数理解析研究所講究録
第 1961 巻 2015 年 101-108

Generalized quantum measurement and DHR-DR theory

名古屋大学情報科学研究科
岡村 和弥 *

1 導入：測定とは何か？どう捉えるべきか？

測定とは何か？物理学的には次のように答えるのが尤もだろう：

測定とは考察対象の物理系の振る舞いの記述および解析を可能にする
基本的な物理過程およびその機能の総称である。

この定性的表現における本質的な部分は，

(1) 測定の意義は「考察対象の物理系の振る舞いの記述および解析」可能であること，
(2) データを出力する機能をもつ実験装置（以後，測定装置）なしには実現しえないこと

の２つある。「物理系を調べる際，測定を必ず介する。」という否定できない事実から当然であろう。また，測定は決して量子論の文脈でのみ語られるべき物理的対象ではない。とはいえ，測定の重大性の認識は量子論が契機となった事実もあり，量子論における測定の掘り下げは学問的にも自然だろう。それ故，未だ数学的定式化が成し遂げられていない場の量子論を含めた，量子論体系を発展させるためにも量子測定理論の数理を本稿で展開する。

量子測定の数理的研究は von Neumann の教科書 [15] で始まった。[15] において次の２つの重要な貢献がなされた：

- von Neumann モデルの定式化。
- $\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする。非縮退の離散スペクトル（固有値）をもつ物理量 $A = \sum_j a_j E(\{a_j\})$ の測定による状態変化は，$\mathbb{R}$ の部分集合 Δ の範囲にあるスペクトルが測定された時，各状態（密度作用素）ρ に対し，

$$\rho \mapsto \frac{\sum_{a_j \in \Delta} E(a_j)\rho E(a_j)}{\mathrm{Tr}[E(\Delta)\rho]} \tag{1}$$

で与えられる。ただし，$E(\{a_j\}) = E(a_j)$。

後者は1951年にLüders [13]（英訳あり）によって縮退のある場合に拡張され，**von Neumann-Lüders の射影仮説**と呼ばれるようになる。論点先取であるが測定による系の変化について述べたいと思う。時間発展と測定を対比して次のようによく言われる：

*okamura@math.cm.is.nagoya-u.ac.jp

孤立系（閉じた系）の時間発展による変化はユニタリー，即ち可逆かつ決定論的で，
一方の測定による変化は非決定論的である。

この言明にはいくつか問題点がある。まず一つ目の問題は量子論では「孤立系（閉じた系）」と名づけられるべき対象がいかに正当化されうるのかということである。例えば，測定の時だけ対象系と測定器の合成系として扱い，そのとき以外は対象系を「孤立系（閉じた系）」として扱うなどということが正当化できるのか？という問題が生じる。量子論においてそれはおそらく不可能であって，測定でなくとも状態準備を目的とする操作抜きには実験設定そのものが成り立たない。そして，測定を介しなければ「観る[1]」ことなど叶わない対象を量子論では扱っており，測定器のメーターの出力を介して対象系の物理量の振る舞いを物理的に，また統計的に推測しているのである。したがって，対象系の記述に関心があるときは測定器等外部系が定式化の上では明示的には現れないだけだと理解しなければならない。「孤立系（閉じた系）」である必要は特段ないのである。二つ目の問題は「(非) 決定論的」という言葉である。ユニタリーによる時間発展の場合は確かに決定論的であるが，測定による変化の方で「非決定論的」とするのは少し語弊がある。こちらについては「非因果的」とも呼ばれることがあるが，より語弊がある。量子論で扱う対象の在り方と統計学的知見からは確率論的記述が出発点にあるべきであり，確率を加味すればその範囲で必ず決まった状態遷移をする写像として測定による変化は記述される（式 (1) 参照)。故に**測定は統計学的知見からは因果的である物理的な考察対象なのである。**ユニタリーによる時間発展と測定との比較自体には物理的意義があるけれども，前提を間違えれば禅問答になったり議論が無意味になり兼ねないことに注意を払ってほしい。また，両者を統一的に記述する方法がないわけではない（本稿では省略)。

話を戻そう。$\Delta = \mathbb{R}$ のときの式 (1) の写像は

$$\rho \mapsto \sum_{a_j \in \mathbb{R}} E(a_j)\rho E(a_j) \tag{2}$$

となる。1962 年に中村と梅垣により，この写像が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ から $\{A\}'$ への条件付き期待値であることが指摘された [14]。この指摘により，測定による状態変化を数学的に位置付ける枠組みの整備が加速した。中村と梅垣は物理量 A が連続スペクトルを持つ場合にも同様に条件付き期待値が存在すると [14] において予想した。けれども，Arveson によりこの予想が 1967 年に否定的に解かれた [3]。これを契機としてより広い枠組みで測定による変化を記述する数学的枠組みを模索する研究，特に，Davies と Lewis によるインストゥルメントの枠組みによる測定の特徴づけの研究がスタートするのである。

1970 年，Davies と Lewis によりインストゥルメント (instrument) の理論が発表された [7, 6]。$\mathcal{M}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の σ-有限 von Neumann 代数とし（**本稿で登場する全てのon Neumann 代数は σ-有限であると仮定！**)，$(S, \mathcal{F})$ を可測空間とする。そして，$\mathcal{M}_{*,1}$ で $\mathcal{M}$ 上の正規状態の全体，$\mathrm{P}_n(\mathcal{M})$ で $\mathcal{M}$ 上の正規な正値線型写像を表す。$\mathcal{I} : \mathcal{F} \times \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ が $(\mathcal{M}, S)$ に対するインストゥルメント (以後，instrument) であるとは，以下の 2 条件を満たすことをいう：

(1) 任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し，$\mathcal{I}(\Delta, \cdot)$ は $\mathrm{P}_n(\mathcal{M})$ の元であり，$\mathcal{I}(S, 1) = 1$；

[1]量子論において観てきたかのような説明をされることがあるが，物理的状況・実験設定が詳細に提示されている状況でない限り何らかの誤りが入り込んでいると思っても間違いではない。

(2) 任意の互いに素な高々可算個の $\mathcal{F}$ の元の族 $\{\Delta_i\}$，$\rho \in \mathcal{M}_{*,1}$，$A \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\rho(\mathcal{I}(\cup_i \Delta_i, A)) = \sum_i \rho(\mathcal{I}(\Delta_i, A)) \tag{3}$$

が成り立つ。

instrument の定義から明らかなように，instrument は出力に対応する Δ ごとに $\mathcal{M}$ 上の正規な正値線型写像に値をとる測度であり，とくに $\Delta = S$ のときは単位的となるものである。これは測定による対象系への作用および測定の果たす機能をモデル化したものであると理解できる。測定を代数的（非可換）確率論で一般的に定式化したものとして大変意義がある。しかしながら，大変一般的に定義されているため，量子測定理論で instrument の研究はなかなか進展しなかった。一般化の反動で物理的に意味のあるクラスの特徴づけが課題となったのである。

その状況が変わり現在の量子測定理論の礎となる結果が小澤による完全正値インストゥルメント (completely positive instrument, 以後 CP instrument) の導入である [18, 19]。$\mathcal{I}$ が $(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument であるとは，$\mathcal{I}$ が $(\mathcal{M}, S)$ に対する instrument であって，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$，$n \in \mathbb{N}$，$A_1, A_2, \cdots, A_n$, $B_1, B_2, \cdots, B_n \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\sum_{i,j=1}^{n} B_i^* \mathcal{I}(\Delta, A_i^* A_j) B_j \geq 0 \tag{4}$$

が成り立つときという。CPInst$(\mathcal{M}, S)$ で $(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument の集合を表す。[18, 19] において von Neumann モデルを一般化した測定過程も定義された。$\mathbb{M}$ が $(\mathcal{M}, S)$ に対する測定過程であるとは，$\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ は Hilbert 空間 $\mathcal{K}$，$\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ 上の状態 σ，スペクトル測度 $E : \mathcal{F} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$，および $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリー作用素 U からなる 4 つ組であって，$\{\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(\Delta)M \mid M \in \mathcal{M}, \Delta \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{M}$ を満たすことをいう。ただし，$\mathcal{I}_{\mathbb{M}}$ は $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する CP instrument であって，任意の $X \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ と $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し，$\mathcal{I}_{\mathbb{M}}(\Delta)X = (id \otimes \sigma)[U^*(X \otimes E(\Delta))U]$ で定義される。そして，$\mathcal{M} = \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ のとき，$(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する CP instrument $\mathcal{I}$ の集合と $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する測定過程 $\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ の "統計的同値類" の集合が一対一対応することが [18, 19] において示された。対応は

$$\mathcal{I}(\Delta, X) = (id \otimes \sigma)[U^*(X \otimes E(\Delta))U] \tag{5}$$

により与えられる。**有限自由度量子系の測定が測定過程で記述されるものとして完全に特徴づけられることをこの結果は示している**[2]。すなわち，有限自由度量子系では物理量代数が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ であるおかげで，自動的に任意の CP instrument が物理的に意味のあるものだと考えられる。この研究の後に，[20] で反復可能性仮説 (repeatability hypothesis) に関わる Davies-Lewis 予想が解決されて，量子測定理論の現在までに至る研究の方向性が確立した。本稿では十分に展開されてない歴史的経緯等は [22] を参照して頂きたい。

しかしながら，以後の量子測定理論の研究からは任意の von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ において任意の CP instrument が物理的に意味があるかはわかっていなかった。詳細は小澤正直氏との共同研究 [17] に譲るが，本稿の次節以降でこの問題を解決した成果について報告を行う。

[2] この言明のためには測定及び CP instrument を公理的に特徴づける必要がある。このトピックについては [21] において提示されている。

2 正規拡張性質 (NEP)

[18, 19] の成果の要は CP instrument に関する表現理論であり，完全正値写像や正規表現の表現定理を駆使することで達成された。したがって，出発点に立ち戻って問題を見つめ直す過程は本質を理解するうえで重要であろう。特に，代数的量子論および代数的確率論との関係を先行研究に増して深めていく必要性がある。

補題 1 (小澤 [19, Proposition 4.2]). $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}$ に対し，*Hilbert* 空間 $\mathcal{K}$，スペクトル測度 $E : \mathcal{F} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$，非退化な正規表現 $\pi : \mathcal{M} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ および等長作用素 $V \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ で，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\mathcal{I}(\Delta)M = V^*E(\Delta)\pi(M)V, \tag{6}$$

$$E(\Delta)\pi(M) = \pi(M)E(\Delta) \tag{7}$$

を満たすものが存在する。

φ を $\mathcal{M}$ 上の忠実な正規状態とし，ν を $\varphi \circ \mathcal{I} \sim \nu$ を満たす $(S, \mathcal{F})$ 上の有限正値測度とする。ただし，$\varphi \circ \mathcal{I}$ は任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し，$(\varphi \circ \mathcal{I})(\Delta) = \varphi(\mathcal{I}(\Delta, 1))$ で定義される $(S, \mathcal{F})$ 上の確率測度である。補題 1（およびその証明）から，忠実な正規表現 $\widetilde{E} : L^\infty(S, \mathcal{F}, \nu) \to \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ で任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し，$\widetilde{E}(\chi_\Delta) = E(\Delta)$ を満たすものが存在する。したがって，(7) 式と $L^\infty(S, \nu) := L^\infty(S, \mathcal{F}, \nu)$ の可換性から，$\mathcal{K}$ 上に $\mathcal{M}$ の正規表現 π と $L^\infty(S, \nu)$ の正規表現の組で，任意の $M \in \mathcal{M}$ と $f \in L^\infty(S, \nu)$ に対し，

$$\widetilde{E}(f)\pi(M) = \pi(M)\widetilde{E}(f) \tag{8}$$

を満たすものが存在する。これより，$\mathcal{M}$ と $L^\infty(S, \nu)$ の双正規 (binormal) テンソル積代数 $\mathcal{M} \otimes_{\mathrm{bin}} L^\infty(S, \nu)$ の $\mathcal{K}$ 上の双正規 ($\mathcal{M}$，$L^\infty(S, \nu)$ それぞれで正規) 表現 $\widetilde{\pi}$ で，任意の $M \in \mathcal{M}$ と $f \in L^\infty(S, \nu)$ に対し，

$$\widetilde{\pi}(M \otimes f) = \widetilde{E}(f)\pi(M) \tag{9}$$

を満たすものが存在する (von Neumann 代数の双正規テンソル積については [11] 参照。$L^\infty(S, \nu)$ が核型であるので，ほかのどの C*-テンソル積とも一致する)。したがって，任意の $(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument $\mathcal{I}$ に対し，$\mathcal{M} \otimes_{\mathrm{bin}} L^\infty(S, \nu)$ から $\mathcal{M}$ への単位的完全正値写像 $\Psi_{\mathcal{I}}$ で

$$\Psi_{\mathcal{I}}(M \otimes \chi_\Delta) = \mathcal{I}(\Delta, M) \tag{10}$$

を任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $M \in \mathcal{M}$ に対して満たすものが存在する。$\mathcal{M} = \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の場合には，前章で紹介した結果から von Neumann 代数のテンソル積 $\boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \mathbin{\overline{\otimes}} L^\infty(S, \nu)$ への拡張 $\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}} : \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \mathbin{\overline{\otimes}} L^\infty(S, \nu) \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ で，任意の $X \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \otimes_{\mathrm{bin}} L^\infty(S, \nu)$ に対し，

$$\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}}(X) = \Psi_{\mathcal{I}}(X) \tag{11}$$

を満たすものが存在する。一般には双正規テンソル積の単位的正規線型写像の存在までしか証明できず，Arveson の拡張定理を用いて von Neumann 代数のテンソル積上に拡張しても一般にその拡張は一意性も正規性もないが，条件さえ満たされれば von Neumann 代数のテンソル積まで拡張できることがわかる。この事実から次の性質を定義しよう。

定義 2 (正規拡張性質 (normal extension property)). $\mathcal{I}$ を $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument*, ν を $\mathcal{M}$ 上のある忠実な正規状態 ρ に対し $\nu \sim \rho \circ \mathcal{I}$ を満たす S 上の有限正値測度とする。
(1) $\mathcal{I}$ が正規拡張性質（*normal extension property,* 以後 *NEP*）とは，単位的正規完全正値写像 $\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}} : \mathcal{M} \,\overline{\otimes}\, L^\infty(S, \nu) \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ で $\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}}|_{\mathcal{M} \otimes_{\mathrm{bin}} L^\infty(S,\nu)} = \Psi_{\mathcal{I}}$ を満たすものが存在するときをいう。
(2) $\mathcal{I}$ が一意正規拡張性質（*unique normal extension property,* 以後 *UNEP*）とは，単位的正規完全正値写像 $\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}} : \mathcal{M} \,\overline{\otimes}\, L^\infty(S, \nu) \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ で $\widetilde{\Psi_{\mathcal{I}}}|_{\mathcal{M} \otimes_{\mathrm{bin}} L^\infty(S,\nu)} = \Psi_{\mathcal{I}}$ を満たすものが**唯一つ**存在するときをいう。
$\mathrm{CPInst}_{\mathrm{NE}}(\mathcal{M}, S)$ で *NEP* をもつ $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* の集合を表す。

正規拡張性質という名前は operator system の理論における一意拡張性質（unique extension property, UEP） [4] の名称を参考してつけた。この性質に関して次の定理が成り立つ。

定理 3. $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}$ に対し次の条件は同値である：
(*i*) $\mathcal{I}$ は *NEP* をもつ。
(*ii*) $\mathcal{I}$ は *UNEP* をもつ。
(*iii*) $(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する *CP instrument* $\widetilde{\mathcal{I}}$ で，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し，$\widetilde{\mathcal{I}}(\Delta)M = \mathcal{I}(\Delta)M$ を満たすものが存在する。
(*iv*) $(\mathcal{M}, S)$ に対する忠実な測定過程 $\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ で，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\mathcal{I}(\Delta)M = (id \otimes \sigma)[U^*(M \otimes E(\Delta))U] \tag{12}$$

を満たすものが存在する。

ここで，$(\mathcal{M}, S)$ に対する測定過程 $\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ が忠実であるとは，ある φ を $\mathcal{M}$ 上の忠実な正規状態に対し，正規かつ忠実な表現 $\widetilde{E} : L^\infty(S, \varphi \circ \mathcal{I}_{\mathbb{M}}) \to \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ で，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し $E(\Delta) = \widetilde{E}(\chi_\Delta)$ を満たすものが存在するときをいう。定理 3 から CP instrument が NEP をもつことと測定過程で記述可能であることが等価であることがわかり，一般の (σ-有限な) von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ において測定過程で記述可能な CP instrument のクラスを数学的に特徴づけることができた。この結果から次の定理は明らかである（[19, Theorem 5.1] と比較すると良い）：

定理 4. *Let* $\mathcal{M}$ を *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の σ-有限 *von Neumann* 代数とし，$(S, \mathcal{F})$ を可測空間とする。このとき，$(\mathcal{M}, S)$ に対する測定過程 $\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ の “ 統計的同値類 ” と *NEP* をもつ $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* $\mathcal{I}$ の間に一対一対応が存在する。この対応は，任意の $\Delta \in \mathcal{F}$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\mathcal{I}(\Delta)M = (id \otimes \sigma)[U^*(M \otimes E(\Delta))U] \tag{13}$$

で与えられる。

3 CP instrument の集合 $\mathrm{CPInst}(\mathcal{M}, S)$ の特徴づけ

前章では $(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument が測定過程で記述できるための必要十分条件である NEP という非常に von Neumann 代数的かつ圏論的な条件が焦点になった。本稿の導入で解説された，代数的確率論および量子測定理論の研究で大変重要な役割を果たした（$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ から $\mathcal{M}$ への）正規な条件付き期待値の存在は $(\mathcal{M}, S)$ に対する任意の CP instrument が NEP をもつという結果を導く：

命題 5. $\mathcal{M}$ を *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の *von Neumann* 代数で（正規な）条件付き期待値 $\mathcal{E}: \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{M}$ が存在するものとし，$(S, \mathcal{F})$ を可測空間とする。$(\mathcal{M}, S)$ に対する任意の *CP instrument* $\mathcal{I}$ は *NEP* をもつ。

数学的な立場からは，正規な条件付き期待値の存在の次には，正規でない条件付き期待値の存在，すなわちノルム 1 の射影が存在する場合に興味がわく。$\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ からのノルム 1 の射影が存在する von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ は**単射的 (injective)** であると言われる。この呼び方は同値な条件がコホモロジー論における単射性の条件であることから名づけられている。単射的 von Neumann 代数の構造理論の研究は Connes の Fields 賞受賞理由に挙げられる成果を含む作用素代数における中心的な研究テーマであった（[5, 24] 参照）。Anantharaman-Delaroche [1] の主定理を駆使することで次の定理が示される：

定理 6. $\mathcal{M}$ を *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の単射的 *von Neumann* 代数とし，$(S, \mathcal{F})$ を可測空間とする。$(\mathcal{M}, S)$ に対する任意の *CP instrument* $\mathcal{I}$ に対し，*NEP* をもつ $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* のネット $\{\mathcal{I}_\alpha\}$ で $\mathcal{I}_\alpha \to^{uw} \mathcal{I}$ を満たすものが存在する。

ここで，$M \in \mathcal{M}$ と $\mathcal{M}$ のネット $\{M_\alpha\}_\alpha$ に対し，$\{M_\alpha\}_\alpha$ が M に超弱収束するとき $M_\alpha \to^{uw} M$ と表すことにし，その上で，$(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument $\mathcal{I}$ と $(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument のネット $\{\mathcal{I}_\alpha\}_\alpha$ に対して，全ての $M \in \mathcal{M}$ と $\Delta \in \mathcal{F}$ に対し $\mathcal{I}_\alpha(\Delta)M \to^{uw} \mathcal{I}(\Delta)M$ が成立することを $\mathcal{I}_\alpha \to^{uw} \mathcal{I}$ で表した。定理 6 から次の性質が思いつく。

定義 7 (近似的正規拡張性質 (approximately normal extension property)). $\mathcal{M}$ を *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の *von Neumann* 代数とし，$(S, \mathcal{F})$ を可測空間とする。$(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* が近似的正規拡張性質（*approximately normal extension property,* 以後 *ANEP*）をもつとは，*NEP* をもつ $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* のネット $\{\mathcal{I}_\alpha\}$ で $\mathcal{I}_\alpha \to^{uw} \mathcal{I}$ を満たすものが存在するときをいう。*ANEP* をもつ $(\mathcal{M}, S)$ に対する *CP instrument* の集合を $\mathrm{CPInst}_{\mathrm{AN}}(\mathcal{M}, S)$ で表す。

定理 8. $\mathcal{M}$ を *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ 上の *von Neumann* 代数とし，$(S, \mathcal{F})$ を可測空間とする。このとき次の言明が成り立つ：

(1) （正規な）条件付き期待値 $\mathcal{E}: \boldsymbol{B}(\mathcal{H}) \to \mathcal{M}$ が存在するならば，

$$\mathrm{CPInst}_{\mathrm{NE}}(\mathcal{M}, S) = \mathrm{CPInst}_{\mathrm{AN}}(\mathcal{M}, S) = \mathrm{CPInst}(\mathcal{M}, S).$$

(2) $\mathcal{M}$ が単射的ならば，$\mathrm{CPInst}_{\mathrm{AN}}(\mathcal{M}, S) = \mathrm{CPInst}(\mathcal{M}, S)$。

定理 8 から，$\mathcal{M}$ 上で定義された CP instrument で ANEP をもたないものが存在するならば，$\mathcal{M}$ は単射的でない。この逆についても適当に条件をつければ成立すると考えている。

物理系の物理量代数を記述する von Neumann 代数はAFD（近似的有限次元，approximately finite-dimensional＝有限次元 von Neumann 部分代数の増大列の合併の弱閉包で表示できるという性質）かつ可分であることが知られている。加えて，可分な von Neumann 代数が単射的であるのはAFDであるとき，その時に限ることが知られている。この大変有名な結果は Connes, Wassermann, Haagerup, Popa および他の研究者たちにより確立された [5, 24]。したがって，定理8の (2) は物理的に実現可能な von Neumann 代数においては必ず成立する。事後状態の族の存在問題等を議論に絡めればANEPをもつCP instrumentまでが自然な測定を記述すると考えられる（詳しくは [17] 参照)。

4 DHR-DR理論における測定理論

講演では軽く触れることしかできなかったDHR-DR理論における測定理論について言及しよう。[16] において定義された「局所状態 (local state)」の概念に基づく代数的場の量子論（代数的場の量子論の基礎については [2, 12] が詳しい）の展開により，現実には時空局所的にしか把握しえない物理的状況・実験設定を出発点として場の量子論の展開が可能となった。これを土台として局所的な測定の理論（一般論）を [17] においてDHR-DR理論 [8, 9, 10] の一般的設定のもとで展開した。$\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}$ を（W^*-）局所ネットとし，$\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O}\in\mathcal{K}}$ の合併のノルム閉包である大域代数を $\mathcal{A}$ で表す。[17] の主結果は次の通りである：Haag双対性および分裂性質の仮定の下，局所時空領域（二重錐 (double cone)）$\mathcal{O}$ に対しDHR選択基準を満たす $\mathcal{A}$ の任意の表現 π から生成されたvon Neumann代数 $\pi(\mathcal{A}(\mathcal{O}))''$ 上で定義されたNEPをもつ任意のCP instrumentは，$\pi(\mathcal{A})''$ 上で定義された“局所的な (local)”CP instrumentに必ず拡張できる。“局所的な”CP instrumentをここでは定義していないため正確に述べることはできないが，有界時空領域上の代数上で定義された測定過程で記述可能なCP instrumentならば有界な時空領域においてのみ作用するCP instrumentに必ず拡張されることを主張する結果である。NEPという性質の強力さを改めて示す結果であり，代数的場の量子論を含む局所量子物理学 (local quantum physics) での測定理論を大きく前進させた成果である。局所量子物理学での測定理論では未解決問題が山積しているが，徐々にでも進展していくことを望む。

参考文献

[1] C. Anantharaman-Delaroche, Pacific J. Math. **171**, (1995), 309-341.

[2] H. Araki, *Mathematical theory of quantum fields*, Oxford Univ. Press, (1999).

[3] W. Arveson, Amer. J. Math. **89**, 578-642 (1967).

[4] W. Arveson, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), 1065-1084.

[5] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, CA, (1994).

[6] E.B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, (Academic Press, London, 1976).

[7] E.B. Davies and J.T. Lewis, Comm. Math. Phys. **17**, 239–260 (1970).

[8] S. Doplicher, R. Haag and J.E. Roberts, I & II, Comm. Math. Phys. **13**, 1-23 (1969); *ibid.* **15**, 173-200 (1969).

[9] S. Doplicher, R. Haag and J.E. Roberts, I & II, Comm. Math. Phys. **23**, 199-230 (1971); *ibid.* **35**, 49-85 (1974).

[10] S. Doplicher and J.E. Roberts, Ann. Math. **130**, 75-119 (1989); Invent. Math. **98**, 157-218 (1989); Comm. Math. Phys. **131**, 51-107 (1990).

[11] E.G. Effros and E.C. Lance, Adv. Math. **25** (1977), 1-34.

[12] R. Haag, *Local Quantum Physics -Fields, Particles, Algebras-* (2nd ed.), Springer-Verlag, (1996).

[13] G. Lüders, Über die Zustandsänderung durch den Meßprozeß, Ann. Physik **8**, 322-328 (1951).

[14] M. Nakamura and H. Umegaki, Math. Jpn. **7**, 151-157 (1962).

[15] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, (Springer-Verlag, Berlin, 1932); *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1955).

[16] I. Ojima, K. Okamura and H. Saigo, Local state and sector theory in local quantum physics, preprint.

[17] K. Okamura and M. Ozawa, Measurement theory in local quantum physics: Based on local state formalism in AQFT, preprint.

[18] M. Ozawa, In; *Probability Theory and Mathematical Statistics*, (eds. K. Ito and J.V. Prohorov), Lecture Notes Math. **1021**, (Springer, 1983), pp.518-525.

[19] M. Ozawa, J. Math. Phys. **25**, 79-87 (1984).

[20] M. Ozawa, Publ. RIMS **21** (1985), pp.279-295; J. Math. Phys. **26**, 1948-1955 (1985).

[21] M. Ozawa, Ann. Phys.(N.Y.) **259**, 121-137 (1997); Ann. Phys.(N.Y.) **331**, 350-416 (2004).

[22] M. Ozawa, Mathematical foundations of quantum information: Measurement and foundations, to appear in Sugaku Expositions, arXiv:1201.5334.

[23] M. Ozawa, in preparation.

[24] M. Takesaki, *Theory of Operator Algebras III*, (Springer, 2002).