数理解析研究所講究録
第 1963 巻 2015 年 122-129

Primal-Dual Optimization through A-G Inequality

岩本誠一 (九州大学・名誉教授), 木村寛 (秋田県立大学),
藤田敏治 (九州工業大学)

Seiichi Iwamoto (Professor Emeritus, Kyushu University),
Yutaka Kimura (Akita Prefectural University),
Toshiharu Fujita (Kyushu Institute of Technology)

概要

We consider a duality between a primal quadratic optimization problem and its dual problem through arithmetic-geometric mean inequality (A-G inequality). It is shown that optimal values and optimal solutions of these problems are characterized by the Golden number. Both optimal solutions of (primal and dual) problems have a Golden triplet, which consists of (i) Golden optimal value, (ii) Golden optimal path, and (iii) Golden complementarity. This is called the Golden complementary duality.

1 主双対最適化

1.1 フィボナッチ最適化問題

n 変数 $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ の 2 次計画問題として次の最小化問題 (P_1) を考える。

$$
(\mathrm{P}_1)\quad
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left[(x_k-x_{k+1})^2+x_{k+1}^2\right]\\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ x\in R^n\\
 & \text{(ii)}\ \ x_0=c.
\end{array}
$$

ただし $c\in R^1$ とする。記号 R^1 は実数全体の集合を表す。この主問題 (P_1) の双対問題は n 変数 $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)$ の最大化問題として次で与えられる：

$$
(\mathrm{D}_1)\quad
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & \displaystyle 2c\mu_1-\mu_1^2-\sum_{k=1}^{n-1}\left[(\mu_k-\mu_{k+1})^2+\mu_{k+1}^2\right]-\mu_n^2\\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ \mu\in R^n.
\end{array}
$$

定理 1 (i) 主問題 (P_1) は最小解

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \left(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \hat{x}_k,\ \ldots,\ \hat{x}_{n-1},\ \hat{x}_n \right) \\ &= \frac{c}{F_{2n+1}} \left(F_{2n-1},\ F_{2n-3},\ \ldots,\ F_{2n-2k+1},\ \ldots,\ F_3,\ F_1 \right)\end{aligned}$$

のとき、最小値 $m_1 = \dfrac{F_{2n}}{F_{2n+1}} c^2$ をもつ。

(ii) 双対問題 (D_1) は最大解

$$\begin{aligned}\mu^* &= \left(\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_k^*,\ \ldots,\ \mu_{n-1}^*,\ \mu_n^* \right) \\ &= \frac{c}{F_{2n+1}} \left(F_{2n},\ F_{2n-2},\ \ldots,\ F_{2n-2k+2},\ \ldots,\ F_4,\ F_2 \right)\end{aligned}$$

のとき、最大値 $M_1 = \dfrac{F_{2n}}{F_{2n+1}} c^2$ をもつ。

ここに $\{F_n\}$ は**フィボナッチ数列**(Fibonacci sequence) を表し、以下の 2 階線形差分方程式 (3 項間漸化式)

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \qquad x_1 = 1,\ x_0 = 0 \tag{1}$$

の解として定義される。

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987

表 1　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

実数

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$$

は**黄金数**(Golden number) といわれている。黄金数については次が成り立つ。

$$1 : \phi = \phi^{-2} : \phi^{-1}, \quad \phi^{-2} + \phi^{-1} = 1.$$

黄金数 ϕ は 2 次方程式

$$x^2 - x - 1 = 0 \tag{2}$$

の正の解としても定義される。

1.2 黄金最適化問題

n 変数 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ の 2 次計画問題として次の最小化問題 (P_2) を考える。

$$\begin{array}{lll} & \text{minimize} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left[(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2 \right] + \phi^{-1} x_n^2 \\ (\mathrm{P}_2) & \text{subject to} & \text{(i)}\ \ x \in R^n \\ & & \text{(ii)}\ \ x_0 = c. \end{array}$$

この双対問題は n 変数 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ の最大化問題として次で与えられる：

$$
(\mathrm{D}_2) \quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sum_{k=1}^{n-1} \left[(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2 \right] - \phi^{-1}\mu_n^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad \mu \in R^n. \end{array}
$$

両問題の最適解は次のようになる。

定理 2 (i) 主問題 (P_2) は最小解

$$
\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \cdots,\ \hat{x}_{n-1},\ \hat{x}_n) = c\left(\phi^{-2},\ \ \phi^{-4},\ \ \cdots,\ \ \phi^{-2n+2},\ \ \phi^{-2n}\right)
$$

で最小値 $m_2 = \phi^{-1}c^2$ をもつ。

(ii) 双対問題 (D_2) は最大解

$$
\mu^* = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \cdots,\ \mu_{n-1}^*,\ \mu_n^*) = c\left(\phi^{-1},\ \ \phi^{-3},\ \ \cdots,\ \ \phi^{-2n+3},\ \ \phi^{-2n+1}\right)
$$

で最大値 $M_2 = \phi^{-1}c^2$ をもつ。

補題 1 黄金数 ϕ について次が成り立つ。

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \phi^{2k-1} = \phi^{2n} - 1 \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \phi^{-2k} = \phi^{-1} - \phi^{-2n-1} \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$

(iii) $\phi^n + \phi^{n+1} = \phi^{n+2} \quad n = \cdots, -1, 0, 1, \cdots,$

(iv) $\displaystyle 2\sum_{k=1}^{n} \phi^{-3k-1} + \phi^{-3n-2} = \phi^{-2} \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$

定義 1 列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ は

$$
x_n = c\phi^{-2n} \qquad \text{または} \qquad x_n = c\phi^{-n}
$$

のとき、**黄金経路** *(Golden path, GP)* という。ただし、c は定数である。前者を $1:\phi$ 型といいい、後者を $\phi:1$ 型という。

主問題 (P_2) の最小解と双対問題 (D_2) の最大解の間には次の 3 つの関係が成り立っている。

1. **（双対性）** 最小値と最大値が等しい：$m_2 = M_2$. 共に初期値 c の 2 次関数で、その係数は黄金数の逆数 ϕ^{-1} である。

2. **（黄金）** 最小点 $(x_0,\ \hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \hat{x}_n)$ と最大点 $(\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_n^*)$ は共に $1:\phi$ 型の黄金経路である。

3. **（相補性）** 最小点と最大点を交互に編むと、$\phi:1$ 型の黄金経路である。

すなわち、最適点の交互列は

$$\begin{aligned}&(x_0,\ \mu_1^*,\ \hat{x}_1,\ \mu_2^*,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \mu_n^*,\ \hat{x}_n)\\ =\ &c(1,\ \phi^{-1},\ \phi^{-2},\ \phi^{-3},\ \ldots,\ \phi^{-(2n-1)},\ \phi^{-2n})\end{aligned}$$

となる。

この三位一体の関係を**黄金相補双対性** (Golden complementary duality, GCD) という [12, 5, 14, 15, 6, 16]。

2 相加・相乗平均不等式

定理 3 任意の $x, y \in R^1$ に対して

$$2xy \le x^2 + y^2 \tag{3}$$

が成り立つ。等号は $x = y$ のときに限り成り立つ。

不等式 (3) は**相加・相乗平均不等式** (arithmetic-geometric mean inequality) (以下、AG 不等式とよぶ) とよばれる。

補題 2 c を定数とすると、不等式

$$2c\mu_1 - \mu_1^2 - \phi^{-1}\mu_1^2 \le (c - x_1)^2 + x_1^2 + \phi^{-1}x_1^2 \qquad \forall x_1 \in R^1, \forall \mu_1 \in R^1 \tag{4}$$

が成り立つ。等号は $x_1 = \phi^{-2}c,\ \mu_1 = \phi^{-1}c$ のときに限り成り立つ。このとき両辺の値は $\phi^{-1}c^2$ になる。

Proof. AG 不等式より、任意の実数 $x_1,\ \mu_1$ に対して 2 つの不等式と等号条件

$$\begin{aligned}2(c - x_1)\mu_1 &\le (c - x_1)^2 + \mu_1^2\ ; \qquad c - x_1 = \mu_1\\ 2\left(\phi^{\frac{1}{2}}x_1\right)\left(\phi^{-\frac{1}{2}}\mu_1\right) &\le \phi x_1^2 + \phi^{-1}\mu_1^2\ ; \qquad \phi^{\frac{1}{2}}x_1 = \phi^{-\frac{1}{2}}\mu_1\end{aligned}$$

が成り立つ。辺々加えると

$$2c\mu_1 \le \left[(c - x_1)^2 + \phi x_1^2\right] + \mu_1^2 + \phi^{-1}\mu_1^2$$

になる。$\phi = 1 + \phi^{-1}$ であることから、すなわち (4) を得る。この等号は 2 つの等号条件が同時に成り立つとき、すなわち、$x_1 = \phi^{-2}c, \mu_1 = \phi^{-1}c$ のとき成り立つ。このとき両辺の値が $\phi^{-1}c^2$ であることは、実際に右辺は

$$\begin{aligned}(c - x_1)^2 + x_1^2 + \phi^{-1}x_1^2 &= c^2\left[(\phi^{-2} + \phi^{-4}) + \phi^{-5}\right]\\ &= c^2\left[(\phi^{-1} - \phi^{-5}) + \phi^{-5}\right]\\ &= \phi^{-1}c^2.\end{aligned}$$

一方、左辺についても

$$\begin{aligned} 2c\mu_1 - \mu_1^2 - \phi^{-1}\mu_1^2 &= c^2\left[2\phi^{-1} - (\phi^{-2} + \phi^{-3})\right] \\ &= c^2\left[2\phi^{-1} - \phi^{-1}\right] \\ &= \phi^{-1}c^2 \end{aligned}$$

より成り立つ。

補題 3 cを定数とする。$(x_1, x_2) \in R^2$, $(\mu_1, \mu_2) \in R^2$ のとき

$$2c\mu_1 - \mu_1^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 - \mu_2^2 - \phi^{-1}\mu_2^2 \le (c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + \phi^{-1}x_2^2 \quad (5)$$

が成り立つ。等号は $x_1 = \phi^{-2}c$, $x_2 = \phi^{-4}c$, $\mu_1 = \phi^{-1}c$, $\mu_2 = \phi^{-3}c$ のときに限り成り立つ。このとき両辺の値は $\phi^{-1}c^2$ になる。

Proof. AG 不等式より、任意の実数 x_1, x_2, μ_1, μ_2 に対して 4 つの不等式と等号条件

$$\begin{aligned} 2(c - x_1)\mu_1 &\le (c - x_1)^2 + \mu_1^2\,; \qquad c - x_1 = \mu_1 \\ 2x_1(\mu_1 - \mu_2) &\le x_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2\,; \qquad x_1 = \mu_1 - \mu_2 \\ 2(x_1 - x_2)\mu_2 &\le (x_1 - x_2)^2 + \mu_2^2\,; \qquad x_1 - x_2 = \mu_2 \\ 2\left(\phi^{\frac{1}{2}}x_2\right)\left(\phi^{-\frac{1}{2}}\mu_2\right) &\le \phi x_2^2 + \phi^{-1}\mu_2^2\,; \qquad \phi^{\frac{1}{2}}x_2 = \phi^{-\frac{1}{2}}\mu_2 \end{aligned}$$

が成り立つ。辺々加えると

$$2c\mu_1 \le \left[(c - x_1)^2 + \phi x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + \phi x_2^2\right] + \left[\mu_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + \mu_2^2 + \phi^{-1}\mu_2^2\right]$$

になる。$\phi = 1 + \phi^{-1}$ であることから、すなわち (5) を得る。この等号は 4 つの等号条件が同時に成り立つとき、すなわち、

$$x_1 = \phi^{-2}c, \ \ x_2 = \phi^{-4}c, \ \ \mu_1 = \phi^{-1}c, \ \ \mu_2 = \phi^{-3}c$$

のとき成り立つ。このとき両辺の値が $\phi^{-1}c^2$ であることは、実際に右辺は、

$$\begin{aligned} &(c - x_1)^2 + x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 + x_2^2 + \phi^{-1}x_2^2 \\ &= c^2\left[\left(\phi^{-2} + \phi^{-4} + \phi^{-6} + \phi^{-8}\right) + \phi^{-9}\right] \\ &= c^2\left[\left(\phi^{-1} - \phi^{-9}\right) + \phi^{-9}\right] \\ &= \phi^{-1}c^2. \end{aligned}$$

一方、左辺についても

$$\begin{aligned} &2c\mu_1 - \mu_1^2 - (\mu_1 - \mu_2)^2 - \mu_2^2 - \phi^{-1}\mu_2^2 \\ &= c^2\left[2\phi^{-1} - (\phi^{-2} + \phi^{-4}) - (\phi^{-6} + \phi^{-7})\right] \\ &= c^2\left[2\phi^{-1} - (\phi^{-1} - \phi^{-5}) - \phi^{-5}\right] \\ &= c^2\left(2\phi^{-1} - \phi^{-1}\right) \\ &= \phi^{-1}c^2 \end{aligned}$$

より成り立つ。

定理 4 c を定数として、$x_0 = c$ とすると、任意の $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in R^n$, $\mu = (\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n) \in R^n$ に対して

$$2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\left[(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2\right] - \phi^{-1}\mu_n^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left[(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2\right] + \phi^{-1}x_n^2 \tag{6}$$

が成り立つ。等号は

$$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n) = c\left(\phi^{-2},\ \phi^{-4},\ \cdots,\ \phi^{-2n+2},\ \phi^{-2n}\right) \tag{7}$$

$$(\mu_1,\ \mu_2,\ \cdots,\ \mu_{n-1},\ \mu_n) = c\left(\phi^{-1},\ \phi^{-3},\ \cdots,\ \phi^{-2n+3},\ \phi^{-2n+1}\right) \tag{8}$$

のときに限り成り立つ。このとき両辺の値は $\phi^{-1}c^2$ になる。

Proof. AG 不等式 $2xy \leq x^2 + y^2$ $(\forall x, y \in R^1)$ より、x, μ に対して $2n$ 個の不等式と等号条件

$$\begin{aligned}
2(c - x_1)\mu_1 &\leq (c - x_1)^2 + \mu_1^2\ ; &\quad c - x_1 = \mu_1\\
2x_1(\mu_1 - \mu_2) &\leq x_1^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2\ ; &\quad x_1 = \mu_1 - \mu_2\\
2(x_1 - x_2)\mu_2 &\leq (x_1 - x_2)^2 + \mu_2^2\ ; &\quad x_1 - x_2 = \mu_2\\
&\vdots&\\
2x_{k-1}(\mu_{k-1} - \mu_k) &\leq x_{k-1}^2 + (\mu_{k-1} - \mu_k)^2\ ; &\quad x_{k-1} = \mu_{k-1} - \mu_k\\
2(x_{k-1} - x_k)\mu_k &\leq (x_{k-1} - x_k)^2 + \mu_k^2\ ; &\quad x_{k-1} - x_k = \mu_k\\
&\vdots&\\
2x_{n-1}(\mu_{n-1} - \mu_n) &\leq x_{n-1}^2 + (\mu_{n-1} - \mu_n)^2\ ; &\quad x_{n-1} = \mu_{n-1} - \mu_n\\
2(x_{n-1} - x_n)\mu_n &\leq (x_{n-1} - x_n)^2 + \mu_n^2\ ; &\quad x_{n-1} - x_n = \mu_n\\
2\left(\phi^{\frac{1}{2}}x_n\right)\left(\phi^{-\frac{1}{2}}\mu_n\right) &\leq \phi x_n^2 + \phi^{-1}\mu_n^2\ ; &\quad \phi^{\frac{1}{2}}x_n = \phi^{-\frac{1}{2}}\mu_n
\end{aligned}$$

が成り立つ。辺々加えると

$$2c\mu_1 \leq \sum_{k=0}^{n-1}\left[(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2\right] + \phi^{-1}x_n^2 + \mu_1^2 + \sum_{k=1}^{n-1}\left[(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2\right] + \phi^{-1}\mu_n^2$$

になる。$\phi = 1 + \phi^{-1}$ であることから、すなわち (6) を得る。$2n$ 個の等号条件が同時に成り立つとき、この等号は成り立つ。しかも $2n$ 連立 $2n$ 元 1 次方程式は唯一の解 (7), (8) を

もつ。このとき両辺の値が $\phi^{-1}c^2$ であることは、実際に右辺は、

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}\left[(x_k - x_{k+1})^2 + x_{k+1}^2\right] + \phi^{-1}x_n^2 \\
&= c^2\left[\sum_{k=1}^{2n}\phi^{-2k} + \phi^{-4n-1}\right] \\
&= c^2\left[\left(\phi^{-1} - \phi^{-4n-1}\right) + \phi^{-4n-1}\right] \\
&= \phi^{-1}c^2.
\end{aligned}
$$

一方、左辺についても

$$
\begin{aligned}
&2c\mu_1 - \mu_1^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\left[(\mu_k - \mu_{k+1})^2 + \mu_{k+1}^2\right] - \phi^{-1}\mu_n^2 \\
&= c^2\left[2\phi^{-1} - \sum_{k=1}^{2n-2}\phi^{-2k} - \left(\phi^{-4n+2} + \phi^{-4n+1}\right)\right] \\
&= c^2\left[2\phi^{-1} - \left(\phi^{-1} - \phi^{-4n+3}\right) - \phi^{-4n+3}\right] \\
&= c^2\left(2\phi^{-1} - \phi^{-1}\right) \\
&= \phi^{-1}c^2
\end{aligned}
$$

より成り立つ。

参考文献

[1] E.F. Beckenbach and R.E. Bellman, *Inequalities*, Springer-Verlag, Ergebnisse **30**, 1961.

[2] R.E. Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, New York, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[3] S. Iwamoto, Inverse theorem in dynamic programming I, II, III, J. Math. Anal. Appl. **58**(1977), 113–134, 247–279, 439–448.

[4] S. Iwamoto, Dynamic programming approach to inequalities, J. Math. Anal. Appl. **58**(1977), 687–704.

[5] Iwamoto, S., "Golden optimal policy in calculus of variation and dynamic programming," *Advances in Mathematical Economics* Vol.10, 2007, pp.65–89.

[6] 岩本 誠一,「動学的最適化における黄金最適政策、小特集：経済分析と最適化の数理」, 三田学会雑誌 (慶應義塾経済学会), 第 99 巻 4 号, 2007 年, pp.101–125.

[7] S. Iwamoto, On Bellman's allocation processes, *J. Math. Anal. Appl.* **111**(1985), no. 1, 65–89.

[8] S. Iwamoto, R.J. Tomkins and C.-L. Wang, Inequalities and mathematical programming III, Proceedings of the 5th International Conference on General Inequalities, Oberwolfach, West Germany, May 1986, *General Inequalities* **V**, Ed. W. Walter, Bikhauser Verlag, Basel and Stuttugart, ISNM (1987), 419–432.

[9] 岩本誠一、動的計画論、九大出版会、1987.

[10] 岩本誠一、最適経路 — フィボナッチから黄金へ — 、「不確実性下における意思決定問題」、京大数理研講究録1734、２０１１年３月、ｐｐ．１９６−２０４．

[11] S. Iwamoto, On Fibonacci identities, *preprint.*

[12] 岩本 誠一、最適化の数理 II ベルマン方程式 (Mathematics for Optimization II Bellman Equation)、数理経済学研究センター「数理経済学叢書 5」, 知泉書館, 2013 年 11 月, pp.451.

[13] 岩本 誠一、吉良 知文、植野 貴之、ダ・ヴィンチ・コード, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 (2009 年 10 月) 23 号, pp.1–22.

[14] S. Iwamoto and M. Yasuda, "Dynamic programming creates the Golden Ratio, too," *Proc. of the Sixth Intl Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 2004)*, Ballarat, Australia, December, 2004.

[15] S. Iwamoto and M. Yasuda, Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes, Ed. S. Elaydi, K. Nishimura, M. Shishikura and N. Tose, Advanced Studies in Pure Mathematics 53, June 2009, Advances in Discrete Dynamic Systems, pp.77–86. Proceedings of The International Conference on Differential Equations and Applications (ICDEA2006), Kyoto University, Kyoto, Japan, July, 2006.

[16] A. Kira and S. Iwamoto, Golden complementary dual in quadratic optimization, Modeling Decisions for Artificial Intelligence, Proceedings of the Fifth International Confernece (MDAI 2008), Sabadell (Barcelona), Catalonia, Spain, October 30-31, 2008, Eds. V. Torra and Y. Narukawa, Springer-Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol.5285, 2008, pp.191–202.