数理解析研究所講究録
第 1956 巻 2015 年 68-74

準モンテカルロ積分誤差の上界評価について

芳木 武仁
東京大学大学院数理科学研究科
〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 * †

概 要

本稿では，数値積分のひとつである準モンテカルロ積分の研究手法である Koksma-Hlawka 型の不等式に焦点を当てて，効率の良い数値積分を行う手法について述べる.

1 準モンテカルロ積分と Koksma-Hlawka 型不等式

$s=1$ 次元の関数 $f:[0,1)\to\mathbb{R}$ の数値積分法として，シンプソン則，ガウス則などの効率的な数値積分が知られている．準モンテカルロ積分は，次元 s の大きな場合に有効な数値積分法である．この手法では，$[0,1)^s$ 上の与えられた関数 $f(\mathbf{x})$ の積分値 $I(f):=\int_{[0,1)^s} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$ を，人為的に選んだ有限点集合 $\mathcal{P}\subset[0,1)^s$ 上の平均値

$$I_{\mathcal{P}}(f):=\frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum_{x\in\mathcal{P}} f(x)$$

によって近似する．効率よく数値積分するために，真の積分値と近似値の積分誤差

$$\mathrm{Err}(f,\mathcal{P}):=\left|\int_{[0,1)^s} f(x)\,dx-\frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{P}} f(\mathbf{x})\right|$$

を小さくするような点集合 $\mathcal{P}$ をうまく選び出すことが重要である．これを解決する重要な不等式が Koksma-Hlawka 型の不等式である．これは積分誤差 $\mathrm{Err}(f,\mathcal{P})$ を，関数 $f(x)$ のみに依存するノルム $N(f)$ と点集合 $\mathcal{P}$ のみに依存する指標（これは群指標とは関係がないここだけの用語）$W(\mathcal{P})$ の積に絶対定数 C をかけた，$C\cdot W(\mathcal{P})\cdot N(f)$ で上から抑えるものである．式で書けば

$$\mathrm{Err}(f,\mathcal{P})\le C\cdot N(f)\cdot W(\mathcal{P})$$

となる．ここで $W(\mathcal{P})$ を小さくする点集合 $\mathcal{P}$ を発見できれば，幅広い関数に対して，$\mathcal{P}$ による積分誤差 $\mathrm{Err}(f,\mathcal{P})$ を小さくすることができる．前半では，滑らかさを持つ関数たちに対する具体的な Koksma-Hlawka 型の不等式を紹介し，具体的な指標 $W(\mathcal{P})$ を小さくする点集合 $\mathcal{P}$ についての既知の結果を述べる．後半では，これらの導出方法を述べる．もし準モンテカルロ積分について興味を持たれた方は，準モンテカルロ積分の網羅的説明は，(J.Dick and F.Pillichshammer (2010) [2]) をみるのがよい.

*The works were supported by the Program for Leading Graduate Schools, MEXT, Japan.
†Email: yosiki@ms.u-tokyo.ac.jp

1.1 特別な点集合のクラス：デジタルネット

理論的な簡明さから，$\mathcal{P}$ は以下で定義されるデジタルネット (H. Niederreiter (1992) [11]) と呼ばれる特殊な点集合を用いることが多い．本稿でも，扱う点集合はすべてデジタルネットとする．

定義 1.1 (デジタルネット $\mathcal{P}$). 写像 $\phi : ((\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^n)^s \longrightarrow [0,1)^s$ を以下で定める．

$$A := (\alpha_{i,j})_{1\le i\le s, 1\le j\le n} \in ((\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^n)^s \longmapsto (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} b^{-j})_{i=1}^{s}.$$

P を $((\mathbb{Z}/b\mathbb{Z})^n)^s$ の部分群とする．この ϕ による像 $\phi(P)$ をデジタルネットと呼ぶ．n をデジタルネット $\mathcal{P}$ の精度桁という．これは点集合の元を n 桁まで 2 進展開したことを表す．本稿は簡単のため，以下 $b=2$ とし，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は $\mathbb{F}_2$ と記述する．このときは $\mathcal{P}$ の個数は，$|\mathcal{P}| = 2^{\dim \mathcal{P}}$ で定まる．

$\mathbb{F}_2^{n\times s}$ に自然に入る内積から，デジタルネット P にはその直交空間である $P^{\perp}$ が以下のように定義される．

定義 1.2 (デュアルネット $\mathcal{P}^{\perp}$). $\mathcal{P} \subset [0,1)^s$ をデジタルネットとする．まず以下で内積 $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : [0,1)^s \times \mathbb{N}_0^s \to \mathbb{F}_2$ を定義する．

$$\langle \mathrm{x} \mid \mathrm{k} \rangle := \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{i,j}\beta_{i,j}.$$

ここで，$\mathrm{x} = (\sum_{j\ge 1} \alpha_{i,j} 2^{-j})_{i=1,\dots,s}$，$\mathrm{k} = (\sum_{j\ge 1} \beta_{i,j} 2^{j-1})_{i=1,\dots,s}$ と 2 進展開したものを表す．

この内積を用いて $\mathcal{P}$ のデュアルネット $\mathcal{P}^{\perp}$ を以下で定める．

$$\mathcal{P}^{\perp} := \{\mathrm{k} \in \mathbb{N}_0^s \mid \langle \mathrm{x} \mid \mathrm{k} \rangle = 0 \text{ for any } \mathrm{x} \in \mathcal{P}\}.$$

2 滑らかな関数に対する Koksma-Hlawka 型不等式

2.1 積分誤差を抑える指標 $W_\alpha(P)$

以下 $f^{(N_1,\cdots,N_s)}(x) := \dfrac{\partial^{(N_1+\cdots+N_s)} f}{\partial x_1^{N_1}\cdots\partial x_s^{N_s}}(x)$ を表すものとする．α を正の実数とし，任意の $i=1,\dots,s$ と任意の $N_i \le \alpha$ について，s 次元関数 $f : [0,1]^s \to \mathbb{R}$ の偏導関数 $f^{(N_1,\dots,N_s)}$ が $[0,1]^s$ 上連続と仮定する．この条件を満たす関数を α-スムーズな関数とここではよぶことにする (J. Dick (2009) [1])．

このとき以下の Koksma-Hlawka 型の不等式が成立する (J. Dick (2009) [1])．

$$|\mathrm{Err}(f;\mathcal{P})| \le C_{s,\alpha} \cdot \|f\|_\alpha \cdot W_\alpha(\mathcal{P}). \tag{1}$$

$\|f\|_\alpha$ は，複雑なノルムなのでここでは省略するが，$s=1$ の場合，$\|f\|_\alpha^2 := \sum_{i=0}^{\alpha}(\int_0^1 f^{(i)}(x)\,dx)^2 + \int_0^1 |f^{(\alpha)}(x)|^2\,dx$ と書ける．例えば，$f(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{-x}$ の場合，$\|f\|_\alpha = ((\alpha+1)(1-\mathrm{e}^{-1})^2 + (1/2 - \mathrm{e}^{-2}/2))^{1/2}$ である．

Koksma-Hlawka 型不等式 (1) の点集合の積分誤差への影響の大きさを表す部分である，指標 $W_\alpha(\mathcal{P})$ は以下で定まる．

$$W_\alpha(\mathcal{P}) := \sum_{\mathrm{k}\in\mathcal{P}^{\perp}\setminus\{O\}} 2^{-\mu_\alpha(\mathrm{k})}.$$

ここで，ディック重み μ_α は，以下で定義される．

$$\mu_\alpha(\mathbf{k}) := \sum_{i=1}^{s}\sum_{j\le\alpha}(b_{i,j}+1).$$

ここで $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$ とし，$1 \leq i \leq s$ に対して，$k_i = \sum_{j=1}^{N_i} 2^{b_{i,j}}$ とおいた（$b_{i,1} > \cdots > b_{i,N_i}$）．

ディック重み μ_α の例

$s = 2, \alpha = 2$ とする．また k を

$$\mathrm{k} = (\sum_{j \geq 1} \beta_{i,j} 2^{j-1})_{i=1,2}$$

$$\begin{cases} \beta_{1,1} = 1 & \beta_{1,2} = 1 & \beta_{1,3} = 1 & \beta_{1,4} = 1 & \beta_{1,5} = 0, \ldots, \\ \beta_{2,1} = 0 & \beta_{2,2} = 0 & \beta_{2,3} = 1 & \beta_{2,4} = 0 & \beta_{2,5} = 0, \ldots, \end{cases}$$

で定める．このとき

$$\mu_2(\mathrm{k}) = (4 + 3) + 3 = 10.$$

である．

ディック重み μ_α の意味

ここでは，この重み関数と積分誤差の関係性を，定性的に説明する．

(1) より，もし $W_\alpha(\mathcal{P})$ が大きくなれば，$\mu_\alpha(\mathrm{k})$ が小さな $\mathrm{k} \in \mathcal{P}^\perp \backslash \{O\}$ が存在する．たとえば $s = 1$ の場合，$k \in \mathbb{N}$ の中で $k = 1$ が，$\mu_\alpha(k)$ を最小化する．($\mu_\alpha(1) = 1$)．ここでもし $\mathrm{k} = 1 \in \mathcal{P}^\perp$ となれば，$\mathcal{P}$ の各元 $x \in [0, 1)$ について $x = 0 + \alpha_2 2^{-2} + \cdots < 1/2$，つまり，$\mathcal{P} \subset [0, 1/2)$ となるので，$\mathrm{Err}(\mathcal{P}; f)$ を大きくしてしまう．

以上から，$W_\alpha(\mathcal{P})$ が大きければ，$\mathrm{Err}(\mathcal{P}; f)$ が大きくなることがわかる．

$W_\alpha(\mathcal{P})$ が小さな点集合 $\mathcal{P}$ の存在について

(1) より，$W_\alpha(\mathcal{P})$ が小さな点集合 $\mathcal{P}$ による準モンテカルロ積分によって，$\mathrm{Err}(\mathcal{P}; f)$ を小さくすることが出来る．そこで $W_\alpha(\mathcal{P})$ が小さな点集合 $\mathcal{P}$ の存在について研究が進められてきた．

$|\mathcal{P}| = N$ のオーダーに関しては，$W_\alpha(\mathcal{P}) \in O((\log N)^{s\alpha} N^{-\alpha})$ をみたす点集合 $\mathcal{P}$ の存在が知られている（J.Dick and F.Pillichshammer (2010) [2]）．

(1) より，これは α-スムーズな関数 f に対して $\mathrm{Err}(\mathcal{P}; f) \in O((\log N)^{s\alpha} N^{-\alpha})$ を満たす点集合の存在を示している．

また，このオーダー $W_\alpha(\mathcal{P}) \in O((\log N)^{s\alpha} N^{-\alpha})$ が $\log N$ の部分を除けば N に関して最良であることが知られている（I. F. Sharygin (1963) [12]）．

このように $W_\alpha(\mathcal{P})$ の $|\mathcal{P}| = N$ が大きくなった場合のオーダーは知られていたが，実際に $W_\alpha(\mathcal{P})$ を計算することはそう簡単ではない．これを解決するため，$W_\alpha(\mathcal{P})$ とは異なるが，それに近い量であり計算コストがあまり大きくない WAFOM が定義された．これにより，計算機で WAFOM の小さな点集合をサーチすることで $\mathrm{Err}(\mathcal{P}; f)$ を小さくする点集合 $\mathcal{P}$ を見つける手法が可能になった．

2.2 Walsh Figure of Merit : $\mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P})$

まず $\alpha = \infty$ の場合にあたる $W_\infty(\mathcal{P}) = \sum_{\mathrm{k} \in \mathcal{P}^\perp \backslash \{O\}} 2^{-\mu_\infty(\mathrm{k})}$ を考える．ここで $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}_0^s$，$1 \leq i \leq s$ に対して $k_i = \sum_{j=1}^{N_i} 2^{b_{i,j}}$（$b_{i,1} > \cdots > b_{i,N_i}$）とかけば，$\mu_\infty(\mathrm{k}) := \sum_{i=1}^{s} \sum_{j \in \mathbb{N}} b_{i,j} + 1$ である．

さきほどのディック重みの例で出てきた

$$\mathrm{k} = (\sum_{j \geq 1} \beta_{i,j} 2^{j-1})_{i=1,2}$$

$$\begin{cases} \beta_{1,1} = 1 & \beta_{1,2} = 1 & \beta_{1,3} = 1 & \beta_{1,4} = 1 & \beta_{1,5} = 0, \ldots, \\ \beta_{2,1} = 0 & \beta_{2,2} = 0 & \beta_{2,3} = 1 & \beta_{2,4} = 0 & \beta_{2,5} = 0, \ldots, \end{cases}$$

の場合，

$$\mu_\infty(\mathrm{k}) = (4 + 3 + 2 + 1) + 3 = 13$$

となる．

$W_\infty(\mathcal{P})$ は，無限和なのでこのままでは計算は有限時間で終わらない．そこで，以下のような離散化された量 Walsh Figure of Merit (WAFOM)
(($b=2$)M. Matsumoto, M. Saito, and K. Matoba (2014) [9], ($b\geq 2$)K.Suzuki (2014) [13]) を考える．

$$\mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P}) = \sum_{\mathrm{k}\in\mathcal{P}^\perp(n)\setminus\{O\}} 2^{-\mu_\infty(\mathrm{k})}.$$

ここで $\mathcal{P}^\perp(n) := \{\mathrm{k}\in\mathbb{N}_0^s \mid k_i < 2^n, \langle \mathrm{x} \mid \mathrm{k}\rangle = 0 \text{ for any } \mathrm{x}\in\mathcal{P}\}$
であり，この量は $W_\infty(\mathcal{P})$ を近似する．つまり，$W_\infty(\mathcal{P}) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P})$ がいえる．

$\mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P})$ は，今から紹介する離散化された Koksma-Hlawlka 不等式の上界に登場する．その不等式を述べるために，$f\colon [0,1)^s\to\mathbb{R}$ の離散化された関数 $f_n\colon [0,1)^s\to\mathbb{R}$ を，関数 f を一辺 2^{-n} ごとの立方体の上で平均化した階段関数で定める．このとき，f_n の積分値 $I(f_n)$ はもとの関数 f の積分値 $I(f)$ と同じである．
この離散化された関数 f_n に対する，デジタルネット $\mathcal{P}$ による準モンテカルロ積分誤差 $\mathrm{Err}(f_n;\mathcal{P})$ について，

$$\mathrm{Err}(f_n;\mathcal{P}) \leq C_{n,s}\cdot \|f\|_n \cdot \mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P}). \tag{2}$$

が成り立つ (($b=2$)M. Matsumoto, M. Saito, and K. Matoba (2014) [9], ($b\geq 2$)K.Suzuki (2014) [13])．ここで $\|f\|_n$ は (1) で $\alpha = n$ とおいたノルムである．

いま，f と f_n の積分誤差のあいだでは，

$$\mathrm{Err}(f;\mathcal{P}) \leq |I(f)-I(f_n)| + \mathrm{Err}(f_n;\mathcal{P}) + |I_{\mathcal{P}}(f_n) - I_{\mathcal{P}}(f)|$$

という関係があるが，

- $I(f) = I(f_n)$ である．
- f がリップシッツ連続なら，ある正の定数 K があって，$|I_{\mathcal{P}}(f_n) - I_{\mathcal{P}}(f)| \leq K\sqrt{s}2^{-n}$ が成り立つ．

という二つの事実から，n スムーズな関数に対しては，$\mathrm{Err}(f;\mathcal{P}) - \mathrm{Err}(f_n;\mathcal{P})$ は無視できて，$\mathrm{Err}(f;\mathcal{P})$ は $\mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P})$ で抑えられるといってよい．

WAFOM の計算可能性について
前節の $W_\alpha(\mathcal{P})$ のオーダーのところで述べたように，WAFOM は $\mathcal{P}$ が与えられたときに簡単に計算できる．
いま，$\dim\mathcal{P} + \dim\mathcal{P}^\perp(n) = \dim(\mathbb{F}_2^n)^s = ns$ がいえるので，このまま計算した場合，$\mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P})$ の計算は，$|\mathcal{P}^\perp(n)\setminus\{O\}| = 2^{ns-\dim\mathcal{P}}-1$ 回の μ_∞ の評価が必要となる．例えば $s=4$ 次元の積分を，$n=32$ ビットの精度で $2^{\dim\mathcal{P}} = 1024$ 個の元をもつ点集合で準モンテカルロ積分を行う場合，2^{118} 回ほどの計算が必要となる．これは大きすぎる．
しかし以下の公式のおかげで，$\mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P})$ の計算量は激減する (($b=2$)M. Matsumoto, M. Saito, and K. Matoba (2014) [9], ($b\geq 2$)K.Suzuki (2014) [13])．

$$\mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P}) = \frac{1}{\#(\mathcal{P})}\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{P}}\left(\prod_{1\leq i\leq s}\prod_{1\leq j\leq n}(-1)^{a_{i,j}}2^{-j} - 1\right).$$

ここで和の中の $a_{i,j}$ は，$\mathbf{x} = (\sum_{i=1}^n a_{i,j}2^{-j})_{1\leq i\leq s}\in\mathcal{P}\subset[0,1)^s$ から定まる．
この公式によれば，$\mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P})$ は $|\mathcal{P}| = 2^{\dim\mathcal{P}}$ 回の μ_∞ の評価が必要となる．さきほどの，$s=4$ 次元の積分を，$n=32$ ビットの精度で $2^{\dim\mathcal{P}} = 1024$ 個の元をもつ点集合で準モ

ンテカルロ積分を行う場合，1024 回ほどの計算が必要となる．これならば計算機の上で走らせることができる．

このことから，積分誤差を小さくする点集合を探し出すために，たくさんのデジタルネット $\mathcal{P}$ を生成し，その中から $\mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P})$ をえらぶ戦略が可能になった．実際この戦略を用いた方法で，滑らかな関数に対する積分誤差を小さくする数値実験も行われている (S. Harase and R. Ohori (2013) [6], S. Harase (2014) [5]).

$\mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P})$ が小さな点集合 $\mathcal{P}$ の存在について

$|\mathcal{P}| = N$ とする．このとき N のオーダーについては，$\mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P}) \in O(N^{-A\log N/s})$ となる点集合 $\mathcal{P}$ が存在する (($b=2$) M.Matsumoto. and T.Yoshiki (2013) [10], ($b \geq 2$) K.Suzuki (2014) [13]).

(1) より，これは n-スムーズな関数 f に対して $O(N^{-A\log N/s})$ を満たす点集合の存在を示している．

また，このオーダー $\mathrm{WAFOM}^{(n)}(\mathcal{P}) \in O(N^{-A\log N/s})$ が 定数 A の部分を除けば N に関して最良であることが知られている (($b=2$) T.Yoshiki (2013) [14], ($b \geq 2$) K.Suzuki (2014) [13]).

3 積分誤差を抑える Koksma-Hlawka 不等式の導出

ここでは，Koksma-Hlawka 不等式の導出法を簡単に紹介する．まず k 番目のウォルシュ関数 $\mathrm{wal}_{\mathbf{k}}$ を以下で定める．

$$\mathrm{wal}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) := (-1)^{\langle \mathbf{x}|\mathbf{k}\rangle}.$$

ここで内積は定義 1.2 で登場したものである．ウォルシュ関数 $\mathrm{wal}_{\mathbf{k}}$ たちは，$L^2([0,1)^s)$ の正規直交基底であることが知られている．f をこの基底たちを用いて表すウォルシュ展開は，

$$f(x) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^s} \hat{f}(\mathbf{k})\mathrm{wal}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})$$

となる．ここで k 番目のウォルシュ係数 $\hat{f}(\mathbf{k})$ は以下で定まる．

$$\hat{f}(\mathbf{k}) := \int_{[0,1)^s} f(\mathbf{x}) \cdot \mathrm{wal}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0} |\hat{f}(\mathbf{k})| < \infty$ を満たす関数 $f \in C([0,1]^s)$ に対しては，ウォルシュ展開の等式は $[0,1)^s$ の上で一様に成立する．このとき f の $\mathcal{P}$ による準モンテカルロ積分を考えると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{Err}(\mathcal{P}; f) &= \left| \int_{[0,1)^s} f(x)\, d\mathbf{x} - \frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{P}} f(\mathbf{x}) \right| \\
&= \left| \hat{f}(0) - \frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{P}}\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^s} \mathrm{wal}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\hat{f}(\mathbf{k}) \right| \\
&= \left| \hat{f}(0) - \sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}_0^s} \frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{P}} \mathrm{wal}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x})\hat{f}(\mathbf{k}) \right| \\
&= \left| \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}^\perp\setminus\{O\}} \hat{f}(\mathbf{k}) \right| \leq \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}^\perp\setminus\{O\}} \left|\hat{f}(\mathbf{k})\right|
\end{aligned}$$

となる．最後の等式は，点集合 $\mathcal{P}$ がデジタルネットの性質から成立する以下の性質 ([2])

$$\frac{1}{|\mathcal{P}|}\sum_{\mathbf{x}\in\mathcal{P}} \mathrm{wal}_{\mathbf{k}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{k} \in \mathcal{P}^\perp) \\ 0 & (\mathbf{k} \notin \mathcal{P}^\perp) \end{cases}$$

からしたがう.

$|\hat{f}(\mathrm{k})|$ の大きさは，前節で取り扱った α スムーズな関数 f については以下で評価される (J.Dick (2009) [1]).

$$|\hat{f}(\mathrm{k})| \leq C_{\alpha,s} \cdot \|f\|_{\alpha} \cdot 2^{-\mu_{\alpha}(\mathrm{k})}.$$

ここで μ_{α} は前節で定義されたディック重みである．このウォルシュ係数の評価によって，

$$|\mathrm{Err}(f;\mathcal{P})| \leq C_{s,\alpha} \cdot \|f\|_{\alpha} \cdot \left(\sum_{\mathrm{k}\in\mathcal{P}^{\perp}\setminus\{O\}} 2^{-\mu_{\alpha}(\mathrm{k})} \right).$$

つまり，(1) を得る．

最後にこの Koksma-Hlawka 不等式の最近の改良について述べる．

最近著者は，α-スムーズな関数 f に対する以下のような $\hat{f}(\mathbf{k})$ の評価を得た (Yoshiki (2014) [15]).

$$|\hat{f}(\mathbf{k})| \leq 2^{-\mu_{\alpha}(\mathbf{k})-\sum_{i=1}^{s}\min(v_i,\alpha)} \|f^{(\min(v_1,\alpha),\ldots,\min(v_s,\alpha))}\|_{L^{\infty}}.$$

ここで $\mathbf{k}=(k_1,\ldots,k_s)$，$k_i$ の 2 進展開を $k_i=\sum_{j=1}^{v_i} 2^{a_{i,j}}$ とおいた．ここから，α-スムーズな関数に対する以下の改良された Koksma-Hlawka 不等式を得る (Yoshiki (2014) [15]).

$$|\mathrm{Err}(f;\mathcal{P})| \leq \sup_{(N_1,\ldots,N_s)\in\mathbb{N}_0^s, N_i\leq\alpha} \|f^{(N_1,\ldots,N_s)}\|_{L^{\infty}} \cdot W'_{\alpha}(\mathcal{P}).$$

ここで $W'(\mathcal{P}) := \sum_{\mathbf{k}\in\mathcal{P}^{\perp}\setminus\{O\}} 2^{-\mu_{\alpha}(\mathbf{k})-\sum_{i=1}^{s}\min(v_i,\alpha)}$ であり，これは既存の指標 $W'_{\alpha}(\mathcal{P})$ よりも小さい．またこの式はノルムも単純であり，α が有限の場合だけでなく，$\alpha=\infty$ の場合も自然な拡張ができる．

4 謝辞

RIMS 共同研究「デザイン，符号，グラフおよびその周辺」にてこのような講演と執筆の機会をいただき，研究集会を企画なされた世話人の方々および参加者の方々には，まことに感謝いたします．

参考文献

[1] J. Dick, On quasi-Monte Carlo rules achieving higher order convergence, Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2008, Springer, 2009, doi:10.1137/060666639, pp. 73-96.

[2] J.Dick and F.Pillichshammer, Digital Nets and Sequences. Discrepancy Theory and Quasi-Monte Carlo Integration. Cambridge University Press, Cambridge (2010)

[3] M. Gnewuch, A. Srivastav and C. Winzen. Finding optimal volume subintervals with k points and calculating the star discrepancy are NP-hard problems. J. Complexity, 25:115-127, 2009

[4] J. M. Hammersley. Monte-Carlo methods for solving multivariable problems. Annals of the New York Academy of Science, 86:844-874, 1960.

[5] S. Harase. Quasi-Monte Carlo point sets with small t-values and WAFOM. arxiv:1406.1967v3.

[6] S. Harase and R. Ohori. A search for extensible low-WAFOM point sets. arXiv:1309.7828v2.

[7] E. Hlawka. Funktionen von beschranklter Variation in der Theorie der Gleeichverteilung. Ann. Mat. ZPura Appl., 54:325-333, 1961. (In German.)

[8] J. F. Koksma. Some theorems on diophantine inequalities. Scriptum no.5, Math. Centrum Amsterdam, 1950.

[9] M. Matsumoto, M. Saito, and K. Matoba, A computable figure of merit for Quasi-Monte Carlo point sets. Math. Comp., 83 (2014), 1233-1250.

[10] M. Matsumoto and T. Yoshiki, Existence of Higher Order Convergent Quasi-Monte Carlo Rules via Walsh Figure of Merit. Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Methods 2012, Springer, Berlin, (2013), 569-579.

[11] H. Niederreiter, Random number generation and quasi-monte carlo methods, CBMS-NSF, Philadelphia, Pennsylvania, 1992.

[12] I. F. Sharygin, A lower estimate for the error of quadrature formulas for certain classes of functions. Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz. 3 (1963), 370-376.

[13] K. Suzuki, WAFOM on abelian groups for quasi-monte carlo point sets, (2014), ArXiv:1403.7276.

[14] T. Yoshiki, A Lower Bound on WAFOM, (2014), appearing in Hiroshima Mathematical Journal.

[15] T. Yoshiki, Bounds on Walsh coefficients by dyadic difference and a new Koksma-Hlawka type inequality for Quasi-Monte Carlo integration, (2014). In preparation.