数理解析研究所講究録
第1956巻 2015年 111-121

準モンテカルロ積分の尺度WAFOM

東京大学大学院数理科学研究科　鈴木　航介

Kosuke Suzuki
Graduate School of Mathematical Sciences,
The University of Tokyo

1　準モンテカルロ法とは

本稿では数値積分法の一つ，準モンテカルロ法 (QMC) の理論を概説する．とくに，近年定義された尺度 WAFOM について解説する．

いま，単位超立方体上の関数 $f\colon [0,1)^s \to \mathbb{R}$ の積分値

$$I(f) := \int_{[0,1)^s} f(x)dx$$

を数値的に求めることを考える．ここでは近似値として

$$\sum_{i=1}^{N} a_i f(x_i) \quad (a_i \in \mathbb{R})$$

を採用する．$s=1$ ならば多くの求積法が知られているので，s はある程度大きいとする．このとき単純な方法として，$s=1$ での求積公式の "直積" をとるという方法が考えられる．しかしこの方法では計算コストが次元 s に対して指数的に増加してしまう（いわゆる「次元の呪い」）．準モンテカルロ積分は，次元の呪いを回避しながら高速な誤差の収束を目指す，等重み（すなわち $a_i = N^{-1}$）の積分法である．

QMCはその名のとおり，モンテカルロ法 (MC) のアナロジーである．よく知られているように，MCはノード x_i をランダムにとる等重みの積分法である．このとき，2乗可積分関数 f に対し，積分誤差が $O(1/\sqrt{N})$ の速さで減少していくことが知られている．一方，QMCはノード x_i を決定論的 (deterministic) にとる．MCにおいて乱数列が使われているのを決定論的な列に置き換えるというのがQMCの思想である．

QMCでは決定論的な列を用いるため，任意の L^2 関数に対して近似がうまくいくのを期待するのは不可能である（とってきたノードでのみ1をとり，その他の点で0をとるような関数を想像すればよい）．したがって，関数空間を制限することにより，MCよりも高速な誤差の収束を得ることが目標となる．

QMC の成功は，全変動有界関数に対する Koksma-Hlawka の不等式に始まる．Hardy-Krause の意味での全変動を $V(f)$ とおく．N 点集合 P にたいし，P の「非一様度」を測る尺度の一つとして star-discrepancy という量 $D_N^*(P)$ が定義される．このとき，Koksma-Hlawka の不等式は

$$\mathrm{Err}(f;P) \leq V(f) \cdot D_N^*(P)$$

という不等式である．ただし，$\mathrm{Err}(f;P) := |\sum_{i=1}^N N^{-1} f(x_i) - I(f)|$ は積分誤差である．この式により，star-discrepancy $D_N^*(P)$ の値が小さければ積分誤差も小さいことが保証される．star-discrepancy の値が $O(N^{-1}(\log N)^{s-1})$ のオーダーで減衰するような点集合が，構成も含め多く知られている．すなわち，積分誤差も $O(N^{-1}(\log N)^{s-1})$ のオーダーで収束することが分かる．これは MC における収束速度 $O(1/\sqrt{N})$ よりも漸近的に速い．

現在では，高階のソボレフ空間やフーリエ係数の減衰により制御される Korobov 空間に対して $O(N^{-1+\varepsilon})$ よりも高次の収束が示されたり，もしくは全空間 $\mathbb{R}^n$ 上の関数空間が調べられているほか，Walsh figure of merit(WAFOM) と呼ばれる高次の収束と高速計算とを両立した尺度が Matsumoto-Saito-Matoba により近年定義されるなど，研究が深められている．

では，具体的にはどのように点集合を定めればよいのだろうか．QMC では，点集合として主に何らかの構造を持っている点集合を考える．QMC においてよく知られている点集合の構成法として，格子則（lattice rule）とデジタルネット (digital net) の二つがあげられる．

まず格子則について説明する．N を正整数とし，$\{x\}$ で x の小数部分を表すとする．

Definition 1. $\boldsymbol{l} = (l_1, \dots, l_s) \in \mathbb{Z}^s$ に対し

$$\boldsymbol{x}_i := \left(\left\{ \frac{il_1}{N} \right\}, \dots, \left\{ \frac{il_s}{N} \right\} \right) = \left\{ \frac{i\boldsymbol{l}}{N} \right\}$$

と定める．このとき N 点集合 $P(\boldsymbol{l}, N) := \{\boldsymbol{x}_1, \dots, \boldsymbol{x}_N\}$ で行う *QMC* を格子則という．

すなわち，格子則は，$(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^s$ に含まれる 1 次元の $\mathbb{Z}_N$-加群とみなすことができる（本稿では $\mathbb{Z}_b := \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} = \{0, 1, \dots, b-1\}$ と定める）．$(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^s$ 上の調和解析には指数関数が用いられる．そのため，格子則を用いた QMC の解析には，フーリエ解析が多く用いられる．

一方，デジタルネットは有限体上の線形空間（より一般には，$\mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ 上の加群，もしくは有限群）の構造が反映された点集合である．デジタルネットの構造を用いた調和解析には，Walsh 関数と呼ばれる関数が必要である．(とはいっても，格子則の場合と同様に可換な調和解析なので身構える必要はない)．したがって，デジタルネットを用いた QMC の解析には Walsh 解析が主に用いられる．本稿では主にデジタルネットを用いた高次の収束を達成する QMC 点集合について考察する．

本稿の残りは以下のように構成される．

- 文献紹介
- discrepancy
- デジタルネットと Walsh 解析
- 高階偏微分可能な関数の空間における高次の収束
- 近年定義された尺度 WAFOM

文献紹介

QMC のサーベイとして [5] を薦める．t-value などの本稿で説明しないが重要な対象を含めて QMC についてよくまとまっている書籍として [12] および [6] を薦める．[6] は高次の収束を達成する点集合についての近年の成果もまとめられている．格子則についての書籍として，[15] があげられる．

本稿では詳しく説明しないが，特に高次元の QMC においては N についてのオーダーだけでなく s に対する依存性も重要である．積分問題の計算量が s について指数的未満にしか増大しないとき，その問題は tractable であるという．この tractability の問題についてまとめられた書籍として，[13, 14] が著名である．

2 star-discrepancy

Discrepancy は，QMC においてもっともよく用いられる，点集合の「非一様度」をあらわす尺度の一つである．本稿では一般化された discrepancy をまず初めに定義し，その後いわゆる star-discrepancy について概説する．本章では，$P = (\boldsymbol{x}_n) \subset [0,1)^s$ を点列，$P_N := \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_N\}$ を P の最初の N 点からなる集合と定める．また，λ を $[0,1)^s$ 上のルベーグ測度とする．

まず，$A \subset [0,1)^s$ に対し，local discrepancy function$\Delta_A(P_N)$ を次のように定義する．

Definition 2.

$$\Delta_A(P_N) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} |A \cap P_N| - \lambda(A)$$

すなわち，集合 A における P_N を用いた準モンテカルロ積分誤差が local discrepancy function の値となる．

$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}([0,1)^s)$ に対し（ただしここでは $\mathcal{P}$ はべき集合を表す），点集合 P_N の $\mathcal{A}$ 上の star-discrepancy は以下のように定義される．

Definition 3.

$$D^*_{\mathcal{A}}(P_N) := \sup_{A \in \mathcal{A}} |\Delta_A(P_N)|$$

集合 $\mathcal{A}$ の取り方に応じて，さまざまな star-discrepancy が定義される．中でも一般的に単に star-discrepancy と呼ばれるのは，$\mathcal{A}$ として辺が各軸に平行な直方体で原点が左下隅にあるようなもの全体をとったものである．すなわち以下のように定義される．

Definition 4 (star-discrepancy)**.**

$$D_N^*(P) := \sup_I \left| \frac{|I \cap P_N|}{N} - \lambda(I) \right|$$

ただし I は，左下の点を原点に固定した直方体 $[0, a_1) \times \cdots \times [0, a_s)$ $(0 \le a_1, \ldots, a_s \le 1)$ すべてをうごく．また $\lambda(I)$ は I の体積をあらわす．

つまり $D_N^*(P)$ は，直方体 I の特性関数の QMC 誤差の上限である．

$\mathcal{A}$ の取り方としてはほかにも，凸集合全体や，滑らかな境界をもつ凸集合全体,（左下隅の点を固定しないような）辺が各軸に平行な直方体全体など，場面に応じて様々なものが考察されている．[4] に詳細がまとめられている．

以下本章では，狭い意味での star-discrepancy に限って話を進めていくことにしよう．star-discrepancy は，以下の定理によって QMC と結び付けられる．

Theorem 5 (J. F. Koksma (1950), E. Hlawka (1961))**.**

$$\mathrm{Err}(f; P) \le V(f) D_N^*(P),$$

ただし $V(f)$ は Hardy-Krause の意味での f の total variation, $D_N^*(P)$ は P の star-discrepancy.

この不等式により，どのような（この不等式が成立する）関数 f をもってきても，$D_N^*(P)$ が小さければ積分誤差がある程度小さくなることが保障される．その意味でこの不等式は QMC の理論における重要な不等式である

N を固定したときの $D_N^*(P)$ のオーダーについては以下が知られている．

- $D_N^*(P) \le C_s (\log N)^{s-1}/N$ となる P_N が構成可能
  (J. M. Hammersley (1960) など).
- $D_N^*(P) \ge c_s (\log N)^{(s-1)/2}/N$ (K. F. Roth(1954) など)
- 一般の s に対し，$D_N^*(P_N)$ の最良のオーダーは未解決問題.

ただし，点列として P をとらえるときは，任意の N に対して $D_N^*(P_N) \in O((\log N)^s/N)$ となる点列 P が構成されている．この時も最良オーダーは未解決問題である．すなわち，いずれの場合も $\log N$ のベキを決定する部分が未解決である．

さて，以上のことから，全変動有界な関数に対し，low-discrepancy point set（もしくは sequence)，すなわち star-discrepancy が $N^{-1+\varepsilon}$ で減衰するような P_N（もしくは点列 P）を用いて QMC を実行すれば，積分誤差が $N^{-1+\varepsilon}$ で減衰することが分かる．これは MC の積分誤差 $O(1/\sqrt{N})$ よりも漸近的に高速である．そのため，low-discrepancy point set(もしくは sequence) の考察が QMC において主要な位置を占めてきたのである．

3 デジタルネットとWalsh解析

3.1 Digital net

先ほど述べたように，デジタルネットは有限体上の線形空間（より一般には，$\mathbb{Z}_b$ 上の加群，もしくは有限群）の構造が反映された点集合である．本稿では，以下 b を2以上の整数とし，$\mathbb{Z}_b$ 上のデジタルネットを以下のように定義する．

Definition 6. dを正整数，kをb進展開$k=\sum_{i=1}^{\infty}\kappa_i b^{i-1}$をもつような非負整数とする．$\mathrm{tr}_m(k)=(\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_m)^\top\in\mathbb{Z}_b^m$ と定義する．$G_1,\ldots,G_s\in\mathbb{Z}_b^{n\times d}$ を，$\mathbb{Z}_b$ 成分の $n\times d$ 行列とする（ただし $d\leq n$）．$0\leq k<b^d$，$1\leq j\leq s$ とベクトル $\mathrm{tr}_d(k)\in\mathbb{Z}_b^d$ に対し，

$$\vec{y}_{l,j}=G_j\mathrm{tr}_d(k)\in\mathbb{Z}_b^n$$

と定める．ただし $\vec{y}_{k,j}=(y_{1,k,j},\ldots,y_{n,k,j})^\top$．このとき，$1\leq j\leq s$ に対し $x_{k,j}\in[0,1)$ を

$$x_{k,j}=\frac{y_{1,k,j}}{b}+\frac{y_{2,k,j}}{b^2}+\cdots+\frac{y_{n,k,j}}{b^n}\in[0,1)$$

と定義する．こうして，k 番目の点 $\boldsymbol{x}_k=(x_{k,1},\ldots,x_{k,s})$ を得る．

$$P=P(G_1,\ldots,G_s):=\{\boldsymbol{x}_0,\ldots,\boldsymbol{x}_{b^d-1}\}$$

とおく（P は *multiset* とみる）．このようにして行列 $G_1,\ldots,G_s$ から定められた点集合を $\mathbb{Z}_b$ 上精度桁 n の d 次元デジタルネット（*d-dimensional digital net over* $\mathbb{Z}_b$ *with precision n*），もしくは簡潔にデジタルネットという．行列 $G_1,\ldots,G_s$ を P の生成行列とよぶ．

Remark 7.

- 多くの文献において，デジタルネットには $n=d$ の条件が課される．この場合精度桁は自明なのでわざわざ *with precision n* などとは書かない．
- 生成行列を用いずに定義する方法として，デジタルネットを $\mathbb{Z}_b^{s\times n}$ の部分群として定義する流儀もある．この定義は定義 *6* よりも広い定義であるが，補題 *11* は問題なく成立するので以後の解析に不具合はない．

3.2 Walsh解析

$\omega_b=\exp(2\pi\sqrt{-1}/b)$ とおく．まず，1次元の b 進 Walsh 関数を以下のように定義する．

Definition 8 (Walsh 関数)**.** $k=\kappa_1+\kappa_2 b+\cdots+\kappa_r b^{r-1}$: b 進展開，$x=\xi_1 b^{-1}+\xi_2 b^{-2}+\cdots$: b 進小数展開．このとき，${}_b\mathrm{wal}_k\colon[0,1)\to\mathbb{C}$ を以下で定める．

$${}_b\mathrm{wal}_k(x):=\omega_b^{\sum_{j=1}^{\infty}\kappa_j\xi_j}.$$

一般の s 次元の Walsh 関数は，各変数ごとの Walsh 関数の積で定める，すなわち，$s \geq 1$, $\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_s)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_s)$ のとき，${}_b\mathrm{wal}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) := \prod_{i=1}^{s} {}_b\mathrm{wal}_{k_i}(x_i)$ と定める．以下 b を固定して考えるので $\mathrm{wal}_k(x)$ などと b を省いて記述するときも多い．

以下の性質は重要である．

Theorem 9. $\{{}_b\mathrm{wal}_k \mid k \in \mathbb{N}^s\}$ は $L^2([0,1)^s)$ の正規直交基底をなす．

よって，Walsh 展開

$$f(\boldsymbol{x}) \sim \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^s} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) \mathrm{wal}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$$

が考えられる．ここで，

$$\widehat{f}(\boldsymbol{k}) := \int_{[0,1)^s} f(\boldsymbol{x}) \overline{\mathrm{wal}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})} d\boldsymbol{x}$$

は Walsh 係数，すなわち Walsh 関数による一般化フーリエ係数である．f が $[0,1]^s$ 上 C^1 級（閉領域上のふるまいが仮定されていることに注意）であるとき，f の Walsh 展開は f 自身と一致，すなわち各点において

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{k} \in \mathbb{N}^s} \widehat{f}(\boldsymbol{k}) \mathrm{wal}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x})$$

が成立することが知られている．関数の Walsh 展開が自身と一致するという仮定のもと，QMC の積分誤差を Walsh 係数を用いて表すことが可能である．

そのために，まず dual net を定義する．

Definition 10. 正整数 $d \leq n$ をとり，$P = P(G_1, \ldots, G_s)$ を $\mathbb{Z}_b$ 上精度桁 n の d 次元デジタルネットとする．このとき，P の *dual net* を $P^\perp = P^\perp(G_1, \ldots, G_s)$ と書き，以下のように定義する．

$$P^\perp := \{\boldsymbol{k} = (k_1, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}^s \colon G_1^\top \mathrm{tr}_n(k_1) + \cdots + G_s^\top \mathrm{tr}_n(k_s) = 0\}.$$

Digital net 上の Walsh 関数の和を dual net の言葉を用いて書くことができる．

Lemma 11. P を $\mathbb{Z}_b$ 上のデジタルネットとし，$P^\perp$ をその *dual net* とする．このとき次が成立する．

$$|P|^{-1} \sum_{\boldsymbol{x} \in P} \mathrm{wal}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \textit{if } \boldsymbol{k} \in P^\perp, \\ 0 & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

これを用いるとデジタルネットを用いたQMCの積分誤差をWalsh係数を用いて表せる．すなわち，

$$|P|^{-1}\sum_{\boldsymbol{x}\in P} f(\boldsymbol{x}) - I(f) = |P|^{-1}\sum_{\boldsymbol{x}\in P}\sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^s}\widehat{f}(\boldsymbol{k})\mathrm{wal}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) - I(f)$$
$$= \sum_{\boldsymbol{k}\in\mathbb{N}^s}\widehat{f}(\boldsymbol{k})|P|^{-1}\sum_{\boldsymbol{x}\in P}\mathrm{wal}_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) - I(f)$$
$$= \sum_{\boldsymbol{k}\in P^{\perp}}\widehat{f}(\boldsymbol{k}) - \widehat{f}(0)$$
$$= \sum_{\boldsymbol{k}\in P^{\perp}\setminus\{0\}}\widehat{f}(\boldsymbol{k})$$

と計算できる．まとめると，

Lemma 12. 関数 f の *Walsh* 展開が f 自身と一致するとき，以下が成立する．

$$\mathrm{Err}(f;P) = \left|\sum_{\boldsymbol{k}\in P^{\perp}\setminus\{0\}}\widehat{f}(\boldsymbol{k})\right|.$$

よって，関数のWalsh係数のふるまいを知ることはQMCと密接に関係している．

3.3 Walsh係数の減衰

全変動有界な関数に対しては，積分誤差が $O(N^{-1+\varepsilon})$ のスピードで減衰するような点集合が取れるのであった．ここで一つの興味として，より関数空間を制限することで誤差がより高速に収束するようにできるのではないか，という問題があげられる．周期的な関数に対しては格子則がその回答の一つとなっている．一方，非周期的な関数に対してのこの類の一般論を確立したのがDickである．Dickは $[0,1]^s$ 上で α 階の混合偏導関数 $(\partial/\partial x_1)^{\alpha}\cdots(\partial/\partial x_s)^{\alpha}f$ が連続となるような関数に対し，誤差が $O(N^{-\alpha+\varepsilon})$ で減衰するような点集合の構成を示した [2]．

証明のポイントの一つは，滑らかな関数のWalsh係数の減衰を記述することである．C^{α} 級関数 f のフーリエ係数が $O(1/|k|^{\alpha})$ で減衰することはよく知られている．Dickはその事実のアナロジーとして，C^{α} 級関数 f の k 番目のWalsh係数が μ_{α} という重み関数を用いて $O(b^{-\mu_{\alpha}(k)})$ で減衰することを証明した [2, 3]．我々は μ_{α} をDick α-weightと呼んでいる．μ_{α} は以下のように定義される．

Definition 13. k の b 進展開を $k=\kappa_1 b^{c_1-1}+\cdots+\kappa_v b^{c_v-1}$ とする．ただし整数 κ_i と c_i は $0<\kappa_i\leq b-1$, $c_1>\cdots>c_v\geq 1$ をみたすようにとる（κ_i たちは *nonzero* であることに注意）．正整数 α に対し，*Dick α-weight* を $\mu_{\alpha}(k):=\sum_{i=1}^{\min(\alpha,v)}c_i$ で定義する．s 変数のときは，$\boldsymbol{k}=(k_1,\ldots,k_s)$ に対して $\mu_{\alpha}(\boldsymbol{k}):=\sum_{j=1}^{s}\mu_{\alpha}(k_j)$ と定義する．

Theorem 14. $f\colon [0,1]^s \to \mathbb{C}$ が，各変数について α 階の連続な混合偏導関数を持つとき，

$$|\widehat{f}(\boldsymbol{k})| \in O(b^{-\mu_\alpha(\boldsymbol{k})})$$

が成立する．

正確には，この定理においてオーダー記号の定数項はソボレフ空間のノルム $\|f\|_\alpha$ と定数 $C_{s,b,\alpha}$ の積で評価できる．この定理とデジタルネットを用いた QMC 積分の誤差（補題 12）とを組み合わせて，以下を得る．

Theorem 15. P をデジタルネットとする．$f\colon [0,1]^s \to \mathbb{C}$ が，各変数について α 階の連続な混合偏導関数を持つとき，

$$\mathrm{Err}(f;P) \leq C_{s,b,\alpha} \cdot \|f\|_\alpha \cdot \sum_{\boldsymbol{k} \in P^\perp \setminus \{0\}} b^{-\mu_\alpha(\boldsymbol{k})}.$$

この式はまさに Koksma-Hlawka 型の不等式となっている．すなわち，うまく P を選んで

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in P^\perp \setminus \{0\}} b^{-\mu_\alpha(\boldsymbol{k})}$$

を小さくすることができれば，積分誤差もそのオーダーで減衰するのである．

Dick は，[2] において (t,m,s)-net の一般化となる higher order digital net の概念を新しく定義した．そして，デジタルネットに対して interlacing という操作をすることにより誤差が $O(N^{-\alpha+\varepsilon})$ で減衰するようなよい higher order digital net を構成した．

Remark 16. *Yoshiki* および *S.-Yoshiki* により，C^α 級関数 f の *Walsh* 係数の減衰について漸近的によりよい結果が得られている（いずれも論文準備中）．これらの結果は，次章で説明する *WAFOM* の考察にも有効にはたらく．

4 WAFOM

Matsumoto-Saito-Matoba らは，符号理論においてランダムサーチが有効なことのアナロジーとして，QMC においても点集合をランダムサーチすることが有効であるのではないかと考えた．しかし，star-discrepancy の計算は N に関して NP-Hard であることが知られている [7]．また，Dick の不等式による尺度

$$\sum_{\boldsymbol{k} \in P^\perp \setminus \{0\}} b^{-\mu_\alpha(\boldsymbol{k})}$$

は，[1, Section 4] をもとに計算が可能であるが，特に α が大きいとき計算はやや困難である．

そこで彼らは，[10] において点集合が与えられたとき計算が高速にできるような尺度を提案した．それが Walsh figure of merit(WAFOM) と呼ばれる尺度である．WAFOM はデジタルネットに対して定義可能な尺度であり，理論的には 2 進の場合の Dick の理論の離散化で定義される．より詳しくは，精

度桁 n と同じだけの滑らかさを持つような（それゆえ非常に滑らかな）関数にたいして有効にはたらくような尺度となっている．以下 Dick weight μ と WAFOM $\mathrm{WF}(P)$ を定義する．

Definition 17 (Dick weight). *Dick weight* μ を $\mu := \mu_\infty$ で定義する．すなわち，$0 < \kappa_i \leq b-1$, $c_1 > \cdots > c_v \geq 1$ をみたすように k の b 進展開を $k = \kappa_1 b^{c_1-1} + \cdots + \kappa_v b^{c_v-1}$ と与えたとき，*Dick weight* を $\mu_\alpha(k) := \sum_{i=1}^{v} c_i$ で定義する．

Definition 18 (WAFOM).

$$\mathrm{WF}(P) := \sum_{\substack{\boldsymbol{k}\in P^\perp\setminus\{0\} \\ k_i < b^n \forall n}} b^{-\mu(\boldsymbol{k})}$$

この WAFOM の定義においては，加えるべき $\boldsymbol{k}$ の範囲が有限の範囲に制限されていることを注意しておく．Matsumoto らは，離散フーリエ反転を利用して，WAFOM の等価な別の表示を得た [10, (4.2)].

Theorem 19.

$$\mathrm{WF}(P) = -1 + |P|^{-1} \sum_{\boldsymbol{x}\in P} \prod_{i,j} (1 + \eta(\xi_{i,j}) b^{-j}),$$

ただし $\xi_{i,j}$ は x_i の b 進小数展開の j 番目の桁であり，$\eta(b_{i,j})$ は，$b_{i,j} = 0$ のとき $\eta(b_{i,j}) = b-1$ をとり，$b_{i,j} \neq 0$ のとき $\eta(b_{i,j}) = -1$ をとる関数.

本定理により，WAFOM の計算量を大幅に削減できる．WAFOM の定義では $P^\perp$ 上和をとらなければいけないのに対し，本定理を用いれば P 上の和をとるだけですむ．計算量の制約があるため，QMC においては P のサイズはそこまで大きくできないので，この公式を用いる方が WAFOM を高速に計算可能なのである．Matsumoto らは実際に数値実験も行い，ランダムサーチによって作られた低 WAFOM 点集合がいくつかの low-discrepancy sequence と比べても同等以上のパフォーマンスを達成することを確かめた．

最近では，事前計算により WAFOM の実装をさらに効率化したり [9], WAFOM と t-value とが両方ともよい頑健な点集合をサーチする [8] など，WAFOM の高速計算性を生かした研究が発展している．

WAFOM の理論的な性質についても研究が進んでいる．(2 進) WAFOM の上限のオーダーは $N^{-A\log N/s}$ (A は正定数) の形で抑えられることが Matsumoto-Yoshiki[11] により示された．彼らは WAFOM が N についての任意の多項式よりも高速に収束するような点集合が存在することを示した．このオーダーで WAFOM が収束するような点集合の構成は筆者が与えた [16]．WAFOM の b 進への一般化については筆者 [17] によって調べられた．

また，WAFOM が（離散化誤差ではなく）誤差そのものをあたえるような関数空間の研究も行われている．この研究は Remark 16 の結果に基づくものである．筆者は，重み付きの WAFOM を考えることにより強い tractability を達成する，加速的に誤差が収束する関数空間を与えた（論文執筆中）．

謝辞

本研究の一部は数物フロンティア・リーディング大学院によりサポートされた.

References

[1] Jan Baldeaux, Josef Dick, Gunther Leobacher, Dirk Nuyens, and Friedrich Pillichshammer. Efficient calculation of the worst-case error and (fast) component-by-component construction of higher order polynomial lattice rules. *Numer. Algorithms*, 59(3):403–431, 2012.

[2] Josef Dick. Walsh spaces containing smooth functions and quasi-Monte Carlo rules of arbitrary high order. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 46(3):1519–1553, 2008.

[3] Josef Dick. The decay of the Walsh coefficients of smooth functions. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 80(3):430–453, 2009.

[4] Josef Dick. Applications of geometric discrepancy in numerical analysis and statistics. Arxiv:1311.3830, 2013.

[5] Josef Dick, Frances Y. Kuo, and Ian H. Sloan. High-dimensional integration: the quasi-Monte Carlo way. *Acta Numer.*, 22:133–288, 2013.

[6] Josef Dick and Friedrich Pillichshammer. *Digital nets and sequences: Discrepancy theory and quasi-Monte Carlo integration.* Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[7] Michael Gnewuch, Anand Srivastav, and Carola Winzen. Finding optimal volume subintervals with k-points and calculating the star discrepancy are NP-hard problems. *J. Complexity*, 25(2):115–127, 2009.

[8] Shin Harase. Quasi-monte carlo point sets with small t-values and WAFOM. Arxiv:1406.1967, 2014.

[9] Shin Harase and Ryuichi Ohori. A search for extensible low-WAFOM point sets. arXiv:1309.7828, 2013.

[10] Makoto Matsumoto, Mutsuo Saito, and Kyle Matoba. A computable figure of merit for quasi-Monte Carlo point sets. *Mathematics of Computation*, 83(287):1233–1250, 2014.

[11] Makoto Matsumoto and Takehito Yoshiki. Existence of higher order convergent quasi-Monte Carlo rules via Walsh figure of merit. In *Monte Carlo and quasi-Monte Carlo methods 2012*, volume 65 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 569–579. Springer, Heidelberg, 2013.

[12] Harald Niederreiter. *Random number generation and quasi-Monte Carlo methods*, volume 63 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992.

[13] Erich Novak and Henryk Woźniakowski. *Tractability of multivariate problems. Vol. 1: Linear information*, volume 6 of *EMS Tracts in Mathematics*. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2008.

[14] Erich Novak and Henryk Woźniakowski. *Tractability of multivariate problems. Volume II: Standard information for functionals*, volume 12 of *EMS Tracts in Mathematics*. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2010.

[15] I. H. Sloan and S. Joe. *Lattice methods for multiple integration*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1994.

[16] Kosuke Suzuki. An explicit construction of point sets with large minimum Dick weight. *J. Complexity*, 30(3):347–354, 2014.

[17] Kosuke Suzuki. WAFOM on abelian groups for quasi-Monte Carlo point sets. Arxiv:1403.7276, 2014.