\frac{128}{75}y^4+\frac{16384}{5625}y^8-\cdots\right)f_1+\frac{15x+16y^6}{150}\left(1-\frac{128}{75}y^4+\frac{16384}{5625}y^8-\cdots\right)f_2\\
&= -\frac{8y^7}{15}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{128}{75}\right)^k y^{2^k}\right)f_1+\frac{15x+16y^6}{150}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{128}{75}\right)^k y^{2^k}\right)f_2\\
&= \frac{-80y^7}{2(128y^4+75)}f_1+\frac{15x+16y^6}{2(128y^4+75)}f_2
\end{aligned}
$$

となる．多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ と収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ では解法は違う．

本稿では，収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 上での拡張 ideal membership アルゴリズムを紹介することを目的とする．本稿で紹介するアルゴリズムは，収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ 上での問題を，多項式環 $\mathbb{C}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ 上で扱い計算するという画期的なアルゴリズムである．

本稿では，第 2 章で準備として代数的局所コホモロジー類を復習し，第 3 章では先行研究で紹介されている代数的局所コホモロジー類を使った ideal membership アルゴリズムを復習する．第 4 章が本稿の主結果であり，拡張 ideal membership アルゴリズムについて述べる．

2 準備

代数的局所コホモロジーについては論文 [4, 10, 11, 12, 14] などによって詳しく述べられている．ここでは, 代数的局所コホモロジーを簡単に復習すると共に，本稿で使う記号の定義を紹介する．

本稿では，x を n 変数 $x_1, \ldots, x_n$ の省略形として使い，0 を含む自然数の集合を $\mathbb{N}$ として，$\mathbb{C}$ は複素数体を表す．多項式環 $\mathbb{C}[x]$ に対し，$\mathbb{C}^n$ の原点 O のに台をもつ代数的局所コホモロジー $H^n_{[O]}(\mathbb{C}[x])$ を

$$H^n_{[O]}(\mathbb{C}[x]) := \lim_{k\to\infty} \mathrm{Ext}^n_{\mathbb{C}[x]}(\mathbb{C}[x]/\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle^k, \mathbb{C}[x])$$

で定める．$\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ は $x_1, \ldots, x_n$ が生成する極大イデアルである。

原点に台を持つよな代数的局所コホモロジー $\psi \in H^n_{[O]}(\mathbb{C}[x])$ は，すべて

$$\psi = \sum_{\lambda\in\mathbb{N}^n} c_\lambda \left[\frac{1}{x^{\lambda+1}}\right]$$

なる有限和により表現される。ここは，$x^{\lambda+1} = x_1^{\lambda_1+1}x_2^{\lambda_2+1}\cdots x_n^{\lambda_n+1}$ であり，$\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n$ である．計算の効率化のために，この有限和を多項式 $\sum c_\lambda \xi^\lambda$ で表すことにする．ただし, n 変数 $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ はオリジナルの n 変数 x に対応するものとする．多項式 x^α と代数的局所コホモロジー類 ξ^λ の積は

$$x^\alpha * \xi^\lambda := \begin{cases} \xi^{\lambda-\alpha}, & \lambda_i \geq \alpha_i, i = 1, \ldots, n,\\ \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

と定義される．だたし，$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n, \lambda - \alpha = (\lambda_1 - \alpha_1, \ldots, \lambda_n - \alpha_n)$ である．多項式と代数的局所コホモロジー類の積には記号 “ $*$ ” を使う．

ある項順序 $\prec$ において，代数的局所コホモロジーが

$$\psi = c_\lambda + \sum_{\xi^{\lambda'} \prec \xi^\lambda} c_{\lambda'} \xi^{\lambda'}$$

表されるとき，ξ^λ を**先頭項**と呼び $\mathrm{ht}(\psi) = \xi^\lambda$ と表し，$c_{\lambda'} \neq 0$ のとき $\xi^{\lambda'}$ を**低階項**と呼び，ψ の低階項の集合を $\mathrm{LL}(\psi) = \{\xi^{\lambda'} | \xi^{\lambda'}$ は ψ の低階項 $\}$ と表す．代数的局所コホモロジー類の集合を $\Psi \subset H^n_{[O]}(\mathbb{C}[x])$ とする．このとき，Ψ の先頭項の集合を $\mathrm{ht}(\Psi) = \{\mathrm{ht}(\psi) | \psi \in \Psi\}$ で表し，Ψ の低階項の集合を $\mathrm{LL}(\Psi) = \bigcup\{\mathrm{LL}(\psi) | \psi \in \Psi\}$ で表すようにする．

3 イデアル所属問題

$\mathbb{C}^n$ の原点 O の開近傍を X とし，多項式の集合 $F = \{f_1, f_2, \dots, f_s\} \subset \mathbb{C}[x]$ は $\{a \in X | f_1(a) = f_2(a) = \cdots = f_s(s) = 0\} = \{O\}$ を満たすとする．このとき，$f_1, f_2, \dots, f_s$ により零化される代数的局所コホモロジーを

$$H_F = \{\psi \in H^n_{[O]}(\mathbb{C}[x]) | f_1 * \psi = f_2 * \psi = \cdots = f_s * \psi = 0\}$$

とする．このとき，H_F は有限次元ベクトル空間になることが知られており，また，ベクトル空間の基底を計算するアルゴリズムは [4, 14] により述べられている．

ここで，収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x\}$ 上でのイデアル $\mathcal{I}_O = \langle F \rangle$ の所属問題を考える．次の定理より，イデアル所属問題は H_F の基底を利用することで簡単に解くことができる．

定理 1 ([12, 14]) 項順序を固定する．有限次元ベクトル空間 H_F の基底を Ψ とし，Ψ の線形結合での元が次の形をしているとする

$$\xi^\tau + \sum_{\xi^\kappa \prec \xi^\tau} c_{(\tau,\kappa)} \xi^\kappa, \quad c_{(\tau,\kappa)} \in \mathbb{C}.$$

このとき，収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x\}$ 上において，次が成り立つ．

もし，$\xi^\lambda \in \mathrm{LL}(\Psi)$ ならば，$\mathcal{I}_O$ を法として，$x^\lambda \equiv \sum_{\xi^\kappa \in \mathrm{ht}(\Psi)} c_{(\kappa,\lambda)} x^\kappa$ となる．

もし，$\xi^\lambda \in \mathrm{ht}(\Psi)$ ならば，$\mathcal{I}_O$ を法として，$x^\lambda \equiv x^\lambda$ となる．

もし，$\xi^\lambda \notin \mathrm{LL}(\Psi)$ かつ $\xi^\lambda \notin \mathrm{LL}(\Psi)$ ならば，$\mathcal{I}_O$ を法として，$x^\lambda \equiv 0$ となる．

多項式 $h \in \mathbb{C}[x]$ が収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x\}$ 上で $\mathcal{I}_O$ に所属しているかどうかは，定理 1 により h の各項の $\mathcal{I}_O$ を法とする同値関係を計算し，その和がゼロになるかどうかで判定可能である．

例 2 $F = \{3x^2y + 2xy^3 + y^4, x^3 + 3x^2y^2 + 4xy^3\}$ からなるイデアル $\mathcal{I}_O = \langle F \rangle \subset \mathbb{C}\{x, y\}$ が $h = x^4 - 6x^3y - 2xy^4$ を含むかどうかを考える．まず，H_F の基底を先行研究のアルゴリズム [14] より計算する．ここでは，変数 x は ξ, 変数 y は η に対応し，項順序は全次数辞書式項順序で $\eta \prec \xi$ とする．H_F の基底は次となる

$$\Big\{1, \xi, \xi^2, \eta, \xi\eta, \eta^2, \xi\eta^2, \eta^3, \eta^4 - \frac{1}{3}\xi^2\eta, \xi\eta^3 - 4\xi^3 - \frac{2}{3}\xi^2\eta, \eta^5 - \frac{1}{3}\xi^2\eta^2 + \xi^3,$$
$$\eta^6 - \frac{1}{3}\xi^2\eta^2 + \frac{7}{33}\xi\eta^4 + \frac{4}{3}\xi^4 + \frac{5}{33}\xi^2\eta - \frac{14}{99}\xi^2\eta^2 + \frac{14}{33}\xi^3\Big\}.$$

したがって，定理 1 より，$\mathcal{I}_O$ を法としたとき，次の同値関係が成り立つ

$$
\begin{aligned}
x^2y^2 &\equiv -\frac{1}{3}y^6\\
xy^4 &\equiv \frac{7}{33}y^6\\
x^4 &\equiv \frac{4}{3}y^6\\
x^3y &\equiv \frac{5}{33}y^6\\
x^2y^2 &\equiv -\frac{1}{3}y^5 - \frac{14}{99}y^6\\
x^3 &\equiv -4xy^3 + y^5 + \frac{14}{33}y^6\\
x^2y &\equiv -\frac{1}{3}y^4 - \frac{2}{3}xy^3.
\end{aligned}
$$

この同値関係より，

$$h \equiv \left(\frac{4}{3}y^6\right) - 6\left(\frac{5}{33}y^6\right) - 2\left(\frac{7}{33}y^6\right) = 0$$

となるので，h は $\mathbb{C}\{x, y\}$ では $\mathcal{I}_O$ に含まれる．

多項式の係数にパラメータを含む場合にもパラメータ付き代数的局所コホモロジーは計算計算可能である [5, 6, 7]．このパラメータ付き代数的局所コホモロジーを利用することによってパラメータ付き多項式の場合にもこのイデアル所属問題を同様にして解くことが可能である．

例 3 $F = \{3x^2 + 2txy^3 + y^4, 3tx^2y^2 + 5y^4 + 4xy^3\}$ からなるイデアル $\mathcal{I}_O = \langle F\rangle \subset \mathbb{C}\{x, y\}$ の所属問題についてみる．ここで，t はパラメータである．このとき，ベクトル空間 H_F の基底を計算するアルゴリズムは [5, 6, 7] で紹介されており，次のようになる．ここでは，変数 x は ξ に対応し，変数 y は η に対応するとし，項順序は全次数辞書式項順序 $\eta \prec \xi$ である．

任意のパラメータの値に対して，H_F の基底は $\left\{1, \eta, \xi, \eta^2, \xi\eta, \eta^3, \xi\eta^2, \xi\eta^3 - \frac{4}{5}\eta^4 + \left(-\frac{2}{3}t + \frac{4}{15}\right)\xi^2\right\}$ となる．

定理 1 より，任意のパラメータの値に対して，$\mathcal{I}_O$ を法として

$$x^2 \equiv \left(-\frac{2}{3}t + \frac{4}{15}\right)xy^3$$

となる．もし，$t \neq \frac{2}{5}$ ならば，$x^2 \notin \mathcal{I}_O$ となり，もし，$t = \frac{2}{5}$ ならば，$x^2 \equiv 0 \mod \mathcal{I}_O$ より，$x^2 \in \mathcal{I}_O$ であることがわかる．

4 拡張 ideal membership アルゴリズム

多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_s \in \mathbb{C}[x]$ が $\{a \in X | f_1(a) = f_2(a) = \cdots = f_s(a) = 0\} = \{O\}$ を満たすと仮定する．多項式 $f_1, f_2, \ldots, f_s$ により生成されるイデアルを，収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x\}$ で考えるとき $\mathcal{I}_O$ と表し，多項式環 $\mathbb{C}[x]$ で考えるとき I と表す．このとき，$I = \mathcal{I}_O \cap I_R$ となるような，$O \notin \mathbb{V}(I_R)$ で $I_R \subset \mathbb{C}[x]$ となるイデアル I_R が存在する．($\mathbb{V}(I_R)$ はイデアル I_R の零点集合を表す．)

ここで，多項式 $h \in \mathcal{I}_0$ と仮定する．そうすると，$gh = q_1f_1 + q_2f_2 + \cdots + q_sf_s \in \mathbb{C}[x]$ となる，$g \in I_R$ の元と $q_1, \ldots, q_s \in \mathbb{C}[x]$ が存在する（ただし，原点 O において $g \neq 0$ である）．もし，$g, q_1, \ldots, q_s$ が求められれば

$$h = \frac{q_1}{g}f_1 + \frac{q_2}{g}f_2 + \cdots + \frac{q_s}{g}f_s$$

となり，収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x\}$ 上で拡張 ideal membership 問題が解けたことになる (図 1 は計算概要を表す).

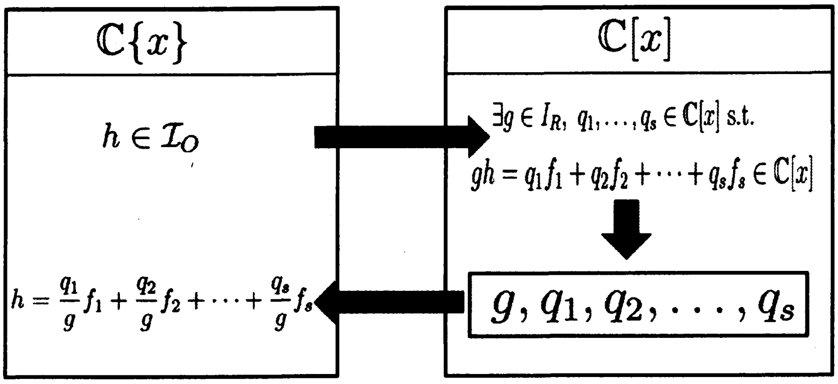

図 1: 計算概要

今，**I の零点として原点以外は座標軸上に零点が存在しないと仮定する．** このとき，g は，$\mathbb{C}[x]$ 上での I のグレブナー基底を辞書式項順序で計算することで得られる．g が得られれば $gh, f_1, f_2, \ldots, f_s$ の syzygy を $\mathbb{C}[x]$ 上で計算することより $q_1, \ldots, q_s$ を求めることができる．このとき，$gh \in \langle f_1, f_2, \ldots, f_s \rangle$ なので，syzygy 加群のグレブナー基底の元の中で，gh に対応する部分が定数となるものが存在する．その元を利用することで，拡張 ideal membership 問題が解ける．この計算方法は，局所環である収束冪級数環 $\mathbb{C}\{x\}$ 上の問題を多項式環 $\mathbb{C}[x]$ 上の問題として考え $\mathbb{C}[x]$ 上で計算するという画期的なものである．これをまとめたものが次のアルゴリズムである。

アルゴリズム (拡張 ideal membership アルゴリズム)

入力：h: 多項式で $h \in \mathcal{I}_O$,

出力：$[p_1(x), \ldots, p_s(x)]$: $h = \sum_{i=1}^{s} p_i(x) f_i$.

1. $g \in I_R$ となる g を求める．例えば，I のグレブナー基底を辞書式項順序で計算することで，g を得ることができる．
2. $gh, f_1, \ldots, f_s$ の syzygy 加群のグレブナー基底を計算をする．
3. syzygy 計算より得られたグレブナー基底の中で，gh に対応するものが定数 c となるものを選ぶ．ここで，その syzygy を $[c, q_1, q_2, \ldots, q_s]$ とする．
4. 次のように変形する．$h = \frac{q_1}{cg}f_1 + \frac{q_2}{cg}f_2 + \cdots + \frac{q_s}{cg}f_s$．したがって，$p_i(x) = \frac{q_i}{cg}$ $(1 \leq i \leq s)$.

(注意) syzygy の計算は計算量が大きいので，$f_1, f_2, \ldots, f_s$ のグレブナー基底 G を拡張グレブナー基底アルゴリズムを使い求め，gh を G で割り算し，拡張グレブナー基底アルゴリズムから

$$gh = \sum_{i=1}^{s} q_i(x) f_i, \quad q_i(x) \in \mathbb{C}[x] \quad (1 \leq i \leq s)$$

を求める方が効率が良い．ここでは，アルゴリズムの構成・説明をシンプルにするために syzygy という言葉を使った．

パラメータ付きのグレブナー基底（包括的グレブナー基底）計算アルゴリズム，パラメータ付きの syzygy 計算アルゴリズムは存在し ([1, 2, 3, 15])，著者により計算機代数システム `Risa/Asir`[9] に実装されている．したがって，この方法は $f_1, \ldots, f_s$ がパラメータを含む時にも拡張可能である．

例 4 $F = \{f_1 = 3x^2+2y^8, f_2 = 10y^9+16xy^7\}$，$\mathcal{I}_O = \langle F\rangle \subset \mathbb{C}\{x, y\}$，$I = \langle F\rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$ を考える．ベクトル空間 H_F より，$xy^9 \in \mathcal{I}_O$ であることがわかる．このとき，H_F の次元は 18 である．今，$\dim(\mathbb{C}[x]/I) = 22$ であることは用意に計算できるので，原点以外の零点が $22 - 18 = 4$ 個存在する．I のグレブナー基底を $y \prec x$ となる辞書式項順序で計算すると

$$\{128y^{15} + 75y^{11}, 8y^7x + 5y^9, 3x^2 + 2y^8\}$$

となり，y のみからなる式を見ると $128y^{15} + 75y^{11} = y^{11}(128y^4 + 75)$ より，4 点の y 座標は明らかに $128y^4 + 75 = 0$ を満たす式である．

ここで，$(128y^4 + 75)xy^9, f_1, f_2$ の syzygy を $\mathbb{C}[x, y]$ 上で計算すると

$$[0, 16y^7x + 10y^9, -3x^2 - 2y^8], \quad [-2, -80y^7, 15x + 16y^6]$$

となるので，$-2(128y^4 + 75)xy^9 + (-80y^7)f_1 + (15x + 16y^6)f_2 = 0$ である．したがって，

$$xy^9 = \frac{-80y^7}{2(128y^4 + 75)}f_1 + \frac{15x + 16y^6}{2(128y^4 + 75)}f_2$$

となる．

例 5 $F = \{f_1 = 3x^3y^5 + txy^{10}, f_2 = 5tx^2y^9 + 7xy^{11}, f_3 = 9x^4 + 6tx^2y^5 + t^2y^{10}, f_4 = 15tx^3y^4 + 21x^2y^6 + 5t^2xy^9 + 7ty^{11}, f_5 = 25t^2x^2y^8 + 70txy^{10} + 49y^{12}\}$，$\mathcal{I}_O = \langle F\rangle \subset \mathbb{C}\{x, y\}$，$I = \langle F\rangle \subset \mathbb{C}[x, y]$ を考える．ここで，t はパラメータとする．パラメータ付き代数的局所コホモロジー類の集合 H_F より，任意のパラメータの値に対して，$x^2y^{10} \in \mathcal{I}_O$ であることがわかる．($\mathbb{V}(t) = \{0\} \in \mathbb{C}$ とする．)

1. 辞書式項順序 $y \prec x$ で，I の包括的グレブナー基底系を計算すると次となる．
   パラメータ t が $\mathbb{V}(t)$ に属するとき，$\{x^4, x^3y^5, x^2y^6, xy^{11}, y^{12}\}$ がグレブナー基底となる。
   パラメータ t が $\mathbb{C}\backslash\mathbb{V}(t)$ に属するとき，$\{25t^3y^{14} + 147y^{13}, 210ty^{10}x - 25t^3y^{13} + 147y^{12}, 3y^7x^2 + ty^{12}, 15ty^4x^3 + 21y^6x^2 + 5t^2y^9x + 7ty^{11}, 9x^4 + 6ty^5x^2 + t^2y^{10}\}$ がグレブナー基底となる。

   ここで，パラメータ t が $\mathbb{V}(t)$ に属するとき，グレブナー基底に x^2y^6 の元があるので，$x^2y^{10} = y^4(x^2y^6)$ と表すことができ拡張グレブナー基底アルゴリズムより拡張 ideal membership は解くことが可能である．実際，パラメータ t が $\mathbb{V}(t)$ に属するときは，

   $$x^2y^{10} = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + 0 \cdot f_3 + \frac{1}{21}y^4 \cdot f_4 + 0 \cdot f_5$$

   と表すことができる．

パラメータ t が $\mathbb{C}\backslash\mathbb{V}(t)$ に属するときを考える．このとき，ベクトル空間 H_F の次元は 34 である．今，$\dim(\mathbb{C}[x]/I) = 35$ であることはグレブナー基底から分かるので，原点以外の零点が $35 - 34 = 1$ 個存在する．グレブナー基底の 1 変数 y のみからなる多項式をみると

$$25t^3y^{14} + 147y^{13} = y^{13}(25t^3y + 147)$$

より，残り 1 個の情報は $g = 25t^3y + 147$ にある．

2. $x^2y^{10}(25t^3y+14), f_1, f_2, f_3, f_4, f_5$ のパラメータ付き syzygy 加群のグレブナー基底を計算すると，パラメータ t が $\mathbb{C}\backslash\mathbb{V}(t)$ に属するとき，次のようになる．

```
[[0,0,0,0,-5*t*y^4*x-7*y^6,3*x^2+t*y^5],
 [0,0,0,-5*t*y^4*x-7*y^6,3*x^2+t*y^5,0],
 [0,0,-25*t^3*y^2-147*y,0,-35*t*y^4,21*x+5*t^2*y^3],
 [0,-25*t^3*y^2-147*y,0,-35*t*y^4,21*x+5*t^2*y^3,0],
 [-1,-35*t*y^3,10*t^2*y^2,0,7*y^4,-t*y^3]]
```

$x^2y^{10}(25t^3y+14)$ に対応する部分が定数となるのは，$[-1,-35ty^3,10t^2y^2,0,7y^4,-ty^3]$ より，次のように拡張 ideal membership を解くことができる

$$x^2y^{10}=\frac{-35ty^3}{25t^3y+147}f_1+\frac{10t^2y^2}{25t^3y+147}f_2+0\cdot f_3+\frac{7y^4}{25t^3y+147}f_4+\frac{-ty^3}{25t^3y+147}f_5.$$

以上まとめると，

$$\begin{cases} \mathbb{V}(t)\text{ のとき，} & x^2y^{10}=0\cdot f_1+0\cdot f_2+0\cdot f_3+\dfrac{1}{21}y^4\cdot f_4+0\cdot f_5 \\ \mathbb{C}\backslash\mathbb{V}(t)\text{ のとき，} & x^2y^{10}=\dfrac{-35ty^3}{25t^3y+147}f_1+\dfrac{10t^2y^2}{25t^3y+147}f_2+0\cdot f_3+\dfrac{7y^4}{25t^3y+147}f_4+\dfrac{-ty^3}{25t^3y+147}f_5 \end{cases}$$

となる。

本稿では議論をシンプルにするため，仮定として，『多項式の集合 F の原点以外の零点は座標軸上に無い』として議論を行った．零点が座標軸上にある場合は線形座標変換をすることで同様の議論ができ，拡張 ideal membership 問題を解くことができる．また，所属する元 h が原点以外の零点を含む場合には，冗長となる g を h に掛けることになるので，“どの点を含むか” のチェックが必要となる．h が原点以外の他の情報を持つように g を探し，h に掛ければよい．これらの操作は可能であるが本稿では詳しくは述べない．このことは，他の論文に近いうちに詳しく述べる予定である．

参 考 文 献

[1] D. Kapur, Y. Sun and D. Wang, A new algorithm for computing comprehensive Gröbner systems. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, pp. 29–36, ACM–Press, (2010).

[2] K. Nabeshima, On the computation of parametric Gröbner baes for modules and syzygies. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **27**, No.2, pp.217–238, (2010).

[3] K. Nabeshima, Stability Conditions of Monomial Bases and Comprehensive Gröbner systems. *Lecture Notes in Computer Science*, **7442**, pp.248–259, Springer, (2012).

[4] 鍋島克輔, 中村弥生, 田島慎一, 代数的局所コホモロジーを利用したスタンダード基底・グレブナー基底の実装について. 数理解析研究所講究録 **1764**, pp.102-125, (2011).

[5] 鍋島克輔, 田島慎一, パラメータ付き代数的局所コホモロジーの計算について–半擬斉次孤立特異点の場合–. 数理解析研究所講究録 **1784**, pp. 111–122, (2012).

[6] K. Nabeshima and S. Tajima, On efficient algorithms for computing parametric local cohomology classes associated with semi-quasihomogeneous singularities and standard bases. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, pp.351–358, ACM-Press, (2014).

[7] K. Nabeshima and S. Tajima, Algebraic local cohomology with parameters and parametric standard bases for zero-dimensional ideals, submitted.

[8] Y. Nakamura and S. Tajima, On weighted-degrees for algebraic local cohomologies associated with semiquasihomogeneous singularities, *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **46**, pages 105 – 117, 2007.

[9] M. Noro and T. Takeshima, Risa/Asir- A computer algebra system. *Proc. International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC)*, pp.387–396, ACM-Press, (1992).

[10] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について. 京都大学数理解析研究所講究録 **1456**, pp.126-132, (2005).

[11] 田島慎一, 零次元代数的局所コホモロジーの計算法とスタンダード基底計算について II. 京都大学数理解析研究所講究録 **1568**, pp.74-80, (2007).

[12] S. Tajima and Y. Nakamura, Annihilating ideals for an algebraic local cohomology class. *Journal of Symbolic Computation* **44**, pp.435 - 448, (2009)

[13] S. Tajima and Y. Nakamura , Algebraic local cohomology classes attached to unimodal singularities. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, **48**, pages 21–43. 2012.

[14] S. Tajima, Y. Nakamura and K. Nabeshima, Standard bases and algebraic local cohomology for zero dimensional ideals. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, **56**, pp. 341–361, (2009)

[15] V. Weispfenning, Comprehensive Gröbner bases, *Journal of Symbolic Computation*, **14**, pp. 1–29, (1992).