数理解析研究所講究録
第1961巻 2015年 17-25

On the self-adjointness of semi-relativistic Pauli-Fierz Hamiltonians

九州大学大学院数理学研究院 日高 建
Takeru Hidaka
Faculty of Mathematics, Kyushu University *

概要

本原稿は [4] に基づいて講演した内容を解説したものである．準相対論的な Pauli-Fierz 模型のハミルトニアンを定義し，自己共役性の証明について解説する．

1 Pauli-Fierz 模型

Pauli-Fierz 模型はシュレーディンガー作用素に従う粒子と量子輻射場 A が相互作用する系に関する模型である．一個の粒子と量子場の相互作用系を考える．また，粒子のスピンは考えない．まず，非相対論的な場合を紹介する．粒子は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の非相対論的シュレーディンガー作用素 $\frac{1}{2M}p^2+V$ に従うとする．ここで，$p=(-i\partial_{x_1},\cdots,-i\partial_{x_d})$ は運動量作用素で，$V:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ は外力ポテンシャルである．量子場の状態のヒルベルト空間を $\mathscr{F}$ とし，自由場のハミルトニアンを $\mathrm{H_f}$ とする．このとき，系の非結合ハミルトニアンは，$\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^d)\otimes\mathscr{F}$ 上で

$$H_0=(p^2+V)\otimes 1\!\!1+1\!\!1\otimes\mathrm{H_f}. \tag{1.1}$$

となる．H_0 と量子輻射場 A のミニマル結合 $p\to p-\alpha A$ を考えると，ハミルトニアンは，

$$H_{\mathrm{PF}}=\frac{1}{2M}(p\otimes 1\!\!1-\alpha A)^2+V\otimes 1\!\!1+1\!\!1\otimes\mathrm{H_f}. \tag{1.2}$$

となる．ここで，$\alpha\in\mathbb{R}$ を結合定数という．H_{PF} が非相対論的な Pauli-Fierz 模型のハミルトニアンである．粒子が相対論的シュレーディンガー作用素 $\sqrt{p^2+M^2}-M+V$ に従うとする．このとき，粒子と A のミニマル結合を考えると，ハミルトニアンは $\mathscr{H}$ 上で

$$H=\sqrt{(p\otimes 1\!\!1-\alpha A)^2+M^2}-M+V\otimes 1\!\!1+1\!\!1\otimes\mathrm{H_f}. \tag{1.3}$$

* email: t-hidaka@math.kyushu-u.ac.jp

となる．H を準相対論的な Pauli-Fierz 模型のハミルトニアンといい，そのスペクトルの性質が [1, 3, 7, 8, 9] で研究されている．$M(\geq 0)$ は粒子の静止質量である．以下，H を厳密に定義し，自己共役性について述べる．結合定数に制限は付けない．非相対論的な Pauli-Fierz 模型のハミルトニアンで，結合定数が十分に小さければ，Kato-Rellich の定理を応用することにより自己共役性が証明できる．結合定数の条件を外したものは [2, 5, 6] で示されている．

2 準相対論的な Pauli-Fierz 模型の定義

2.1 ボソンフォック空間

量子場の状態のヒルベルト空間は，複素ヒルベルト空間 $W = \oplus^{d-1}L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 3$ 上のボソンフォック空間であり，$\mathscr{F} = \oplus_{n=0}^{\infty}\mathscr{F}_n(W) = \oplus_{n=0}^{\infty}[\otimes_s^n W]$ と定義される．ここで，$\otimes_s^n$ は n 重対称テンソル積を表し，$\otimes_s^0 W = \oplus^{d-1}\mathbb{C}$ とする．$\mathscr{F}$ のベクトルは $(Psi^{(0)}, \Psi^{(1)}, \Psi^{(2)}, \cdots)$, $\Psi^{(n)} \in \otimes_s^n W$ と表せる．$\Omega = (1, 0, 0, \cdots)$ をボソンフォック真空という．$f \in W$ によって均された生成作用素 $a^\dagger(f)$ と消滅作用素 $a(f)$ を次のように定義する．

$$D\left(a^\dagger(f)\right) = \left\{\Psi \in \mathcal{F} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} n \left\|S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)})\right\|^2 < \infty\right\}, \tag{2.1}$$

$$\left(a^\dagger(f)\Psi\right)^{(n)} = \sqrt{n}S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)}), n \geq 1, \quad \left(a^\dagger(f)\Psi\right)^{(0)} = 0, \tag{2.2}$$

$$a(f) = (a^\dagger(f))^*. \tag{2.3}$$

$a(f)$ と $a^\dagger(f)$ は次の正準交換関係を満たす．

$$[a(f), a^\dagger(g)] = (\bar{f}, g)_W, \qquad [a(f), a(g)] = 0 = [a^\dagger(f), a^\dagger(g)]. \tag{2.4}$$

$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ で張られる有限粒子空間

$$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}} = L.H.\{\Omega, a^\dagger(h_1)\cdots a^\dagger(h_n)\Omega | h_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d), j = 1, \cdots, n, n \geq 1\} \tag{2.5}$$

は $\mathscr{F}$ の稠密な部分空間である．

W 上の閉作用素 T に対して，第二量子化作用素 $d\Gamma(T)$ を

$$d\Gamma(T) = \oplus_{n=0}^{\infty}\left[\otimes^n T^{(n)}\right] \tag{2.6}$$

によって定義する．ここで，$T^{(n)}$ は

$$T^{(0)} = 0, \quad T^{(n)} = \overline{\sum_{k=1}^{n} 1 \otimes \cdots 1 \otimes \overset{k-\mathrm{th}}{T} \otimes 1 \cdots \otimes 1|_{\otimes_s D(T)}} \tag{2.7}$$

である．

2.2 ハミルトニアンの定義

運動量 $k \in \mathbb{R}^d$ におけるボソン 1 個のエネルギーを表す関数を $\omega(k)$ とする．ω に次の仮定をする．

仮定 2.1 $\omega(k) \geq 0$ a.e. $k \in \mathbb{R}^d$.

自由場のハミルトニアンは，

$$\mathrm{H_f} = d\Gamma(\omega) \tag{2.8}$$

により与えられる．仮定 2.1 より，$\mathrm{H_f}$ は非負，自己共役作用素である．$e^r(k) = (e_1^r(k), ..., e_d^r(k))$ を d-次元偏極ベクトルとする．即ち，$e^r(k)$ は，任意の $k \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ と $r = 1, ..., d-1$ に対し，$e^r(k) \cdot e^s(k) = \delta_{rs}$, $k \cdot e^r(k) = 0$ を満たす．各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，$A(x) = (A_1(x), ..., A_d(x))$ は

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^{d-1} \left(a^{\dagger r} \left(\frac{\hat{\varphi} e_\mu^r e^{-ik\cdot x}}{\sqrt{\omega}} \right) + a^r \left(\frac{\hat{\varphi}(-\cdot) e_\mu^r e^{ik\cdot x}}{\sqrt{\omega}} \right) \right) \tag{2.9}$$

と定義される．ここで，$\hat{\varphi}$ は紫外切断関数である．$\hat{\varphi}$ に関して，以下の仮定をする．

仮定 2.2 $\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}, \omega\sqrt{\omega}\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\quad \hat{\varphi}(k) = \overline{\hat{\varphi}(-k)}$.

このとき，Nelson の解析ベクトル定理より，$A_\mu(x)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ 上で本質的自己共役である．$\mathscr{H}$ と $\int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \mathscr{F} \mathrm{d}x$ を同一視すると，$\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素 A_μ が

$$A_\mu = \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \overline{A_\mu(x)} \mathrm{d}x \tag{2.10}$$

と定義される．$A = (A_1, \cdots, A_d)$ が量子輻射場の定義である．

$$((p \otimes \mathbb{1} - A)^2 = \sum_{\mu=1}^{d} (p_\mu \otimes \mathbb{1} - A_\mu)^2 \tag{2.11}$$

と表すことにする．$(p \otimes \mathbb{1} - A)^2$ は，$D(p^2 \otimes \mathbb{1}) \cap C^\infty(\mathbb{1} \otimes N) \cap D(\mathbb{1} \otimes \mathrm{H_f})$ 上で本質的自己共役であることが知られている．簡単のために，$(p \otimes \mathbb{1} - A)^2 \lceil_{D(p^2\otimes\mathbb{1}) \cap C^\infty(\mathbb{1}\otimes N) \cap D(\mathbb{1}\otimes \mathrm{H_f})}$ の閉包を $(p \otimes \mathbb{1} - A)^2$ と書く． 従って，$\sqrt{(p \otimes \mathbb{1} - A)^2 + M^2}$ はスペクトル分解定理によって定義される．

$$T_M = \sqrt{(p \otimes \mathbb{1} - A)^2 + M^2} \tag{2.12}$$

と置く．

ハミルトニアンを定義するために，ポテンシャルのクラス V_{qf} を用意する．

定義 2.3 (V_{qf}) $V = V_+ - V_- \in V_{\mathrm{qf}} \Leftrightarrow V_+ \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$ かつ V_- は $\sqrt{p^2 + M^2}$ に対して相対有界であり，相対限界は 1 未満である．即ち，$D((p^2 + M^2)^{1/4}) \subset D(V_-^{1/2})$ であり，ある $0 \leq a < 1$ と $b \geq 0$ が存在して，

$$\|V_-^{1/2} f\| \leq a\|(p^2 + M^2)^{1/4} f\| + b\|f\| \tag{2.13}$$

が $f \in D((p^2 + M^2)^{1/4})$ に対して成り立つ．

準双線形形式を使うことにより，準相対論的 Pauli-Fierz 模型のハミルトニアンを自己共役作用素として定義することができる．$V \in V_{\mathrm{rel}} \cap V_{\mathrm{conf}}$ とする．準双線形形式 q を

$$q(F,G)=(T_M^{1/2}F,T_M^{1/2}G)+(\mathrm{H_f}^{1/2}F,\mathrm{H_f}^{1/2}G)+(V_+^{1/2}F,V_+^{1/2}G)-(V_-^{1/2}F,V_-^{1/2}G) \tag{2.14}$$

とし，定義域を

$$Q(q)=D(T_M^{1/2})\cap D(\mathrm{H_f}^{1/2})\cap D(V_+^{1/2}). \tag{2.15}$$

とする．$V \in V_{\mathrm{qf}}$ のとき，準双線形形式 q に同伴する自己共役作用素 H が存在する．即ち，$D(|H|^{1/2})=Q(q)$ であり，$q(F,G)=\int_{\sigma(H)}\lambda d(E_\lambda F,G)$．ここで，$E_\lambda$ は H に同伴するスペクトル測度である．H は

$$H=T_M \dot{+} V_+\otimes 1\!\!1 \dot{-} V_-\otimes 1\!\!1 \dot{+} 1\!\!1\otimes \mathrm{H_f}. \tag{2.16}$$

と書くことができる．以下，$V\otimes 1\!\!1$，$1\!\!1\otimes \mathrm{H_f}$ といった作用素を，単に，V，$\mathrm{H_f}$ と書くことにする．

2.3 本質的自己共役性

$$\mathscr{D}=D(|p|)\cap D(V)\cap D(\mathrm{H_f}) \tag{2.17}$$

と置く．また，V_{qf} の二つの部分クラス V_{rel} と V_{conf} を定義する．V_{rel}，V_{conf} に属する外力ポテンシャルに関して，ハミルトニアンが $\mathscr{D}$ 上で自己共役となることを示すのが目的である．

定義 2.4 (V_{rel}) $V\in V_{\mathrm{rel}} \Leftrightarrow V$ は $\sqrt{p^2+M^2}$ に関して相対有界で，その相対限界が 1 未満である．即ち，$D(\sqrt{p^2+M^2})\subset D(V)$ であり，$0\le a<1$ と $b\ge 0$ が存在して，

$$\|Vf\|\le a\|\sqrt{p^2+M^2}f\|+b\|f\| \tag{2.18}$$

が任意の $f\in D(\sqrt{p^2+M^2})$ に対して成り立つ．
(V_{conf}) $V=V_+-V_-\in V_{\mathrm{conf}} \Leftrightarrow V_-=0$ かつ $V_+\in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ で $D_\mu V_+, D_\mu^2 V_+\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\mu=1,...,d$, さらに，$D(V)\subset D(|x|)$.

$V_{\mathrm{rel}}\cup V_{\mathrm{conf}}\subset V_{\mathrm{qf}}$ が成り立つので，$V\in V_{\mathrm{rel}}\cup V_{\mathrm{conf}}$ に対して，ハミルトニアン H が定義できる．[7, Theorem 4.5] において，$M>0$, $V\in V_{\mathrm{rel}}$ のとき，$e^{-tH}\mathscr{D}\subset\mathscr{D}$ を示すことで，H は $\mathscr{D}$ 上で本質的に自己共役であることを証明している．その証明を少し変更するだけで，$V\in V_{\mathrm{rel}}$ に対しても本質的自己共役性が証明できる．

命題 2.5 $V\in V_{\mathrm{rel}}\cup V_{\mathrm{conf}}$, $M>0$ ならば，H は $\mathscr{D}$ 上で本質的自己共役である．

2.4 主定理

$\mathscr{H}$ の稠密な部分空間 $\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ を次のように定義する．

$$\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}=C_c^\infty(\mathbb{R}^d)\hat{\otimes}\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}, \tag{2.19}$$

ここで，$\widehat{\otimes}$ は代数的テンソル積を表す．命題 2.5 は次の定理に拡張できる．

定理 2.6 $V \in V_{\mathrm{rel}} \cup V_{\mathrm{conf}}$, $M \geq 0$ とする．このとき，$\mathscr{D}$ 上で H は自己共役，$\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ 上で本質的自己共役である．

定理 2.6 は，$M = 0$ の場合も含まれることに注意する．

2.5 定理 2.6 の証明の概略

$M > 0$ の場合を考えてから，$M = 0$ の場合に拡張する．

2.5.1 $\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ が H の芯であること

$\mathscr{D}$ からだんだんと小さい芯をとっていく方法で $\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ が H の芯となることを証明する．まず，$V \in V_{\mathrm{conf}}$ の場合を考える．

補題 2.7 $D(|p|) \cap D(\mathrm{H}_{\mathrm{f}}^{1/2}) \subset D(T_M)$ であり，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|T_M \Psi\| \leq C(\||p|\Psi\| + \|\mathrm{H}_{\mathrm{f}}^{1/2}\Psi\| + \|\Psi\|) \tag{2.20}$$

が任意の $\Psi \in D(|p|) \cap D(\mathrm{H}_{\mathrm{f}}^{1/2})$ に対して成立する．特に，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|H\Psi\| \leq C(\||p|\Psi\| + \|\mathrm{H}_{\mathrm{f}}\Psi\| + \|V\Psi\| + \|\Psi\|) \tag{2.21}$$

が任意の $\Psi \in \mathscr{D}$ に対して成立する．

$\mathscr{H}$ の有限粒子空間を $\mathscr{H}_0$ と置く．

$$\mathscr{H}_0 = \left\{ \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{H} | \Psi^{(n)} = 0 \text{ for all } n \geq n_0 \text{ with some } n_0 \geq 1 \right\}. \tag{2.22}$$

$$\mathscr{D}_1 = \mathscr{D} \cap \mathscr{H}_0. \tag{2.23}$$

補題 2.8 $V \in V_{\mathrm{conf}}$, $M > 0$ とする．このとき，$\mathscr{D}_1$ は H の芯である．

証明各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$P_n = \mathbb{1}_{[0,n]}(N)$ と置く．$\Psi \in \mathscr{D}$ を任意にとる．$P_n\Psi \in \mathscr{D}_1$ であり，$P_n\Psi \to \Psi$ $(n \to \infty)$ が分かる．補題 2.7 より，$\{HP_n\Psi\}_n$ は H のコーシー列であることが分かる．H は閉作用素だから，$\Psi \in D(H)$ であり，$HP_n\Psi \to H\Psi$. 命題 2.5 より，$\mathscr{D}$ は H の芯だから，補題が従う． ■

$$\mathscr{D}_2 = \{\{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \in \mathscr{D}_1 | \Psi^{(n)}(\cdot, \mathbf{k}) \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d) \text{ a.e. } \mathbf{k} \in \mathbb{R}^{dn}, n \geq 1\}. \tag{2.24}$$

と置く．軟化子による近似を考えることにより，次の補題を証明することができる．

補題 2.9 $V \in V_{\mathrm{conf}}$, $M > 0$ とする．このとき，$\mathscr{D}_2$ は H の芯である．

証明 $\Phi \in \mathscr{D}_1$ を任意にとる．$j \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ と $g \in C_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbb{R}^d; [0,1])$ を $\int_{\mathbb{R}^d} j(x)\mathrm{d}x = 1$ と $|x| \leq 1$ のとき $g(x) = 1$ を満たすようにとる．各 $\epsilon > 0$ に対して，$j_\epsilon(x) = \epsilon^{-d} j(x/\epsilon)$,

$$\Phi_{\epsilon,L}^{(n)}(x, \mathbf{k}) = g(x/L) \int_{\mathbb{R}^d} j_\epsilon(x-y)\Phi^{(n)}(y, \mathbf{k}) dy, \tag{2.25}$$

と置き，$\Phi_{\epsilon,L} = \{\Phi_{\epsilon,L}^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ を考える．$\epsilon \downarrow 0$ とした後，$L \to \infty$ とすることにより，$\Phi \in D(H)$ と $\lim_{L\to\infty} \lim_{\epsilon\downarrow 0} H\Phi_{\epsilon,L} = H\Phi$ が分かるので，補題が成立する． ■

補題 2.10 $V \in V_{\mathrm{conf}}$，$M > 0$ とする．このとき，ある定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|p^2\Phi\| + \|V\Phi\| + \|\mathrm{H_f}\Phi\| \le C\|(p^2 + V + \mathrm{H_f} + \mathbb{1})\Phi\| \tag{2.26}$$

が任意の $\Phi \in \mathscr{D}_2$ に対して成り立つ．

証明 $\|(p^2+V)\Phi\|^2 = \|p^2\Phi\|^2 + 2\Re(p^2\Phi, V\Phi) + \|V\Phi\|^2$ が成り立つ．$V \in V_{\mathrm{conf}}$ だから，右辺の $2\Re(p^2\Phi, V\Phi)$ は次のように評価できる．$V_\mu = D_\mu V$ として，

$$\begin{aligned}2\Re(p^2\Phi, V\Phi) &= 2\sum_\mu \{\Re(p_\mu\Phi, Vp_\mu\Phi) + \Re(p_\mu\Phi, [p_\mu, V]\Phi)\} \\ &\ge 2\sum_\mu \Re(p_\mu\Phi, [p_\mu, V]\Phi) \ge -2\sum_\mu \|p_\mu\Phi\|\|V_\mu\|_\infty\|\Phi\|. \end{aligned}\tag{2.27}$$

よって，シュワルツの不等式より，任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\|(p^2 + V)\Phi\|^2 \ge (1-\epsilon)\|p^2\Phi\|^2 + \|V\Phi\|^2 - C_\epsilon\|\Phi\|^2. \tag{2.28}$$

となる．$\Re((p^2+V)\Phi, \mathrm{H_f}\Phi) = \Re(\sqrt{p^2+V}\Phi, \mathrm{H_f}\sqrt{p^2+V}\Phi) \ge 0$ だから，

$$\begin{aligned}\|(p^2 + V + \mathrm{H_f})\Phi\|^2 &\ge \|(p^2+V)\Phi\|^2 + \|\mathrm{H_f}\Phi\|^2 \\ &\ge (1-\epsilon)\|p^2\Phi\|^2 + \|V\Phi\|^2 - C_\epsilon\|\Phi\|^2 + \|\mathrm{H_f}\Phi\|^2. \end{aligned}\tag{2.29}$$

よって，(2.26) が従う． ■

Kato の不等式より，$V \in V_{\mathrm{conf}}$ のとき，$p^2 + V$ は $C_{\mathrm{c}}(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的自己共役である．(2.28) から，$p^2 + V$ は閉作用素であることが分かるので，下に有界な自己共役作用素である．従って，$p^2 + V + \mathrm{H_f}$ は $\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ 上で本質的に自己共役，$D(p^2) \cap D(V) \cap D(\mathrm{H_f})$ 上で自己共役であることが分かる．この事実を使って，次の補題が証明できる．

補題 2.11 $V \in V_{\mathrm{conf}}$，$M > 0$ とする．このとき，$\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ は H の芯である．

証明 $\Phi \in \mathscr{D}_2$ とする．$p^2 + V + \mathrm{H_f}$ は H_{fin} 上で本質的自己共役だから，$\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ の点列 $\{\Phi_n\}$ を $\Phi_n \to \Phi$, $(p^2+V+\mathrm{H_f})\Phi_n \to (p^2+V+\mathrm{H_f})\Phi$ $(n \to \infty)$ となるようにとれる．(2.26) と (2.21) から，$\{H\Phi_n\}$ はコーシー列であり，$\lim_n H\Phi_n = H\Phi$ となることが分かる．従って，$\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ は H の芯である． ■

$M = 0$ の場合におけるハミルトニアンの芯を考える．補題 2.11 を証明する際，$M > 0$ が仮定されている命題 2.5 を使っていることに注意する．ハミルトニアンの M 依存性を強調するために，H を H_M と書き，$M = 0$ のときの H_M を H_0 と書く．任意の $\Psi \in \mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ に対して，

$$\|(H_0 - H_M)\Psi\| = \|(|p-A| - \sqrt{(p-A)^2 + M^2})\Psi\| \le M\|\Psi\|$$

となる．従って，$B = \overline{H_0 - H_M}$ と置くと，B は $\mathscr{H}$ 上の有界作用素である．$\tilde{H}_M = H_M + B$ と置く．このとき，次の補題が成立する．

補題 2.12 $V \in V_{\mathrm{conf}}$，$M > 0$ とする．$H_0 = \tilde{H}_M$ が成立する．

証明 $\Psi \in D(\tilde{H}_M) = D(H_M)$ を任意にとる．$\Psi_n \to \Psi$, $H_M\Psi_n \to H_M\Psi$ $(n \to \infty)$ となる $\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ の点列 $\{\Psi_n\}$ が存在する．$H_0\Psi_n = H_M\Psi_n + B\Psi_n$ が成り立つから，$\{H_0\Psi_n\}$ はコーシー列である．H_0 は閉作用素だから，$\tilde{H}_M \subset H_0$ となる．また，$\tilde{H}_M$ は $D(H_M)$ 上の自己共役作用素である．H_0 も自己共役作用素だから，$\tilde{H}_M = H_0$ が成立する． ■

補題 2.13 $V \in V_{\mathrm{conf}}$ とする．このとき，H_0 の芯は $\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ である．

証明 $\tilde{H}_M$ の芯は $\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ だから，補題 2.12 より，補題 2.11 は $M=0$ の場合でも成立する． ■

$V \in V_{\mathrm{rel}}$ の場合，$\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ が H の芯であることの証明は，上と同様の議論と Kato-Rellich の定理から得られる．

2.5.2 H が $\mathscr{D}$ 上で自己共役であること

次の不等式は，H が $\mathscr{D}$ で自己共役であることを証明する際に鍵となる．

補題 2.14 $V \in V_{\mathrm{conf}}$ とする．$M_0 > 0$ を固定し，$0 \le M \le M_0$ とする．このとき，M に依らない定数 C が存在して

$$\||p|\Psi\|^2 + \|V\Psi\|^2 + \|\mathrm{H_f}\Psi\|^2 \le C\|(H+\mathbb{1})\Psi\|^2 \tag{2.30}$$

が任意の $\Psi \in D(H)$ に対して成り立つ．

証明の概略 $M=0$ の場合を考える．$M>0$ の場合も同様に証明できる．H の芯は $\mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ だから，$\Psi \in \mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ に対して (2.30) を示せばよい．$K = |p-A| + \mathrm{H_f}$ と置く．このとき，

$$\|H\Psi\|^2 = \|H_0\Psi\|^2 + \|V\Psi\|^2 + 2\Re(H_0\Psi, V\Psi), \tag{2.31}$$

$$\|K\Psi\|^2 = \||p-A|\Psi\|^2 + \|\mathrm{H_f}\Psi\|^2 + 2\Re(|p-A|\Psi, \mathrm{H_f}\Psi). \tag{2.32}$$

となる．従って，

$$\|H\Psi\|^2 = \||p-A|\Psi\|^2 + \|\mathrm{H_f}\Psi\|^2 + 2\Re(|p-A|\Psi, \mathrm{H_f}\Psi) + \|V\Psi\|^2 + 2\Re(K\Psi, V\Psi). \tag{2.33}$$

(2.33) の右辺三項 $\||p-A|\Psi\|^2$, $\Re(|p-A|\Psi, \mathrm{H_f}\Psi)$, $\Re(K\Psi, V\Psi)$ を下から評価することにより，(2.30) が示せる．$\||p-A|\Psi\|$ を評価する．

$$\|p_\mu\Psi\|^2 = \|(p_\mu - A_\mu)\Psi\|^2 + 2\Re(A_\mu\Psi, (p_\mu - A_\mu)\Psi) - \|A_\mu\Psi\|^2.$$

に注意する．$\epsilon > 0$ を任意にとる．ある $C_1 > 0$ が存在して，

$$|\Re(A\Psi, (p-A)\Psi)| \le \epsilon(\||p-A|\Psi\|^2 + \|\mathrm{H_f}\Psi\|^2) + C_1\|\Psi\|^2 \tag{2.34}$$

$$\||p|\Psi\|^2 \le (1+\epsilon)\||p-A|\Psi\|^2 + \epsilon\|\mathrm{H_f}\Psi\|^2 + C_1\|\Psi\|^2 \tag{2.35}$$

となる．従って，

$$\||p-A|\Psi\|^2 \ge \frac{1}{1+\epsilon}\||p|\Psi\|^2 - \frac{\epsilon}{1+\epsilon}\|\mathrm{H_f}\Psi\|^2 - \frac{C}{1+\epsilon}\|\Psi\|^2. \tag{2.36}$$

次に，$\Re(|p-A|\Psi, \mathrm{H_f}\Psi)$ の評価をする．仮想的な質量 $m > 0$ 導入し，

$$T_m = \sqrt{(p-A)^2 + m^2} \tag{2.37}$$

を考える．$m > 0$ は動かさずに固定する．

$$|p-A|\Psi, \mathrm{H_f}\Psi) = (T_m\Psi, \mathrm{H_f}\Psi) + ((|p-A| - T_m)\Psi, \mathrm{H_f}\Psi). \tag{2.38}$$

と変形する．$\Psi \in \mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ だから，$\mathrm{H_f}\Psi \in D(T_m)$，$\mathrm{H_f}\Psi \in D(T_m^{1/2})$ である． さらに，

$$T_m^{1/2}\Psi \in D(\mathrm{H_f}) \tag{2.39}$$

が成り立つ．(2.39) は汎関数積分を使って証明できるが，ここでは証明を省略する．これより，

$$
\begin{aligned}
&\Re(|p-A|\Psi, \mathrm{H_f}\Psi) \\
&= (T_m^{1/2}\Psi, \mathrm{H_f}T_m^{1/2}\Psi) + \Re\{(T_m^{1/2}\Psi, [T_m^{1/2}, \mathrm{H_f}]\Psi) + ((|p-A| - T_m)\Psi, \mathrm{H_f}\Psi)\} \\
&\geq \Re\{(T_m^{1/2}\Psi, [T_m^{1/2}, \mathrm{H_f}]\Psi) + ((|p-A| - T_m)\Psi, \mathrm{H_f}\Psi)\}.
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

$((|p-A| - T_m)\Psi, \mathrm{H_f}\Psi)$ を評価する．$\|(|p-A| - T_m)\Psi\| \leq m\|\Psi\|$ だから，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある $C_2 > 0$ があって

$$
((|p-A| - T_m)\Psi, \mathrm{H_f}\Psi) \geq -\epsilon\|\mathrm{H_f}\Psi\|^2 - C_2\|\Psi\|^2 \tag{2.41}
$$

となる．次に，$\Re(T_m^{1/2}\Psi, [T_m^{1/2}, \mathrm{H_f}]\Psi)$ を評価する．ある定数 c があって，

$$
\|[T_m^{1/2}, \mathrm{H_f}]\Psi\| \leq c\|(\mathrm{H_f} + \mathbb{1})^{1/2}\Psi\| \tag{2.42}
$$

が成り立つが，証明は省略する．これより，ある $C_3 > 0$ があって

$$
\begin{aligned}
\Re(T_m^{1/2}\Psi, [T_m^{1/2}, \mathrm{H_f}]\Psi) &\geq -c\|T_m^{1/2}\Psi\|\,\|(\mathrm{H_f} + \mathbb{1})\Psi\| \\
&\geq -\epsilon\||p-A|\Psi\|^2 - \epsilon\|\mathrm{H_f}\Psi\|^2 - C_3\|\Psi\|^2
\end{aligned} \tag{2.43}
$$

となる．従って，

$$
\Re(|p-A|\Psi, \mathrm{H_f}\Psi) \geq -\epsilon\||p-A|\Psi\|^2 - 2\epsilon\|\mathrm{H_f}\Psi\|^2 - (C_2 + C_3)\|\Psi\|^2. \tag{2.44}
$$

$\Re(K\Psi, V\Psi)$ は下から，

$$
\Re(K\Psi, V\Psi) \geq -\epsilon\|V\Psi\|^2 - C_4\|\Psi\|^2. \tag{2.45}
$$

と評価できる．(2.45) を示す計算は省略する．(2.41), (2.44), (2.45) より，$\Psi \in \mathscr{H}_{\mathrm{fin}}$ に対して，(2.30) が示される．補題 2.13 と極限操作により，任意の $\Psi \in D(H)$ に対して (2.30) が示される． ■

定理 2.6 の証明 $V \in V_{\mathrm{conf}}$ とする．このとき，補題 2.14 より，任意の $M \geq 0$ に対して，H は $\mathscr{D}$ 上の閉作用素である．さらに，補題 2.11 と補題 2.13 より，任意の $M \geq 0$ に対して，$\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}$ 上で本質的自己共役である．よって，定理 2.6 が成り立つ．$V \in V_{\mathrm{rel}}$ の場合は Kato-Rellich の定理より証明できる． ■

参考文献

[1] C. Gérard and I. Sasaki, Binding condition for a general class of quantum field Hamiltonians, arXiv:1206.4764, preprint, 2012.

[2] D. Hasler and I. Herbst, On the self-adjointness and domain of Pauli-Fierz type Hamiltonians, *Rev. Math. Phys.* **20** (2008), 787-800.

[3] T. Hidaka and F. Hiroshima, Spectral analysis of semi-relativistic Pauli-Fierz models I, arXiv:1402.1065, preprint, 2013.

[4] T. Hidaka and F. Hiroshima, Self-adjointness of semi-relativistic Pauli-Fierz Hamiltonian, arXiv:1402.2024, preprint, 2013.

[5] F.Hiroshima, Essential self-adjointness of translation-invariant quantum field models for arbitrary coupling constants *Comm. Math. Phys.* **211**, (2000), 585-613.

[6] F. Hiroshima, Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants, *Ann. H. Poincaré* **3** (2002), 171-201.

[7] F. Hiroshima, Functional integral approach to semi-relativistic Pauli-Fierz model, *Adv. in Math.* **259** (2014) 784–840.

[8] M. Könenberg, O. Matte and E. Stockmeyer, Existence of ground states of hydorgen-like atoms in relativistic QED I: the semi-relativistic Pauli-Fierz operator, *Rev. Math. Phys* **23** (2011), 375–407.

[9] T. Miyao and H. Spohn, Spectral analysis of the semi-relativistic Pauli-Fierz Hamiltonian, *J. Funct. Anal.* **256** (2009), 2123–2156.