数理解析研究所講究録
第 1963 巻 2015 年 37-43

準凸計画問題に対するsurrogate双対性と制約想定

鈴木　聡 (Satoshi Suzuki),
島根大学大学院 総合理工学研究科 数理科学領域
黒岩 大史 (Daishi Kuroiwa),
島根大学大学院 総合理工学研究科 数理科学領域

概 要

本講究録では, 準凸計画問題に対する surrogate 双対性とその制約想定について述べる. 特に, 近年筆者等によって示された, 準凸計画問題に対する二つの surrrogate 双対性を特徴付ける制約想定について紹介する.

1 導入

本講究録では, 次のような数理計画問題について考察する.

$$\begin{array}{ll} \text{Minimize} & f(x), \\ \text{subject to} & x \in A = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, g_i(y) \leq 0\}. \end{array}$$

ただし, $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty]$, I : 添字集合, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とする. 集合 A はこの問題の制約集合と呼ばれる. 数理計画問題は関数の種類によって分類されており, 本講究録では特に, f, g_i が凸関数である凸計画問題, f, g_i が準凸関数である準凸計画問題について述べる.

数理計画問題においては様々な双対性が研究されている. 中でもよく知られたものとして, 次に挙げる凸計画問題に対する Lagrange 双対性がある.

$$\inf_{x\in A} f(x) = \max_{\lambda\in\mathbb{R}^{(I)}_{+}} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i\in I} \lambda_i g_i(x) \right\}.$$

ただし, $\mathbb{R}^{(I)}_{+} = \{\lambda \in \mathbb{R}^I \mid \forall i \in I, \lambda_i \geq 0, \{i \in I \mid \lambda_i \neq 0\}$: 有限 $\}$ とする. Lagrange 双対性においては, f が A 上で最小値を取らない場合でも, 上式右辺の最大値を取る λ が存在するという点が重要である. このような λ は Lagrange 乗数と呼ばれ, Lagrange の未定乗数法は数理計画問題の解法として有名である. しかし, Lagrange 双対性は常には成り立たないため, その仮定である制約想定の研究が様々になされてきた. 近年 Farkas-Minkowski と呼ばれる条件が Lagrange 双対性に対する必要十

分な制約想定であることが示された ([2]). Farkas-Minkowski は, 双対性と必要十分であるという意味において最弱の制約想定である. このような制約想定に関する研究は近年急速に進んでおり, 様々な双対性に対する必要十分な制約想定が示されている ([6, 9–15]).

一方で A 上で最小値を取るような目的関数 f に対しては Lagrange min-max 双対性と呼ばれる次のような等式についても研究がなされている.

$$\min_{x\in A} f(x) = \max_{\lambda\in\mathbb{R}^{(I)}_+} \inf_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i\in I} \lambda_i g_i(x) \right\}.$$

この Lagrange min-max 双対性に対しても同様に, 必要十分な制約想定である locally Farkas-Minkowski が研究されている ([2]). 制約 g_i を固定したとき, 任意の凸関数に対して Lagrange 双対性が成り立つならば, 任意の A 上で最小値を取る凸関数に対して Lagrange min-max 双対性が成り立つが, その逆は必ずしも成り立たない. このことは Farkas-Minkowski と locally Farkas-Minkowski が同値ではないことからも示される. このような双対性と min-max 双対性が同値ではないという性質は Lagrange 双対性の持つ特徴の一つである.

準凸計画問題においても様々な双対性が研究されているが, 代表的なものが次に挙げる surrogate 双対性である. f は準凸関数, g_i は凸関数であるとし, 次のような等式が成立するとき, surrogate 双対性が成り立つという.

$$\inf_{x\in A} f(x) = \max_{\lambda\in\mathbb{R}^{(I)}_+} \inf \left\{ f(x) \;\middle|\; \sum_{i\in I} \lambda_i g_i(x) \leq 0 \right\}.$$

surrogate 双対性は, 複数の凸制約付き準凸計画問題を単数の凸制約付き準凸計画問題に変換出来るということを示している. Lagrange 双対性と同様, A 上で最小値を取るような目的関数 f に対して, surrogate min-max 双対性と呼ばれる次のような等式についても研究がなされている.

$$\min_{x\in A} f(x) = \max_{\lambda\in\mathbb{R}^{(I)}_+} \inf \left\{ f(x) \;\middle|\; \sum_{i\in I} \lambda_i g_i(x) \leq 0 \right\}.$$

制約 g_i を固定したとき, 任意の準凸関数に対して surrogate 双対性が成り立つならば, 任意の A 上で最小値を取る準凸関数に対して surrogate min-max 双対性が成り立つ. しかし, その逆については詳細な研究がなされていなかった. Lagrange 双対性においては双対性と min-max 双対性は同値な概念ではないため, surrogate 双対性においても同様の関係が成り立つことが予想された. しかしその予想に反して, 我々は [15] において surrogate 双対性と surrogate min-max 双対性が同値であることを示した. その証明においては surrogate 双対性に対する必要十分な制約想定が重要な役割を成す.

本講究録では, surrogate 双対性と surrogate min-max 双対性の同値性を示した [15] における結果を紹介し, その具体例について述べる.

2 準備

本講究録を通じて関数 f は $\mathbb{R}^n$ から $[\infty, \infty]$ への関数とする. f のエピグラフを次のように定義する:

$$\mathrm{epi} f = \{(x, r) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}.$$

このとき, f が凸関数であるとは epi$f$ が凸集合であるときをいう. f の Fenchel 共役関数 f^* を次のように定義する:

$$f^*(v) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{\langle v, x \rangle - f(x)\}, \forall v \in \mathbb{R}^n.$$

また, f の $x \in \mathbb{R}^n$ における劣微分を次のように定義する:

$$\partial f(x) = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in \mathbb{R}^n, f(y) \geq f(x) + \langle v, y - x \rangle\}.$$

任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して関数 f のレベル集合を次のように定義する:

$$L(f, \leq, \alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

このとき, f が準凸関数であるとは任意の $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $L(f, \leq, \alpha)$ が凸集合であるときをいう. 任意の凸関数は準凸関数であるが, その逆は一般には成り立たない.

数理計画問題においては様々な双対性が示されており, 代表的なものとして Lagrange 双対性, Fenchel 双対性, surrogate 双対性等がある. 中でも Lagrange 双対性と Lagrange min-max 双対性は凸計画問題において重要な役割をなす双対性である. 以下の例が示すように, Lagrange 双対性と Lagrange min-max 双対性は同値な概念ではない.

Example 1. $I = (0, 1)$, $w_i = (1 - i, i)$ とし, g_i を以下のように定義する.

$$g_i(x) = \max\left\{\langle w_i, x \rangle + 2\sqrt{i(1-i)}, 0\right\}.$$

g_i はそれぞれ凸関数であり, $A = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 x_2 \geq 1, x < 0\}$ である.

このとき, 任意の A 上で最小値を取る凸関数 f に対して, Lagrange min-max 双対性が常に成り立つ. $x_0 \in A$ をこの問題の解とする.

(i) $x_0 \in \mathrm{int} A$ のとき.

$$0 \in \partial f(x) + N_A(x) = \partial f(x)$$

より,

$$f(x_0) = \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i \in I} 0 g_i(x) \right\}$$

となり Lagrange min-max 双対性が成り立つ.

(ii) $x_0 \in \mathrm{bd} A$ のとき.

このとき,

$$N_A(x) = \mathrm{cone}\{w_{i_0}\}, \quad \partial g_{i_0}(x) = \mathrm{co}\{0, w_i\}$$

を満たす $i_0 \in I$ が存在することが容易にわかる. よって,

$$0 \in \partial f(x) + N_A(x) = \partial f(x) + \mathrm{cone}\{w_{i_0}\} = \partial f(x) + \mathrm{cone}\, \partial g_{i_0}(x).$$

これより, ある $\lambda \geq 0$ が存在して,

$$f(x_0) = \min_{x \in A} f(x) = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \{f(x) + \lambda g_{i_0}(x)\}$$

が成り立つ.

以上 (i), (ii) より, 任意の A 上で最小値を取る凸関数 f に対して, Lagrange min-max 双対性が常に成り立つ.

一方で Lagrange 双対性は常には成り立たない. 実際, $f(x) = -x_1$ とすると, $\inf_{x \in A} f(x) = 0$ かつ f は A 上で最小値を取らない. このとき, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}$ に対して,

$$\inf_{x \in A} f(x) = 0 > \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(x) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \right\}.$$

これは Lagrange 双対性が成り立たないことを示している.

3 準凸計画問題に対する surrogate 双対性

本章では surrogate 双対性と surrogate min-max 双対性の同値性を示す結果を紹介し, その具体例について述べる.

surrogate 双対性と surrogate min-max 双対性は準凸計画問題において中心的な役割をなす双対性である. しかしその間の関係については十分な研究がなされていなかった. [15] において我々は, 次のような定理を示した.

定理 1. [15] I : 添字集合, $g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 凸関数, $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall i \in I, g_i(x) \leq 0\}$ とする.

このとき, 次は同値:

(i) $\mathrm{epi}\delta_A^* \subset \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}} \mathrm{cl\ cone\ epi} \left(\sum_{i \in I} \lambda_i g_i \right)^*$,

(ii) 任意の上半連続準凸関数 f に対して,

$$\inf_{x \in A} f(x) = \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}} \inf \left\{ f(x) \,\middle|\, \sum_{i \in I} \lambda_i g_i(x) \leq 0 \right\},$$

(iii) 任意の A 上で最小値を取る上半連続準凸関数 f に対して,

$$\min_{x\in A} f(x) = \max_{\lambda\in\mathbb{R}_+^{(I)}} \inf\left\{ f(x) \,\middle|\, \sum_{i\in I} \lambda_i g_i(x) \le 0 \right\}.$$

定理 1 は, 準凸計画問題において surrogate 双対性と surrogate min-max 双対性が同値であるということを示している. これは Lagrange 双対性と surrogate 双対性の間の差異を示す特徴的な結果である. 条件 (i) は surrogate 双対性に対する必要十分な制約想定として [12, 14] で提案されたものであったが, 定理 1 により surrogate min-max 双対性に対する必要十分な制約想定であることも示されている.

次に挙げる例は Lagrange 双対性, Lagrange min-max 双対性が成り立たず, surrogate 双対性, surrogate min-max 双対性が成り立つような凸不等式制約の一例である.

Example 2. $I = [0,1]$, $w_i = (1-i, i)$ とし, $g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次のように定義する.

$$g_i(x) = \begin{cases} \langle w_i, x\rangle^2 & \langle w_i, x\rangle \ge 0, \\ 0 & \langle w_i, x\rangle \le 0, \end{cases}$$

制約集合は $A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \le 0, x_2 \le 0\}$ である.

このとき, Lagrange min-max 双対性は常には成り立たない. 実際, $f(x_1, x_2) = -x_1$ とすると, f は $x = (0,0)$ で最小値 0 を取る. しかし, 任意の $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}$ に対して,

$$\inf_{x\in A} f(x) = 0 > \inf_{x\in\mathbb{R}} \left\{ f(x) + \sum_{i=1}^{2} \lambda_i g_i(x) \right\}.$$

これは Lagrange min-max 双対性が成り立たないことを示している. 同様に, Lagrange 双対性も成り立たない.

一方で任意の上半連続準凸関数に対して surrogate 双対性, surrogate min-max 双対性が成り立つ. f を $\mathbb{R}$ 上の上半連続準凸関数, $\mu = \inf_{x\in A} f(x)$ とする. $\mu = \inf_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ のときは $\lambda = 0$ とすれば成立するため, $\mu > \inf_{x\in\mathbb{R}^2} f(x)$ と仮定する. このとき, f, g_i の定義から, 分離定理を用いて

$$A \subset \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle w_{i_0}, x\rangle \le 0\}, \quad L(f, <, \mu) \subset \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle w_{i_0}, x\rangle > 0\}$$

を満たす $i_0 \in I$ が存在することを示すことが出来る.

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle w_{i_0}, x\rangle > 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_{i_0}(x) > 0\}$$

であるので,

$$\mu = \inf\{f(x) \mid g_{i_0}(x) \le 0\}$$

となり surrogate 双対性が成立する. 同様に, surrogate min-max 双対性も成立する.

参考文献

[1] F. Glover, *A Multiphase-Dual Algorithm for the Zero-One Integer Programming Problem*, Oper. Res. 13 (1965), pp. 879–919.

[2] M. A. Goberna, V. Jeyakumar and M. A. López, *Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities*, Nonlinear Anal. 68 (2008), pp. 1184–1194.

[3] H. J. Greenberg and W. P. Pierskalla, *Quasi-conjugate functions and surrogate duality*, Cah. Cent. Étud. Rech. Opér 15 (1973), pp. 437–448.

[4] D. G. Luenberger, *Quasi-convex programming*, SIAM Journal on Appl. Math. 16 (1968), pp. 1090–1095.

[5] V. Jeyakumar, N. Dinh and G. M. Lee, *A new closed cone constraint qualification for convex optimization*, Research Report AMR 04/8, Department of Applied Mathematics, University of New South Wales, (2004)

[6] C. Li, K. F. Ng and T. K. Pong, *Constraint qualifications for convex inequality systems with applications in constrained optimization*, SIAM J. Optim. 19 (2008), pp. 163–187.

[7] J. P. Penot and M. Volle, *On quasi-convex duality*, Math. Oper. Res. 15 (1990), pp. 597–625.

[8] J. P. Penot and M. Volle, *Surrogate programming and multipliers in quasi-convex programming*, SIAM J. Control Optim. 42 (2004), pp. 1994–2003.

[9] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *On set containment characterization and constraint qualification for quasiconvex programming*, J. Optim. Theory Appl. 149 (2011), pp. 554–563.

[10] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *Optimality conditions and the basic constraint qualification for quasiconvex programming*, Nonlinear Anal. 74 (2011), pp. 1279–1285.

[11] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *Necessary and sufficient conditions for some constraint qualifications in quasiconvex programming*, Nonlinear Anal. 75 (2012), pp. 2851–2858.

[12] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *Necessary and sufficient constraint qualification for surrogate duality*, J. Optim. Theory Appl. 152 (2012), pp. 366–377.

[13] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *Some constraint qualifications for quasiconvex vector-valued systems*, J. Global Optim. 55 (2013), pp. 539–548.

[14] S. Suzuki, D. Kuroiwa and G. M. Lee, *Surrogate duality for robust optimization*, European J. Oper. Res. 231 (2013), pp. 257–262.

[15] S. Suzuki and D. Kuroiwa, *A constraint qualification characterizing surrogate duality for quasiconvex programming*, preprint.