数理解析研究所講究録
第 1956 巻 2015 年 94-100

不偏ゲームとデザイン

千葉大学大学院 理学研究科　入江 佑樹
Yuki Irie
Graduate School of Science,
Chiba University

必勝形全体がデザインとなるゲームを与え，そこから局面の個数によって分布を作る．この分布が自然な形で対称分布に分解でき，特に Steiner triple system に限定すると，分解に現れる成分が 1 つであることと projective であることが同値なことを紹介する．

1　ゲームとゲームの必勝形

1.1　ゲーム

ゲームは大きく確率ゲームと組合せゲームに分けることができる．確率ゲームとは，すごろくや七並べのように，運が左右するゲームである．一方の組合せゲームとは，囲碁や将棋のように，戦略のみで勝敗が決まるゲームである．本稿では組合せゲームの特に 2 人 で対戦するゲームを述べる．

2 人組合せゲームはさらに，パルチザンゲームと不偏ゲームに分けることができる．パルチザンゲームとは，前述の囲碁や将棋のように，先手と後手で打てる手が異なるゲームのことである．例えば，囲碁であれば，白番は黒石を置くことはできない．一方の不偏ゲームは，以下で紹介するマヤゲームのように，先手と後手で打てる手が同じゲームのことである．以下，2 人組合せ不偏ゲームを単にゲームと呼ぶ．

本稿で扱うゲームは有限回で終わるものとする．ゲーム木の言葉でいえば，どの頂点から始まる有向パスの総数も有限ということである．ここでゲーム木とは，局面全体を頂点集合とし，局面 P から局面 Q に移動できるとき，P から Q に矢を作って得られるグラフである．

それでは，本稿で扱うゲームのもとになるマヤゲーム（佐藤-Welter のゲーム）を紹介する．ゲームの準備として，非負整数で番号づけられたマス目を用意する．そして，各マス目に高々 1 枚のコインを置く，ただし，置くコインの枚数は有限とする．たとえば，図 1 は 2 と 3 のマス目に置いた局面であり，集合 $\{2,3\}$ で表すことができる．一般に，$a_1,\ldots,a_k$ にコ

インが置かれた局面を $\{a_1,\dots,a_k\}$ で表す.

0	1	2	3	4	…
		●	●		

図1　2と3にコインを置いた局面

次にゲームのルールを述べる. 2人のプレイヤーは交互にコインを1枚選び, 置かれていたマス目よりも小さい番号の空いているマス目に移動する. コインは他のコインを飛び越えても良い. そして, 先に動かせなくなった方が負けである. たとえば, $\{2,3\}$ の局面からは $\{1,3\},\{0,3\},\{2,1\},\{2,0\}$ の4つの局面に移動できる. ここで, これら4つのどの局面からも $\{0,1\}$ に移動できるため, $\{2,3\}$ から始めると後手が必ず勝つことができる. このように後手が必ず勝つことができる戦略がある局面を後手必勝形と呼ぶ. 以下, 後手必勝形を単に必勝形と呼ぶ.

1.2 ゲームの必勝形

ゲームの必勝形はエネルギー (Grundy-Sprague 数) を使って求めることができる. エネルギーの定義のため mex (minimum excludant) を用意する. 非負整数の集合 $S \subsetneq \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $\operatorname{mex} S$ を S に入らない最小の非負整数と定義する. すなわち

$$\operatorname{mex} S = \min\{\, a \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid a \notin S \,\}.$$

例えば, $\operatorname{mex}\emptyset = 0, \operatorname{mex}\{0,1,2\} = 3, \operatorname{mex}\{1,2\} = 0$ である. このときゲームの局面 P のエネルギーを P から移動できる局面のエネルギー全体の mex と再帰的に定義する:

$$E(P) = \operatorname{mex}\{\, E(Q) \mid P \to Q \,\},$$

ここで $P \to Q$ は局面 P から局面 Q に移動できることを意味する. ゲームは有限回で終わるもののみを扱っているため, どの局面にもエネルギーが定義できる.

このとき次が成立する.

定理 1.1. (Grundy [3], Sprague [7]). ゲームの必勝形全体は, エネルギーが0の局面全体と一致する.

2 ゲームとデザイン

本節ではゲームとデザインのつながりを述べる.

2.1 デザイン

まず，デザインを定義する．集合 $[v] = \{0,1,\ldots,v-1\}$ と $[v]$ の k 点集合の族 $\mathcal{B} \subset \binom{[v]}{k} = \{S \subset [v] \mid \#S = k\}$ の組 $D = ([v],\mathcal{B})$ は，任意の t 点集合 $T \in \binom{[v]}{t}$ に対して，T を含む $\mathcal{B}$ の元がちょうど λ 個のとき t-(v,k,λ) デザインと呼ぶ．特に 2-$(v,3,1)$ デザインを Steiner triple system と呼ぶ．

例 2.1. 集合 $[7] = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ と

$$\mathcal{B} = \{\{0,1,2\},\{0,3,4\},\{0,5,6\},\{1,3,5\},\{1,4,6\},\{2,3,6\},\{2,4,5\}\}$$

の組は 2-(7,3,1) デザインである．

2.2 ゲームとのつながり

以下で扱うゲームは全てマヤゲームから得られるもののため，単に局面といったら，$[v]$ のある k 点集合を指すことにする．2 つの局面 P,Q に対して，$P \to Q$ はマヤゲームのルールで P から Q に移動できることを表す (すなわち，$P = \{x,a_1,\ldots,a_{k-1}\},Q = \{y,a_1,\ldots,a_{k-1}\}$ と表せて，$x > y$ となるとき $P \to Q$ と表す)．また，$\mathcal{P}(P)$ で局面 P の親全体，$\mathcal{C}(P)$ で局面 P の子全体を表す ($\mathcal{P}(P) = \left\{ Q \in \binom{[v]}{k} \;\middle|\; Q \to P \right\},\mathcal{C}(P) = \left\{ Q \in \binom{[v]}{k} \;\middle|\; P \to Q \right\}$)．

ゲームとデザインのつながりの例として，ヘキサッドゲームを紹介する．ヘキサッドゲームとはマヤゲームに次のルールを加えたゲームである:

1. $\{6,7,8,9,10,11\}$ から始める
2. 元の和が 21 以上の局面のみ移動してよい (例えば，$\{0,1,2,3,4,11\}$ は元の和が $0+1+2+3+4+11=21$ のため移動してよい)

いいかえるとヘキサッドゲームは，局面を $\left\{ \{a_1,\ldots,a_6\} \in \binom{[12]}{6} \;\middle|\; a_1+\cdots+a_6 \geq 21 \right\}$ に制限したゲームである．ヘキサッドゲームは次の性質を持つ:

定理 2.2. (Conway-Ryba [1])．ヘキサッドゲームの必勝形全体は，シャッフルラベリングの 5-(12,6,1) デザインである．

ここでシャッフルラベリングは，カードの混ぜ方であるリバースと Mongean シャッフルが生成する Mathieu 群 M_{12} が自己同形群になる 5-(12,6,1) を指す．シャッフルラベリングは，ブロックの元の和分布が特徴的など不思議な性質を持つことが知られている [2, 5, 6]．

定理 2.2 から自然に「与えられたデザインを必勝形に持つゲームは存在するのか？」という問が浮かぶ．この問の答えは存在するであり，t-$(v,t+1,1)$ デザインの場合は次のように与えられる [4]:

定理 2.3. $D=([v],\mathcal{B})$ を t-$(v,t+1,1)$ デザインとする．このとき，マヤゲームの局面を $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}$ に移動できる局面全体の和集合

$$\mathcal{L}(D)=\mathcal{B}\cup\bigcup_{B\in\mathcal{B}}\mathcal{P}(B)$$

に制限したゲーム $\Gamma(D)$ の必勝形全体は $\mathcal{B}$ である，ここで $\mathcal{P}(B)$ は B の親全体を表す．

この定理は一般のデザインに対して一般化できる．

3 ゲームの分布と対称分布分解

3.1 ゲームの分布

定理 2.3 によって t-$(v,t+1,1)$ デザイン $D=([v],\mathcal{B})$ に対して，D を必勝形とするゲーム $\Gamma(D)$ を得た．ここで，置換 $\sigma\in\mathfrak{S}_v$ に対して $D\neq D^\sigma$ であれば，$\Gamma(D)$ と $\Gamma(D^\sigma)$ それぞれの局面 $\mathcal{L}(D)$ と $\mathcal{L}(D^\sigma)$ は異なる．すなわち，同形なデザインであっても，できあがるゲームは異なる．

そこで，$\mathcal{L}(D)$ の補集合の大きさを $a_0(D)$ で表す ($a_0(D)=\binom{v}{t+1}-\#\mathcal{L}(D)$)．一般に

$$a_i(D)=\#\left\{P\in\binom{[v]}{t+1}\;\middle|\;\#(\mathcal{C}(P)\cap\mathcal{B})=i\right\}$$

とおこう，ここで $\mathcal{C}(P)$ は P の子全体である．以下，$\{a_0(D^\sigma)\mid\sigma\in\mathfrak{S}_v/\mathrm{Aut}D\}$ がどのような分布になるか考えていく．まずいくつかの例を挙げる．

例 3.1. (1-$(4,2,1)$ デザイン)．1-$(4,2,1)$ デザインの場合，a_0 の値は $0,1,2$ の 3 通りである．また，それぞれの値を取る D^σ は 1 通りずつある．これを次のように表す:

a_0	0	1	2
$\#D^\sigma$	1	1	1

例 3.2. (1-$(6,2,1)$ デザイン)．

a_0	0	1	2	3	4	5	6
$\#D^\sigma$	1	2	3	3	3	2	1

一般に次が成り立つ:

命題 3.3. 1-$(2n,2,1)$ デザインの a_0 分布の確率母関数は

$$E[q^X] = \frac{1}{(2n-1)!!}\prod_{i=1}^{n}\frac{1-q^{2i-1}}{1-q}.$$

別の例を紹介する.

例 3.4. (2-$(7,3,1)$ デザイン).

a_0	0	1	2	3	4	5	6	7
$\#D^\sigma$	1	3	5	6	6	5	3	1

この場合, 対称分布になっていることに注意してほしい.

例 3.5. (2-$(9,3,1)$ デザイン).

a_0	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$\#D^\sigma$	17	39	74	104	131	129	116	94	77	36	16	6	1

例 3.6. (5-$(12,6,1)$ デザイン).

a_0	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\#D^\sigma$	1	115	532	939	1237	1012	650	351	150	42	10	1

ここで a_0 が最大の 19 となるゲームは, ヘキサッドゲームである.

3.2 対称分布分解

a_0 分布は自然に対称分布の和に分解できる.

定理 3.7. D を t-$(v,t+1,1)$ デザインとし, a_0+a_{t+1} 全体を M とする:

$$M = \{\, a_0(D^\sigma)+a_{t+1}(D^\sigma) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_v/\mathrm{Aut}D \,\}.$$

このとき, 任意の $m \in M$ に対して

$$\{\, a_0(D^\sigma) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_v/\mathrm{Aut}D, a_0(D^\sigma)+a_{t+1}(D^\sigma) = m \,\}$$

の分布は対称分布になる.

いくつかのデザインで分解の例を紹介する.

例 3.8. (2-$(7,3,1)$ デザインの分解). 2-$(7,3,1)$ デザインの a_0+a_3 の値は 7 の 1 通りで, 現れる成分は 1 つである.

例 **3.9.** (2-(9,3,1) デザインの分解). 2-(9,3,1) デザインの $a_0 + a_3$ の値は 16, 18, 20, 22, 24 の 5 通りで, 全部で 5 つの成分が現れ, それぞれ次になる:

	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	
$a_0 + a_3$	17	39	74	104	131	129	116	94	77	36	16	6	1	840
16	17	24	37	45	51	45	37	24	17					297
18		15	28	40	49	54	49	40	28	15				318
20			9	14	24	23	22	23	24	14	9			162
22				5	6	6	7	6	7	6	6	5		54
24					1	1	1	1	1	1	1	1	1	9

例 **3.10.** (4-(11,5,1), 5-(12,6,1) デザインの分解). 5-(12,6,1) デザイン の分解は, $a_6 = a_0$ のため, 自明な分解になる. ここで, 4-(11,5,1) デザインも 5-(12,6,1) デザインと同じ分布を持つため, こちらの分解を紹介する.

	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	
$a_0 + a_5$	1	115	532	939	1237	1012	650	351	150	42	10	1	5040
20		1	2	1									4
21		6	9	9	6								30
22		10	36	58	36	10							150
23		50	101	216	216	101	50						734
24	1	8	140	259	402	259	140	8	1				1218
25		31	167	220	345	345	220	167	31				1526
26		7	44	106	155	212	155	106	44	7			836
27		2	25	62	62	77	77	62	62	25	2		456
28			7	7	12	8	8	8	12	7	7		76
29			1	1	3					3	1	1	10

最後に今回の主結果である, Steiner triple system に限定すると, 成分が 1 つであることと projective であることが同値であることの証明の概略を紹介する. 証明には次の 2 つの補題を用いる.

1 つ目は, a_i らの関係式についてである. 一般に a_i らはある関係式を満たし, 特に Steiner triple system の場合は次が得られる.

補題 3.11. $D = ([v], \mathcal{B})$ を 2-$(v,3,1)$ デザインとする. このとき次が成り立つ.

$$\sum_{i=0}^{3} a_i(D) = \frac{A}{6},$$

$$\sum_{i=0}^{3} i a_i(D) = \frac{A}{4},$$

ただし

$$A = v(v-1)(v-3).$$

特に

$$\sum_{B\neq B'\in\mathcal{B}}\#(\mathcal{P}(B)\cap\mathcal{P}(B'))=\sum_{i=0}^{3}i(i-1)a_i(D)=a_0(D)+a_3(D)+\frac{A}{12}.$$

補題 3.11 より, $a_0(D)+a_3(D)$ は, $\#(\mathcal{P}(B)\cap\mathcal{P}(B'))$ が求まればわかる. 2つ目はこの $\#(\mathcal{P}(B)\cap\mathcal{P}(B'))$ についてである.

補題 3.12. $B=\{\alpha,\epsilon,\beta\},B'=\{\alpha,\delta,\gamma\}$. $\epsilon<\beta,\epsilon<\delta<\gamma$ とするとき

$$\#(\mathcal{P}(B)\cap\mathcal{P}(B'))=\zeta(\delta,\beta)+\zeta(\gamma,\beta),$$

ただし

$$\zeta(\delta,\beta)=\begin{cases}1 & \delta\leq\beta,\\ 0 & \delta>\beta.\end{cases}$$

これらを用いて, a_0+a_3 を計算することで, 次の結果を得た.

定理 3.13. D を 2-$(v,3,1)$ デザインとする. このとき, D の a_0 分布の対称分布への分解に現れる成分がただ 1 つであることと D が射影幾何 $PG(d,2)(v=2^{d+1}-1)$ であることは同値である.

参考文献

[1] J. H. Conway and N. J. A. Sloane. Lexicographic codes: Error-correcting codes from game theory. *IEEE Transactions on Information Theory*, 32(3):337–348, May 1986.

[2] P. Diaconis, R. L. Graham, and W. M. Kantor. The Mathemtatics of Perfect Shuffles. *Advances in Applied Mathematics*, 196:175–196, 1983.

[3] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–8, 1939.

[4] 入江 佑樹. マヤゲームと Steiner system $S(5,6,12)$. 数理解析研究所講究録, 1872:160–175, 2014.

[5] J. Kahane and A. Ryba. The hexad game. *The Electronic Journal of Combinatrics*, 8(21):1–9, 2001.

[6] N. J. A. Sloane and J. H. Conway. *Sphere Packings, Lattices and Groups*. Springer, 3rd edition, 2010.

[7] R. P. Sprague. Über mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal*, 41:438–444, 1936.