数理解析研究所講究録
第 1963 巻 2015 年 59-64

集合値写像と順序単調性を持つスカラー化関数との合成関数の凸性について

(Convexity properties for compositions of set-valued map and monotone scalarizing function)

小林尚吾 (Shogo Kobayashi), 斉藤裕 (Yutaka Saito), 田中環 (Tamaki Tanaka)
新潟大学大学院自然科学研究科
(Graduate School of Science and Technology, Niigata University)

概要

本研究では、集合値写像と順序単調性をもつスカラー化関数との合成関数の凸性について考察している。

1 はじめに

順序単調性を持つスカラー化関数としては $I_{k,V}^{(j)}$, $S_{k,V}^{(j)}$ が挙げられる ([2] を参照)。順序単調性とは, set-relation([1] を参照) を保存することである。すなわち, $A \leq_K^{(j)} B$ ならば $I_{k,V}^{(j)}(A) \leq I_{k,V}^{(j)}(B)$, $S_{k,V}^{(j)}(A) \leq S_{k,V}^{(j)}(B)$ が成立することである。また, $I_{k,V}^{(j)}$, $S_{k,V}^{(j)}$ は集合値写像の性質を受け継ぐことが知られている ([2] を参照)。つまり, F がある性質を持つとき, $I_{k,V}^{(j)} \circ F$, $S_{k,V}^{(j)} \circ F$ は同様の性質を持つことである。本稿では, 合成関数の凸性について一般的な結果を報告する。

2 準備

本研究では, X を実ベクトル空間, Y を実線形位相空間で以下のような空でない凸錐 K による順序を持つとする。

$$x \leq_K y \text{ if } y - x \in K \text{ for } x, y \in Y$$

通常,2 つの集合 $A, B \in 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ の和は $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$ と定義し、集合 $A \in 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ の実数 α によるスカラー倍は $\alpha A := \{\alpha a \mid a \in A\}$ と定義する。

定義 2.1 ([1]). 集合 $A, B \in 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ に対して, 以下の 6 つの関係 (set-relation) を定義する。

1. $A \leq_K^{(1)} B \underset{def}{\Leftrightarrow} A \subset \bigcap_{b \in B}(b - K) (\Leftrightarrow B \subset \cap_{a \in A}(a + K))$

2. $A \leq_K^{(2)} B \underset{def}{\Leftrightarrow} A \cap (\bigcap_{b \in B}(b - K)) \neq \emptyset$

3. $A \leq_K^{(3)} B \underset{def}{\Leftrightarrow} B \subset A + K$

4. $A \leq_K^{(4)} B \underset{def}{\Leftrightarrow} (\bigcap_{a \in A}(a + K)) \cap B \neq \emptyset$

5. $A \leq_K^{(5)} B \underset{def}{\Leftrightarrow} A \subset (B - K)$

6. $A \leq_K^{(6)} B \underset{def}{\Leftrightarrow} A \cap (B - K) \neq \emptyset (\Leftrightarrow (A + K) \cap B \neq \emptyset)$

本研究では, 集合値写像 $F : X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ に対して次の 5 種類の凸性を定義する。

定義 2.2 ([1]). 任意の $x_1, x_2 \in X$, $\lambda \in (0,1)$ に対して，まず 3 つの凸性を定義する。$j = 1, \ldots, 6$ に対して,

(1) F が *type* (j) K*-convex function* とは以下が成り立つことである。

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq_K^{(j)} \lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2)$$

(2) F が *type* (j) *properly quasi* K*-convex function* とは以下が成り立つことである。

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq_K^{(j)} F(x_1) \quad \text{又は} \quad F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq_K^{(j)} F(x_2)$$

(3) F が *type* (j) *naturally quasi* K*-convex function* とは以下が成り立つことである。

$$\exists \mu \in [0,1] \quad such \quad that \quad F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq_K^{(j)} \mu F(x_1) + (1-\mu)F(x_2)$$

次に，$j = 1, \ldots, 3$ に対して，以下の 2 つの凸性を定義する。

(4) F が *type* (j)*-lower quasiconvex function* とは以下が成り立つことである。

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq_K^{(j)} (F(x_1) + K) \cap (F(x_2) + K)$$

(5) F が *type* (j)*-upper quasiconvex function* とは以下が成り立つことである。

$$F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq_K^{(j)} \left(\bigcap_{y_1 \in F(x_1)} (y_1 + K) \right) \cap \left(\bigcap_{y_2 \in F(x_2)} (y_2 + K) \right)$$

注意 2.1. 上記の凸性には次のような関係がある。$j = 1, \ldots, 6$ に対して，(1)$\Rightarrow$(3)，(2)$\Rightarrow$(3)，$j = 3$ の場合のみ (3)$\Rightarrow$(4) であり，(3)$j = 6 \Rightarrow$(5)$j = 2$ である ([1] を参照)。

この凸性の双対的な概念として凹性を定義する。

定義 2.3. 任意の $x_1, x_2 \in X$，$\lambda \in (0,1)$ に対して，まず 3 つの凹性を定義する ([2])。$j = 1, \ldots, 6$ に対して,

(1) F が *type* (j) K*-concave function* とは以下が成り立つことである。

$$\lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \leq_K^{(j)} F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

(2) F が *type* (j) *propely quasi* K*-concave function* とは以下が成り立つことである。

$$F(x_1) \leq_K^{(j)} F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \quad \text{又は} \quad F(x_2) \leq_K^{(j)} F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

(3) F が *type* (j) *naturally quasi* K*-concave function* とは以下が成り立つことである。

$$\exists \mu \in [0,1] \quad such \quad that \quad \mu F(x_1) + (1-\mu)F(x_2) \leq_K^{(j)} F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$$

次に，$j=1,\ldots,3$ に対して以下を定義する。

(4) F が *type* (j)*-lower quasiconcave function* とは以下が成り立つことである。

$$(F(x_1)-K)\cap(F(x_2)-K)\leq_K^{(j)} F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$$

(5) F が *type* (j)*-upper quasiconcave function* とは以下が成り立つことである。

$$\left(\bigcap_{y_1\in F(x_1)}(y_1-K)\right)\cap\left(\bigcap_{y_2\in F(x_2)}(y_2-K)\right)\leq_K^{(j)} F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$$

注意 2.2. 凹性には凸性と同様に次のような関係がある。$j=1,\ldots,6$ に対して，(1)⇒(3)，(2)⇒(3) である。$j=5$ の場合のみ (3)⇒(4) であり、(3)$j=6$⇒(5)$j=4$ である。

定義 2.4 ([2]). $V,V'\in 2^Y\setminus\{\emptyset\}$，$k\in\operatorname{int}K$ とする。$j=1,\ldots,6$ に対してスカラー化関数 $I_{k,V}^{(j)}$，$S_{k,V}^{(j)}:2^Y\setminus\{\emptyset\}\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ を定義する。

$$I_{k,V}^{(j)}(V'):=\inf\{t\in\mathbf{R}\mid V'\leq_K^{(j)}(tk+V)\},\ S_{k,V}^{(j)}(V'):=\sup\{t\in\mathbf{R}\mid(tk+V)\leq_K^{(j)}V'\}$$

定義 2.5 (Yu (1974), [6]). $V\in Y\setminus\{\emptyset\}$ とする。V が *K-convex* であるとは，$V+K$ が凸集合になることである。

ここで ψ を拡張実数値関数 $2^Y\setminus\{\emptyset\}\to\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$ とする。

定義 2.6. $\mathscr{A}\subset 2^Y\setminus\{\emptyset\}$ が凸であるとは，任意の $A_1,A_2\in\mathscr{A},\lambda\in(0,1)$, に対して，$\lambda A_1+(1-\lambda)A_2\in\mathscr{A}$ が成り立つことである。

定義 2.7. ψ が凸関数 (凹関数) であるとは，任意の $A_1,A_2\in 2^Y\setminus\{\emptyset\},\lambda\in(0,1)$, に対して，

$$\psi(\lambda A_1+(1-\lambda)A_2)\leq(\geq)\lambda\psi(A_1)+(1-\lambda)\psi(A_2)$$

が成り立つことである。

定義 2.8. ψ が準凸 (準凹) 関数であるとは任意の実数 α に対して，$\operatorname{lev}(\psi,\leq(\geq),\alpha):=\{A\in 2^Y\setminus\{\emptyset\}\mid \psi(A)\leq(\geq)\alpha\}$ が凸であるときをいう。

命題 2.1. 空でない集合 V と $k\in\operatorname{int}K$ に対して，次が成り立つ。

1. $j=1,\ldots,3$ に対して，$I_{k,V}^{(j)}$ は凸関数である。
2. $j=4,\ldots,6$ に対して，V が $(-K)$*-convex* ならば $I_{k,V}^{(j)}$ は凸関数である。

命題 2.2. 空でない集合 V と $k\in\operatorname{int}K$ に対して，次が成り立つ。

1. $j=1,4,5$ に対して，$S_{k,V}^{(j)}$ は凹関数である。
2. $j=2,3,6$ に対して，V が *K-convex* ならば $S_{k,V}^{(j)}$ は凹関数である。

$I_{k,V}^{(5)}$ が実数を取る場合のみを証明する。他の場合も同様にすればよい。

証明 2.1. V を $(-K)$-convex と仮定する。$V_1',V_2'\in 2^Y\setminus\{\emptyset\}$，$\lambda\in(0,1)$，$\alpha_1:=I_{k,V}^{(5)}(V_1')$，$\alpha_2:=I_{k,V}^{(5)}(V_2')$ とする。任意の $s>0$ に対して，

$$V_1'\subset(\alpha_1+s)k+V-K,V_2'\subset(\alpha_2+s)k+V-K$$

である。V は $(-K)$-convex であるから,

$$\lambda V_1' + (1-\lambda)V_2' \subset \lambda\{(\alpha_1+s)k+V-K\} + (1-\lambda)\{(\alpha_2+s)k+V-K\}$$
$$\Rightarrow \lambda V_1' + (1-\lambda)V_2' \subset (\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 + s)k + V - K$$

が成立する。よって、

$$I_{k,V}^{(5)}(\lambda V_1' + (1-\lambda)V_2') \leq \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2 + s$$

であり、任意の $s>0$ であったから,

$$I_{k,V}^{(5)}(\lambda V_1' + (1-\lambda)V_2') \leq \lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\alpha_2$$

定義 2.9. $j=1,\ldots,6$ に対して，ψ が $2^Y \setminus \{\emptyset\}$ 上で $\leq_K^{(j)}$ に関して *j-monotone* であるとは,

$$A \leq_K^{(j)} B \Rightarrow \psi(A) \leq \psi(B).$$

と定義する。

3 集合値写像と順序単調性を持つスカラー化関数との合成関数の凸性

命題 2.1 と 2.2 より $I_{k,V}^{(j)}$，$S_{k,V}^{(j)}$ には凸性または凹性があり, さらに順序単調性がある。ここからは関数を一般化し、上記の 2 つの性質をもつ関数 ψ と集合値写像 F との合成関数の性質を述べる。
$j=1,\ldots,6$ に対して，以下の結果が成り立つ。

ψ \ F		type (j) K-convex	type (j) naturally quasi K-convex
j-monotone	凸	凸	準凸
	準凸	準凸	準凸

表 1: $\psi \circ F$ の凸性

ψ \ F		type (j) K-concave	type (j) naturally quasi K-concave
j-monotone	凹	凹	準凹
	準凹	準凹	準凹

表 2: $\psi \circ F$ の凹性

ψ \ F	type (j) properly quasi K-convex	type (j) properly quasi K-concave
j-monotone	準凸	準凹

表 3: $\psi \circ F$ の凸性と凹性

注意 1 と 2 で述べたように $j = 3,5,6$ の場合は上記の表で扱っている凸性と type (j)-lower quasiconvex,type (j)-upper quasiconcave に関係があり、後者の方がより広い凸性であった、上記の表と

同様のことをそれらの場合に考えた時, 同じようには合成関数が凸 (凹) 性を持たない。以下に考える場合と例を示す。$X := \mathbb{R}$, $Y := \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{R}^2_+$, $k := (1,1)^{\mathrm{T}}$, $V := [(0,0)^{\mathrm{T}}, (1,1)^{\mathrm{T}}]$ とする。

F / ψ		type (3)-lower quasiconvex
3-monotone	凸	例 3.1

F / ψ		type (2)-upper quasiconvex
2-monotone	凸	例 3.2

F / ψ		type (5)-lower quasiconcave
5-monotone	凹	例 3.3

F / ψ		type (4)-upper quasiconcave
4-monotone	凹	例 3.4

例 3.1. $\psi := I^{(3)}_{k,V}$, $D := \mathrm{co}\,\{(1,1)^{\mathrm{T}}, (2,1)^{\mathrm{T}}\} \cup \mathrm{co}\,\{(1,1)^{\mathrm{T}}, (1,2)^{\mathrm{T}}\}$ とする。

1. $F(x) := \begin{cases} D + (x-1, -x+1)^{\mathrm{T}} & (x < 1) \\ D + (x-1, x-1)^{\mathrm{T}} & (x \geq 1) \end{cases}$ とする。このとき，$I^{(3)}_{k,V} \circ F(x) = |x-1| + 1$ であるから，合成関数は凸関数である。

2. $F(x) := \begin{cases} D + (x-1, x-1)^{\mathrm{T}} & (x < 1) \\ D & (x \geq 1) \end{cases}$ とする。このとき，$I^{(3)}_{k,V} \circ F(x) = \begin{cases} x & (x < 1) \\ 1 & (x \geq 1) \end{cases}$ であるから，合成関数は凹関数である。

例 3.2. $\psi := I^{(2)}_{k,V}$, $D := \mathrm{co}\,\{(1,1)^{\mathrm{T}}, (2,1)^{\mathrm{T}}\} \cup \mathrm{co}\,\{(1,1)^{\mathrm{T}}, (1,2)^{\mathrm{T}}\}$ とする。

1. $F(x) := \begin{cases} D + (-2, -x)^{\mathrm{T}} & (x < 0) \\ D + (x-2, x)^{\mathrm{T}} & (x \geq 0) \end{cases}$ とする。このとき，$I^{(2)}_{k,V} \circ F(x) = |x| + 1$ であるから，合成関数は凸関数である。

2. $F(x) := \begin{cases} D + (-2, x)^{\mathrm{T}} & (x < 0) \\ D + (-2, 0)^{\mathrm{T}} & (x \geq 0) \end{cases}$ とする。このとき，$I^{(2)}_{k,V} \circ F(x) = \begin{cases} -1 & (x \leq -2) \\ x+1 & (-2 < x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$ であるから，合成関数は凹関数である。

例 3.3. $\psi := S^{(5)}_{k,V}$, $D := \mathrm{co}\,\{(1,1)^{\mathrm{T}}, (0,1)^{\mathrm{T}}\} \cup \mathrm{co}\,\{(1,1)^{\mathrm{T}}, (1,0)^{\mathrm{T}}\}$ とする。

1. $F(x) := \begin{cases} D & (x < 1) \\ D + (x-1, x-1)^{\mathrm{T}} & (x \geq 1) \end{cases}$ とする。このとき，$S^{(5)}_{k,V} \circ F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ x-1 & (x \geq 1) \end{cases}$ であるから，合成関数は凸関数である。

2. $F(x) := \begin{cases} D & (x < 1) \\ D + (-x+1, x-1)^{\mathrm{T}} & (x \geq 1) \end{cases}$ とする。このとき，$S^{(5)}_{k,V} \circ F(x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ -x+1 & (x \geq 1) \end{cases}$ であるから，合成関数は凹関数である。

例 3.4. $\psi := S^{(4)}_{k,V}$, $D := \mathrm{co}\,\{(1,1)^{\mathrm{T}}, (2,1)^{\mathrm{T}}\} \cup \mathrm{co}\,\{(1,1)^{\mathrm{T}}, (1,2)^{\mathrm{T}}\}$ とする。

1. $F(x) := \begin{cases} D + (-2, 0)^{\mathrm{T}} & (x < 0) \\ D + (x-2, x)^{\mathrm{T}} & (x \geq 0) \end{cases}$ とする。このとき，$S^{(4)}_{k,V} \circ F(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ x-1 & (x \geq 0) \end{cases}$ であるから，合成関数は凸関数である。

2. $F(x) := \begin{cases} D + (-2, 0)^{\mathrm{T}} & (x < 0) \\ D + (-x-2, -x)^{\mathrm{T}} & (x \geq 0) \end{cases}$ とする。このとき，$S^{(4)}_{k,V} \circ F(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ -x-1 & (x \geq 0) \end{cases}$ であるから，合成関数は凹関数である。

参考文献

[1] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T. X. D. Ha, *On convexity of set-valued maps*, Nonlinear Anal. **30** (1997), 1487–1496.

[2] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Characterization of nonlinear scalarizing function for set-valued maps*, in "Proceedings of the Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization," S. Akashi, W. Takahashi and T. Tanaka (eds.), Yokohama Publishers, Yokohama, 2009, pp.193–204.

[3] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Unified scalarization for sets and set-valued Ky Fan minimax inequality*, J. Nonlinear and Convex Anal. **11** (2010), 513–525.

[4] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Inherited properties of nonlinear scalarizing function for set-valued map*, in"Proceedings of the 6th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis," Yokohama Publishers, Yokohama, 2010, pp.161–177.

[5] T. Kubo, T. Tanaka, and S. Yamada, *Ekeland's variational principle set-valued maps via scalarization*, in"Proceedings of the 7th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis," Yokohama Publishers, Yokohama, 2012, pp.283–289.

[6] P. L. Yu, *Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives*, J. Optim. Theory Appl. **14**(1974), 319–377.