数理解析研究所講究録
第 1956 巻 2015 年 36-47

グラフ上のランダムウォークの infection time と cover time

国立情報学研究所　大輪　拓也 *
Takuya Ohwa
National Institute of Informatics

キーワード: random walk on graph, infection time, meeting time, hitting time, cover time, multiple random walk, product graph, möbius inversion

1　はじめに

$G=(V,E)$ は連結な有限グラフとする．V 上の $k+1$-個の独立な random walk $X_t^{(0)}, X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(k)}$ の infection time t_{infe} とは，

$$t_{infe} = \max_{k\in\{1,\ldots,k\}} t_{meet}(i)$$

で与えられる量である．ただし

$$t_{meet}(i) = \inf\{t \geq 0; X_t^{(0)} = X_t^{(i)}\}$$

である．また，V 上の random walk X_t の cover time t_{cov} とは

$$t_{cov} = \max_{x\in V} t_{hit}(x)$$

で与えられる量である．ただし

$$t_{hit}(x) = \inf\{t \geq 0; X_t = x\}$$

である．本論文の主な目標は，[6] を元に，各グラフに対する t_{infe} の期待値や確率分布の計算方法や計算例を紹介する事である．また，上記の t_{infe} と t_{cov} の定義を見比べてわかるように，t_{infe} は t_{cov} の一つの拡張とみなす事ができるので，t_{cov} や t_{hit} についても具体例を紹介する．それを観察する事で例えば以下のような事がわかる;

- 同じグラフ上では $t_{infe}, t_{cov}, t_{hit}$ の量がどのように異なるか (異ならないか)
- 一つの量に着目したとき，グラフや random walk の出発点の違いにどう影響してくるか
- Random walk の連続時間と離散時間の違い

[1]〒 101-8430 東京都千代田区一ツ橋 2-1-2 国立情報学研究所
e-mail: takuyaohwa@nii.ac.jp

1.1 設定と記号

本論文で扱う推移確率行列 $P = (P(x,y))_{x,y\in V}$ は，異なる $x, y \in V$ に対し

$$P(x,y) \neq 0 \iff \{x,y\} \in E$$

を満たすものとし，このような推移確率に従う random walk をグラフ G 上の random walk と呼ぶ[1]．複数個の random walk を考える場合，推移確率は全て同じ P に従うものとする．Random walk は連続時間もしくは離散時間を考える．連続時間に対する指数滞在時間のパラメータを θ，つまり $\mathbb{E}[\inf\{t \geq 0; X_t \neq X_0\}] = 1/\theta$ とする．

例 1.1. 推移確率

$$P(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{deg(x)} & \{x,y\} \in E \\ 0 & \{x,y\} \notin E \end{cases}$$

に従う *random walk* を *Simple Random Walk (SRW)* と呼ぶ．

2 Hitting time

はじめに，hittign time の厳密な期待値や確率密度関数の求め方を紹介する．確率論では良く知られている事実ではあるが，本論文で扱う meeting time も同様な事が成り立つため，確認の意味も含め紹介する．

$\Lambda \subset V$ に対し $t_{hit}(\Lambda) = \inf\{t \geq 0; X_t \in \Lambda\}$ と書く事とする．$\Lambda \subset V$ を固定したとき，期待値やラプラス変換は random walk の出発点に関する漸化式が成り立つ事が知られている (e.g. [3])．確率密度関数はラプラス逆変換より得られる．

命題 2.1 (ラプラス変換)**.** 連続時間のランダムウォークに対し，

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\lambda t_{hit}(\Lambda)}\right] = \begin{cases} \dfrac{\theta}{\theta+\lambda}\displaystyle\sum_{y\in V} P(x,y)\mathbb{E}_y\left[e^{-\lambda t_{hit}(\Lambda)}\right] & x \notin \Lambda \\ 1 & x \in \Lambda \end{cases}$$

が成り立つ．また，離散時間のランダムウォークに対し，

$$\mathbb{E}_x\left[e^{-\lambda t_{hit}(\Lambda)}\right] = \begin{cases} e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{y\in V} P(x,y)\mathbb{E}_y\left[e^{-\lambda t_{hit}(\Lambda)}\right] & x \notin \Lambda \\ 1 & x \in \Lambda \end{cases}$$

が成り立つ．

[1] “非零の重み付有向グラフ上の random walk” という言い方もできるだろう．

系 2.2 (期待値). $\Lambda \subset V$ とする．連続時間のランダムウォークに対し，

$$\mathbb{E}_x\left[t_{hit}(\Lambda)\right] = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta} + \displaystyle\sum_{y \in V} P(x,y)\mathbb{E}_y\left[t_{hit}(\Lambda)\right] & x \notin \Lambda \\ 0 & x \in \Lambda \end{cases}$$

が成り立つ．また，離散時間のランダムウォークに対し，

$$\mathbb{E}_x\left[t_{hit}(\Lambda)\right] = \begin{cases} 1 + \displaystyle\sum_{y \in V} P(x,y)\mathbb{E}_y\left[t_{hit}(\Lambda)\right] & x \notin \Lambda \\ 0 & x \in \Lambda \end{cases}$$

が成り立つ．

2.1 計算例

2.1.1 完全グラフ

頂点数が $N+1$ の完全グラフ上の SRW を考える．完全グラフとは，全ての二頂点を辺で結んだグラフである．

命題 2.3. $x \neq y$ とする．連続時間の *random walk* に対する確率密度関数は

$$\frac{\mathbb{P}_x(t_{hit}(y) \in dt)}{dt} = \frac{\theta}{N}e^{-\frac{\theta}{N}t}$$

である．また，離散時間の *random walk* に対する確率密度関数は

$$\mathbb{P}_x(t_{hit}(y) = t) = \left(1 - \frac{1}{N}\right)^{t-1}\frac{1}{N}$$

である．

注意 2.4.

1. グラフ (推移確率) の定義より，t_{hit} の分布は $x, y \in V$ によらない．
2. 上記命題より，t_{hit} の分布は，連続時間ならパラメータ $\frac{\theta}{N}$ の指数分布，離散時間ならパラメータ $\frac{1}{N}$ の幾何分布である事がわかる．

2.1.2 スターグラフ

スターグラフ上の連続時間 SRW を考える．簡単のため $\theta = 1$ としておく．頂点集合を $V = \{0, \ldots, N\}$，辺集合を $E = \{\{x, 0\}; x \in \{1, \ldots, N\}\}$ とする．

命題 2.5. $x, y \in V$ は $x \neq y$ とする．このとき，

$$\mathbb{E}_x[t_{hit}(y)] = \begin{cases} 1 & x \neq 0, y = 0 \\ 2N - 1 & x = 0, y \neq 0 \\ 2N & x, y \neq 0 \end{cases}.$$

が成り立つ．特に $\mathbb{E}_x[t_{hit}(y)] = O(N)$ である．

2.1.3 サイクルグラフ

サイクルグラフ上の連続時間 random walk を考える．頂点集合を $V=\{0,\dots,N-1\}$，辺集合を $E=\{\{x,y\};y=x+1 \mod N\}$ とする．推移確率を

$$P(x,y)=\begin{cases} p, & y=x+1 \mod N, \\ q, & y=x-1 \mod N, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とする．ただし $0<p<1, q=1-p$ である．$p=q=1/2$ なら SRW である．

命題 2.6.

$$\mu_\pm = \frac{\lambda+\theta\pm\sqrt{(\lambda+\theta)^2-4\theta^2pq}}{2\theta p}.$$

とおく．このとき，

$$E_x[e^{-\lambda t_{hit}(y)}]=\frac{\mu_+^{f(x-y)}(1-\mu_-^N)+\mu_-^{f(x-y)}(\mu_+^N-1)}{\mu_+^N-\mu_-^N}$$

が成り立つ．ただし $f(z)=z \mod N$ である．

系 2.7. $\xi=\frac{q}{p}$ とおく．このとき

$$\mathbb{E}_x[t_{hit}(0)]=\begin{cases} x(N-x)=O(N^2) & p=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{p-q}\left(N\left(\frac{1-\xi^x}{1-\xi^N}\right)-x\right)=O(N) & p>\frac{1}{2} \end{cases}$$

が成り立つ．

3 Cover Time

本章では cover time の計算方法と計算例を紹介する．計算には [7, 5] で得られた表現定理を用いる．また，本論文で紹介する計算例以外については [4] を参照されたい．

3.1 表現定理

Cover time を計算するための道具を紹介する．最初に記号を用意する．$\mathcal{C}(G)$ を誘導部分グラフが連結になる頂点部分集合全体とする [2]．さらに，$\mathcal{C}(G)$ の元の内 V ではないが近傍を含めると V と一致するもの全体を $\mathcal{D}(G)$，つまり

$$\mathcal{D}(G)=\{\Lambda\in\mathcal{C}(G);\Lambda\neq V, N(\Lambda)\cup\Lambda=V\}$$

とする．ただし $N(\Lambda)$ は Λ に隣接する頂点全体である．$x\in V$ を含む $\mathcal{D}(G)$ の元を $\mathcal{D}_x(G)$ とする．

[2] $\Lambda\subset V$ が $\Lambda\in\mathcal{C}(G)$ である事は，推移確率行列 P の Λ への制限 $P_\Lambda=(P(x,y))_{x,y\in\Lambda}$ が既約である事と同値である．

定理 3.1 ([7, 5]). 連続時間 *random walk* の *cover time* の確率密度関数は，各 $x, y \in V$ に対し

$$\frac{P_x(t_{cov} \in dt, X_{t_{cov}} = y)}{dt} = \sum_{\Lambda \in \mathcal{D}_x(G) \setminus \mathcal{D}_y(G)} (-1)^{|V|-|\Lambda|+1} \frac{P_x(t_{hit}(\Lambda^c) \in dt, X_{t_{hit}(\Lambda^c)} = y)}{dt}$$

を満たす．ただし $\Lambda^c = V \setminus \Lambda$ である．離散時間についても同様の等式が成り立つ．

系 3.2. 任意の関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ に対し

$$\mathbb{E}_x[f(t_{cov})] = \sum_{\Lambda \in \mathcal{D}_x(G)} (-1)^{|V|-|\Lambda|+1} \mathbb{E}_x[f(t_{hit}(\Lambda^c))]$$

が成り立つ．

上記より，t_{cov} の期待値や密度関数は

1. 各 $\Lambda \in \mathcal{D}_x(G)$ に対するの $t_{hit}(\Lambda^c)$ を計算する
2. 上記全てを $\mathcal{D}_x(G)$ 上の交代和で足し上げる

ことで得られる．$\mathcal{D}_x(G)$ の具体例は次章で紹介する．

3.2 計算例

いくつかのグラフに対する連続時間 random walk の cover time の具体例を紹介する．簡単のため $\theta = 1$ とする．

3.2.1 完全グラフ

頂点数が $N + 1$ の完全グラフ上の SRW を考える．$\mathcal{D}_x(G)$ は任意の $x \in V$ に対し

$$\mathcal{D}_x(G) = \{A \cup \{x\}; A \subsetneq V \setminus \{x\}\}$$

である．

命題 3.3. 任意の $x \in V$ に対し

$$\frac{\mathbb{P}_x(t_{cov} \in dt)}{dt} = e^{-\frac{1}{N}t}(1 - e^{-\frac{1}{N}t})^{N-1}$$

である．

注意 3.4. 上記より

$$\mathbb{E}_x[t_{cov}] = N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \sim N \log N$$

である．

3.2.2 サイクルグラフ

サイクルグラフ上の random walk を考える．グラフと推移確率の設定は 2.1.3 章と同様とする．$\mathcal{D}_x(G)$ は任意の $x \in V$ に対し

$$\mathcal{D}_x(G) = \{\{x\}^c; x = 1, \ldots, N-1\} \cup \{\{x, x+1\}^c; x = 1, \ldots, N-2\}$$

である．

命題 3.5.

$$E_x[t_{cov}] = \begin{cases} \frac{N(N-1)}{2} & p = \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{(p^N - q^N)(p^{N-1} - q^{N-1})} \left(N(pq)^{\frac{N-1}{2}} - \frac{p^N - q^N}{p-q} \right)^2 + \frac{N(p^{\frac{N-1}{2}} - q^{\frac{N-1}{2}})}{(p-q)(p^{\frac{N-1}{2}} + q^{\frac{N-1}{2}})} & p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

である．

注意 3.6. 上記より

$$E_x[t_{cov}] \sim \begin{cases} N^2 & p = \frac{1}{2} \\ \frac{N}{|p-q|} & p \neq \frac{1}{2} \end{cases}$$

である事がわかる．

3.2.3 ロリポップグラフ

ロリポップグラフ上の SRW を考える．ロリポップグラフとは，パスグラフの片方の端点を完全グラフの一点と結んだグラフである．ここでは，ロリポップグラフを

$$\begin{aligned} V &= \{0, \ldots, 3N-1\} \\ E &= \{\{x-1, x\}; x = 1, \ldots, N\} \cup \{\{x, y\}; x, y = N, \ldots, 3N-1\}. \end{aligned}$$

と表す事とする．$\mathcal{D}_x(G)$ は，

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{\{0, \ldots, N\} \cup A; A \subsetneq \{N+1, \ldots, 3N-1\}\}, \\ \mathcal{B} &= \{\{1, \ldots, N\} \cup A; A \subset \{N+1, \ldots, 3N-1\}\}. \end{aligned}$$

とおくと，

$$\mathcal{D}_x(G) = \begin{cases} \mathcal{A} & x = 0 \\ \mathcal{A} \cup \mathcal{B} & x = 1, \ldots, N \end{cases}$$

である．

命題 3.7. $x=0,\dots,N$ に対し

$$E_x[t_{cov}] = -x^2 + N^2 + 1 + 2N\sum_{k=1}^{2N-1}\frac{1}{k}$$
$$+2x\left(1-\frac{N+1}{2N^2+1}\right)\left(1+\frac{N^2}{(2N^2+1)(2N-1)}\right)B\left(\frac{1}{2N^2+1},2N\right)$$

が成り立つ．ただし $B(s,t)=\int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}dx$ はベータ関数である．

注意 3.8. 命題 *3.7* より，$N\to\infty$ で

$$E_x[t_{cov}] \sim \begin{cases} N^2 & x=0 \\ 4N^3 & x=N \end{cases}$$

である事がわかる．*SRW* の中で $\max_{x\in V} E_x[t_{cov}]$ が一番大きくなるグラフはロリポップグラフであり，かつその値は $\frac{4}{27}N^3$ である事が知られている *(cf. [2])*．この値は命題 *3.7* で N を $\frac{N}{3}$ に置き換える事でも得られる．

4 Infection Time

最初に定義を思い出しておこう．$X_t^{(0)},\dots,X_t^{(k)}$ は $k+1$-個の独立な random walks であり，$X_t^{(0)}$ と $X_t^{(i)}$ の meeting time $t_{meet}(i)=\inf\{t\ge 0; X_t^{(0)}=X_t^{(i)}\}$ を用いて infection time は

$$t_{infe}=t_{infe}(k)=\max_{k\in\{1,\dots,k\}} t_{meet}(i)$$

で表された．θ_i は連続時間 random walk $X_t^{(i)}$ の指数滞在時間のパラメータとする．

4.1 漸化式

Infection time を計算するための方法と道具を紹介する．以降のために，各 $I\subset\{1,\dots,k\}$ に対し

$$t_{meet}(I)=\min_{i\in I} t_{meet}(i)$$

としておく．包除原理より，連続時間 random walk に対し

$$\frac{\mathbb{P}_{x_0,\dots,x_k}(t_{infe}\in dt)}{dt}=\sum_{I\subset\{1,\dots,k\}}(-1)^{|\Lambda|+1}\frac{\mathbb{P}_{x_0,\dots,x_k}(t_{meet}(I)\in dt)}{dt},$$

が任意の $x_0,\dots,x_k\in V$ に対し成り立つ．離散時間についても同様の等式が成り立つ．これより，$t_{meet}(I)$ が計算できれば t_{infe} を求める事ができる．$t_{meet}(I)$ に関し，hitting time のように以下の漸化式が成り立つことがわかる．

定理 4.1 ([6], ラプラス変換). 連続時間の *random walk* に対し

$$\mathbb{E}_{x_0,\ldots,x_k}\left[e^{-\lambda t_{meet}(I)}\right]$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda+\sum_{l=0}^{k}\theta_l}\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\theta_i\sum_{y\in V}P(x_i,y)\mathbb{E}_{x_0,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_k}\left[e^{-\lambda t_{meet}(I)}\right] & x_0\neq x_j \text{ for all } j\in I \\ 1 & x_0=x_j \text{ for some } j\in I \end{cases}$$

が成り立つ．また，離散時間の *random walk* に対し

$$\mathbb{E}_{x_0,\ldots,x_k}\left[e^{-\lambda t_{meet}(I)}\right]$$
$$= \begin{cases} e^{-\lambda}\displaystyle\sum_{z_0,\ldots,z_k\in V}P(x_0,z_0)\cdots P(x_k,z_k)\mathbb{E}_{z_0,\ldots,z_k}\left[e^{-\lambda t_{meet}(I)}\right] & x_0\neq x_j \text{ for all } j\in I \\ 1 & x_0=x_j \text{ for some } j\in I \end{cases}$$

が成り立つ．

系 4.2 (期待値). 連続時間の *random walk* に対し

$$\mathbb{E}_{x_0,\ldots,x_k}\left[e^{-\lambda t_{meet}(I)}\right]$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sum_{l=0}^{k}\theta_l}\Big(1+\displaystyle\sum_{i=0}^{k}\theta_i\sum_{y\in V}P(x_i,y)\mathbb{E}_{x_0,\ldots,x_{i-1},y,x_{i+1},\ldots,x_k}[t_{meet}(I)]\Big) & x_0\neq x_j \text{ for all } j\in I \\ 0 & x_0=x_j \text{ for some } j\in I \end{cases}$$

が成り立つ．また，離散時間の *random walk* に対し

$$\mathbb{E}_{x_0,\ldots,x_k}\left[e^{-\lambda t_{meet}(I)}\right]$$
$$= \begin{cases} 1+\displaystyle\sum_{z_0,\ldots,z_k\in V}P(x_0,z_0)\cdots P(x_k,z_k)\mathbb{E}_{z_0,\ldots,z_k}[t_{meet}(I)] & x_0\neq x_j \text{ for all } j\in I \\ 0 & x_0=x_j \text{ for some } j\in I \end{cases}$$

が成り立つ．

注意 4.3. 定理 *4.1* は，元の *random walk* から拡張される *product graph* 上の *random walk* *(product chain, cf. [8])* の *hitting time* に関する漸化式と捉える事ができる．今，*product graph* $\mathbf{G}=(\mathbf{V},\mathbf{E})$ の頂点集合を $\mathbf{V}=V^{k+1}$ とし，辺集合は以下のように定義する．$\mathbf{x}=(x_0,\ldots,x_k),\mathbf{y}=(y_0,\ldots,y_k)\in\mathbf{V}$ に対し，離散時間なら

$$x_i=y_i \text{ for all } i\in\{0,\ldots,k\}$$

の場合のみ $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\in\mathbf{E}$ とし，連続なら唯一の $i\in\{0,\ldots,k\}$ が存在して

$$\{x_i,y_i\}\in E \quad \text{and} \quad x_j=y_j \text{ for all } j\in\{0,\ldots,k\}\setminus\{i\}$$

の場合のみ $\{\mathbf{x},\mathbf{y}\}\in\mathbf{E}$ とする．前者は *tensor product graph,* 後者は *cartesian product graph* と呼ばれる．元の $k+1$-個の *random walk* をベクトル成分に持つ確率過程 $\mathbf{X_t}:=(X_t^{(0)},\ldots,X_t^{(k)})$ は，これらのグラフ上の *random walk* となる．さらに，$t_{meet}(I)$ は $\mathbf{X_t}$ の

$$\{(x_0,\ldots,x_k)\in\mathbf{V};x_0=x_i \text{ for some } i\in \text{ I }\}.$$

への *hitting time* と一致する．

4.2 計算例

$k=1$ に対する $t_{infe}(=t_{meet}(1))$ の具体的な計算例を紹介する．いずれも定理 4.1 の漸化式を解く事で得られる．証明は完全グラフについてのみ紹介する．

4.2.1 完全グラフ

命題 4.4. $x_0 \neq x_1$ とする．連続時間の *random walk* に対する確率密度関数は

$$\frac{\mathbb{P}_{x_0,x_1}(t_{infe}\in dt)}{dt} = \frac{\theta_0+\theta_1}{N}e^{-\frac{\theta_0+\theta_1}{N}t}.$$

である．また，離散時間の *random walk* に対する密度関数は

$$\mathbb{P}_{x_0,x_1}(t_{infe}=t) = \left(1-\frac{N-1}{N^2}\right)^{t-1}\frac{N-1}{N^2}.$$

である．

注意 4.5. 命題 *4.4* より，$N+1$-頂点の完全グラフ上の *SRW* に対する t_{infe} は，連続時間ならパラメータ $\frac{\theta_0+\theta_1}{N}$ の指数分布，離散時間ならパラメータ $\frac{N-1}{N^2}$ の幾何分布である事がわかる．

証明: [命題 4.4 の証明] 連続時間の場合について証明する．定理 4.1 より，$x_0 \neq x_1$ なら

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{x_0,x_1}\left[e^{-\lambda t_{meet}(I)}\right]\\ &= \frac{1}{\lambda+\theta_0+\theta_1}\left(\theta_0\sum_{y\in V}P(x_0,y)\mathbb{E}_{y,x_1}\left[e^{-\lambda t_{meet}(I)}\right]+\theta_1\sum_{y\in V}P(x_1,y)\mathbb{E}_{x_0,y}\left[e^{-\lambda t_{meet}(I)}\right]\right)\end{aligned}$$

が成り立つ．グラフ (推移確率) の定義より，$x_0 \neq x_1$ なら $\mathbb{E}_{x_0,x_1}\left[e^{-\lambda t_{meet}(I)}\right]$ は全て同一視できるので，$\alpha := \mathbb{E}_{x_0,x_1}\left[e^{-\lambda t_{meet}(I)}\right]$ とおくと上記は

$$\alpha = \frac{\theta_0+\theta_1}{\lambda+\theta_0+\theta_1}\left(\frac{1+(N-1)\alpha}{N}\right)$$

と表される．これより

$$\alpha = \frac{\theta_0+\theta_1}{N\lambda+\theta_0+\theta_1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{\theta_0+\theta_1}{N}e^{-\frac{\theta_0+\theta_1}{N}t}dt$$

が得られる．

4.2.2 スターグラフ

スターグラフ上の SRW を考える．グラフの与え方は 2.1.2 章と同様とする．

命題 4.6.

$$A = \theta_0 + \theta_1,$$
$$B = \sqrt{(\theta_0^2 + \theta_1^2)\left(1 - \frac{1}{N}\right)},$$
$$C = \frac{2\theta_0\theta_1}{\theta_0^2 + \theta_1^2} + \frac{1}{N},$$
$$D = \frac{(\theta_0 + \theta_1)(\theta_0 - \theta_1)}{\theta_0^2 + \theta_1^2}.$$

とする．このとき，

$$\frac{\mathbb{P}_{x_0,x_1}(t_{infe} \in dt)}{dt} = \begin{cases} \dfrac{BC}{(1-\frac{1}{N})} e^{-At} \sinh(Bt) & x_0, x_1 \neq 0 \ \mathit{and} \ x_0 \neq x_1 \\ (1-p)e^{-At}(\theta_0 C \cosh(Bt) - \theta_1 D) & x_0 = 0 \ \mathit{and} \ x_1 \neq 0 \end{cases}$$

が成り立つ．

注意 4.7. $K = \frac{\theta_0^2+\theta_1^2}{2\theta_0\theta_1}$ とおくと，

$$\mathbb{E}_{x_0,x_1}[t_{infe}] = \begin{cases} \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{\theta_0} + \frac{1}{\theta_1}\right)\left(1 + \frac{K}{N}\right)^{-1} & x_0, x_1 \neq 0 \ \mathit{and} \ x_0 \neq x_1 \\ \frac{1}{1-p}\left(\frac{1}{\theta_1}\left(1 - \frac{1}{N}\right)\left(1 + \frac{K}{N}\right)^{-1} + \frac{1}{\theta_0+\theta_1}\right) & x_0 = 0 \ \mathit{and} \ x_1 \neq 0 \end{cases}$$

である事がわかる．命題 *2.5* では $\mathbb{E}_{x_0}[t_{hit}(x_1)] = O(N)$ であった一方，$\mathbb{E}_{x_0,x_1}[t_{infe}] = O(1)$ である．

4.2.3 サイクルグラフ

サイクルグラフ上の連続時間 random walk を考える．グラフと推移確率の設定は 2.1.3 章と同様とする．

命題 4.8.

$$\tilde{\mu}_\pm = \frac{\lambda + \theta_0 + \theta_1 \pm \sqrt{(\lambda + \theta_0 + \theta_1)^2 - 4(\theta_0 p + \theta_1 q)(\theta_0 q + \theta_1 p)}}{2(\theta_0 p + \theta_1 q)}$$

とおく．このとき，

$$E_{x,y}[e^{-\lambda t_{infe}}] = \frac{\tilde{\mu}_+^{f(x-y)}(1 - \tilde{\mu}_-^N) + \tilde{\mu}_-^{f(x-y)}(\tilde{\mu}_+^N - 1)}{\tilde{\mu}_+^N - \tilde{\mu}_-^N},$$

が成り立つ．ただし $f(z) = z \mod N$ である．

系 4.9. $\nu = \frac{\theta_0 q + \theta_1 p}{\theta_0 p + \theta_1 q}$ とおく．このとき，

$$E_{x,y}[t_{infe}] = \begin{cases} \dfrac{1}{(p-q)(\theta_0-\theta_1)}\left(\dfrac{N(1-\nu^{f(x-y)})}{1-\nu^N} - f(x-y)\right) & (p-q)(\theta_0-\theta_1) \neq 0 \\ \dfrac{(x-y)(N-(x-y))}{\theta_0+\theta_1} & (p-q)(\theta_0-\theta_1) = 0 \end{cases}$$

が成り立つ．

注意 4.10. *1.* 命題 *4.8* より，t_{infe} は $\theta_0 = \theta_1$ なら p の値に依存しない事がわかる．実際，$\theta_0 = \theta_1$ なら $\tilde{\mu}_\pm = (\lambda + 2\theta \pm \sqrt{(\lambda+2\theta)^2 - 4\theta^2})/2\theta$ となる．

2. 命題 *4.8* はサイクルグラフの *hitting time* の命題 *2.6* と似ている．実際，命題 *4.8* の $\tilde{\mu}$ を μ に置き換えたものが命題 *2.6* であり，$\theta_1 \to 0$ で $\tilde{\mu}_\pm \to \mu_\pm$ がである．

3. $\nu < 1$，もしくは同値な条件 $(p-q)(\theta_0-\theta_1) > 0$ を仮定する．このとき，

$$E_{x,0}[t_{infe}] \sim \begin{cases} \frac{N(1-\nu^x)}{(p-q)(\theta_0-\theta_1)}, & x = o(N), \\ \frac{\delta}{(p-q)(\theta_0-\theta_1)}, & N - x = \delta = o(N). \end{cases}$$

が成り立つ．これより，例えば $E_{x,0}[t_{meet}(I)] = O(N)$ である．$\nu > 1$ の場合にも同様の事が確認できる．

4.3 今後の課題

4.3.1 k-変数の漸化式と product chain の hitting time

定理 4.1 を用いて $t_{meet}(I)$ を計算するためには，$|I|$-個の変数に関する漸化式を解かなければならない．本論文では $|I| = 1$ の例のみ紹介した．$|I| = 2$ の例は完全グラフについてのみ [6] で紹介されているが，その他のグラフや一般の $|I| = k$ の場合に対する計算方法はわかっていない．この問題は，注意 4.3 で紹介した product graph 上の random walk の hitting time を計算する事と同じである [3].

4.3.2 t_{infe} の表現定理

4.1 章の冒頭で t_{infe} を包除原理による表現を紹介したが，これよりも良い表現ができるものと考えている．例えば，cover time の表現定理 3.1 はメビウス逆変換を考えることで包除原理よりも少ない和で表現できる事を示した定理である．t_{infe} に関してもこれに似た表現定理が得られるものと考えている．

[3] 例えば，product chain の hitting time に関するスペクトル表現が，もとの推移確率に関するスペクトルから得られないだろうか?

4.3.3 t_{infe} の定義の拡張

t_{infe} はその名が表すように粒子の感染を表す一つの数理モデルである．つまり，一つの感染粒子 $X_t^{(0)}$ がその他の非感染粒子 $X_t^{(1)}, \ldots, X_t^{(k)}$ に接触するまでの時間を表した量である．応用的にも理論的にも，定義を拡張した t_{infe} に対する興味がある．例えば,

1. 複数個の感染粒子から始まる場合
2. 感染粒子との接触により，非感染粒子も感染粒子になっていく場合
3. 接触による感染が，接触してからの時間に関する何らかの分布に従って起こる場合
4. 感染粒子が再び非感染粒子に戻る場合

などが考えられる．2. の場合 t_{infe} は coalescing time と呼ばれる multiple random walk の特性量である (cf. [1]).

参考文献

[1] D. J. Aldous, and J. Fill, Reversible Markov chains and random walks on graphs, available via: `http://stat-www.berkeley.edu/users/aldous/RWG/book.html`.

[2] U. Feige, *A tight upper bound on the cover time for random walks on graphs*, Random Structures Algorithms **6** (1995), no. 1, 51–54.

[3] J.R. Norris, *Markov Chains*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, Cambridge U. Press, (1997).

[4] Y. Higuchi, T. Ohwa and T. Shirai, *Exact computation for the cover times of certain classes of trees*, Journal of Math-for-Industry 2 (2010A-9), 93-98.

[5] T. Ohwa, *Combinatorial proof of the identity for cover times on finite graphs*, Interdisciplinary Information Sciences **16** (2010), 111-118.

[6] T. Ohwa, *Exact computation for meeting times and infection times of independent multiple random walks on graphs*, in preparation.

[7] T. Ohwa and T. Shirai, *Joint distribution of the cover time and the last visited point of finite Markov chains*, Kyushu J. Math. **62** (2008), 281-292.

[8] D. Levin, Y. Peres and E. Wilmer, *Markov Chains and Mixing Times*, American Mathematical Society, Providence, RI, (2009).