数理解析研究所講究録
第 1963 巻 2015 年 130-137

スカラー化を用いたRicceriの定理の集合値写像への一般化

(On generalization of Ricceri's theorem into set-valued maps via scalarization)

新潟大学大学院自然科学研究科　齋藤 裕
Yutaka Saito
Graduate School of Science and Technology, Niigata University
新潟大学大学院自然科学研究科　田中 環
Tamaki Tanaka
Graduate School of Science and Technology, Niigata University
新潟大学理学部数学科　山田 修司
Syuuji Yamada
Faculty of Science, Niigata University

1　はじめに

本研究では，実数値関数に関する不等式定理をスカラー化手法を使って集合値写像へ一般化する。対象となる Ricceri の定理は，いわゆる高橋の不等式定理と補助的な関係にある（それぞれ [4] と [6] を参照）。集合値一般化をするための集合における不等式は，論文 [1] において提案された集合間の二項関係（set-relations）を用いる。その論文中では，type(1) から type(6) までの 6 つの二項関係 $\leq_C^{(j)}$ $(j=1,\ldots,2)$ が提案されている。特に type(3) と type(5) の二項関係はそれぞれ半順序になるため，集合値解析において広く研究されており，本研究でもその 2 種を用いる。

高橋の不等式定理の集合値一般化についてはすでに論文 [3] において集合値写像へ一般化した定理が 4 種示されている。その 4 種の定理の結論は前述の二項関係 $\leq_C^{(j)}$ の形で表すことができ，それぞれ $\leq_C^{(3)}$，$\not\leq_C^{(3)}$，$\leq_C^{(5)}$，$\not\leq_C^{(5)}$ を使って言い換えることができる。一方，Ricceri の定理の集合値一般化についても論文 [5] の中で $\leq_C^{(5)}$ の場合のみ定理を得ている。本稿では Ricceri の定理の集合値一般化について，$\not\leq_C^{(3)}$ の場合を証明した。また，高橋の不等式定理の集合値一般化例と比較し，同様の結論が得られると推測される $\leq_C^{(3)},\leq_C^{(5)}$ の場合について，検討した。

2　準備

この節では本稿において使用する定義を紹介する。以下，本稿では，E を実線形位相空間，θ_E を E の零元，Y を順序実線形位相空間，C を Y の順序錐，f を実数値関数，F を集合値写像，$\mathcal{V}(\cdot)$ を $\cdot$ の全ての開近傍からなる族とする。

まず，錐による集合の有界性として次の 2 つの概念を導入する。

定義 2.1 (**C–bounded, C–proper**)

- $A \subset Y$ が *C–bounded* であるとは，任意の $U \in \mathcal{V}(\theta_Y)$ について，$A \subset tU + C$ となる $t \geq 0$ が存在することである。
- $A \subset Y$ が *C–proper* であるとは，$A + C \neq Y$ が成り立つことである。

実数値関数における半連続性を一般化した概念として，集合値写像 $F : X \to Y$ の（下半）連続性を次のように与える。

定義 2.2 (**C–continuity**)

- F が *C–lower continuous*（C–l.c.）であるとは，任意の $\bar{x} \in E$ と $F(\bar{x}) \cap W \neq \emptyset$ を満足する開集合 W に対して，任意の $y \in U$ について $F(y) \cap (W + C) \neq \emptyset$ となる $U \in \mathcal{V}(\bar{x})$ が存在することである。
- F が *C–upper continuous*（C–u.c.）であるとは，任意の $\bar{x} \in E$ と $F(\bar{x}) \subset W$ を満足する開集合 W に対して，任意の $y \in U$ について $F(y) \subset W + C$ となる $U \in \mathcal{V}(\bar{x})$ が存在することである。

集合における二項関係として，次の二項関係を用いる。これらはどちらも半順序関係である。

定義 2.3 (**set-relations, [1]**) 2 つの集合 $A, B \in 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ について，次のように書くこととする。

1. $A \leq_C^{(3)} B$ とは $B \subset (A + C)$ である。
2. $A \leq_C^{(5)} B$ とは $A \subset (B - C)$ である。

集合値写像の凹性として次を用いる。

定義 2.4 (**type (j) C–concavity**) 各 $j = 3, 5$ について，F は *type (j) C–concave*（C–conc.）であるとは，任意の $x, y \in E$ と $\lambda \in (0, 1)$ について，

$$\lambda F(x) + (1 - \lambda) F(y) \leq_C^{(j)} F(\lambda x + (1 - \lambda) y)$$

が成り立つことである。

定義 2.3 の二項関係を用いた定義 2.4 の凹性とそれに類似したいくつかの凹性について，それらの概念の間には強弱があり，特に定義 2.4 の凹性の概念は強いものである。

次にスカラー化関数を 2 つ紹介する。

定義 2.5 (**unified scalarization for sets, [2]**) 集合 $V \in 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ と方向 $k \in \operatorname{int} C$ をとる。各 $j = 3, 5$ について，スカラー化関数 $I_{k,V}^{(j)}$，$S_{k,V}^{(j)} : 2^Y \setminus \{\emptyset\} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ をそれぞれ

$$I_{k,V}^{(j)}(A) := \inf \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; A \leq_C^{(j)} (tk + V) \right\}, S_{k,V}^{(j)}(A) := \sup \left\{ t \in \mathbb{R} \;\middle|\; (tk + V) \leq_C^{(j)} A \right\}$$

と定める。これらを集合に対する統一的なスカラー化関数（unified scalarization functions for sets）と呼ぶ。

これらのスカラー化関数は集合の二項関係と実数の大小についての順序関係を保存する。すなわち，各 $j=3,5$ に対して，任意の $A,B\in 2^Y\setminus\{\emptyset\}$，$V\in 2^Y\setminus\{\emptyset\}$，$k\in \operatorname{int}C$ について

$$A\leq_C^{(j)} B\Rightarrow I_{k,V}^{(j)}(A)\leq I_{k,V}^{(j)}(B)\quad \text{かつ}\quad S_{k,V}^{(j)}(A)\leq S_{k,V}^{(j)}(B)$$

が成り立つ。

3 既存の定理との比較・類推

この節では既存の定理を紹介し，指針を述べる。まず，主題となる Ricceri の定理と高橋の不等式定理を紹介する。

定理 3.1 (Fan-Takahashi の不等式定理，[6]) E を実 *Hausdorff* 線形位相空間，X を E の空でない凸コンパクト部分集合，f を $X\times X$ 上の実数値写像で以下の条件を満たすものとする。

(1) 任意の $x\in X$ に対して，$f(x,\cdot)$ は X 上で準凹関数

(2) 任意の $y\in X$ に対して，$f(\cdot,y)$ は X 上で下半連続

(3) 任意の $x\in X$ に対して，$f(x,x)\leq 0$

このとき，ある $\hat{x}\in X$ が存在して，任意の $y\in X$ に対して $f(\hat{x},y)\leq 0$ を満足する。

定理 3.2 (Fan-Takahashi の不等式定理に関しての Ricceri の定理，[4]) E を実線形位相空間，X を θ_E を含む E の凸コンパクト部分集合，f を $X\times X$ 上の実数値関数で以下の条件を満たすものとする。

(1) 任意の $x\in X$ に対して，$f(x,\cdot)$ は E 上で凹関数，$f(x,\theta_E)=0$

(2) 任意の $y\in E$ に対して，$f(\cdot,y)$ は X 上で下半連続

(3) 任意の $x\in\{x\in X\mid X\setminus\cup_{\lambda>0}\lambda(x-X)\neq\emptyset\}$ に対して，$f(x,x)>0$

このとき，ある $\hat{x}\in X$ が存在して，任意の $y\in X$ に対して $f(\hat{x},y)\leq 0$ を満足する。

定理 3.1 に関しては，集合値写像へ一般化した定理が論文 [3] の中で 4 通り，以下のように示されている。

定理 3.3 ([3]) E を実 *Hausdorff* 線形位相空間，X を E の空でない凸コンパクト部分集合，Y を順序実線形位相空間，C を Y の内部が空でない順序錐，F を $X\times X$ 上の像が空でない集合値写像で以下の条件を満たすものとする。

(1) F は $X\times X$ 上で $(-C)$-*bounded*

(2) 任意の $x\in X$ に対して，$F(x,\cdot)$ は X 上で *type*(5)*properly quasi* C-*concave* ((5)p.q.C.cc.)

(3) 任意の $y\in X$ に対して，$F(\cdot,y)$ は X 上で C-*lower continuous*

(4) 任意の $x \in X$ に対して，$F(x,x) \subset -C$

このとき，ある $\hat{x} \in X$ が存在して，任意の $y \in X$ に対して $F(\hat{x},y) \subset -C$ を満足する。

定理 3.4 ([3]) E を実 *Hausdorff* 線形位相空間，X を E の空でない凸コンパクト部分集合，Y を順序実線形位相空間，C を Y の内部が空でない順序錐，F を $X \times X$ 上の像が空でない集合値写像で以下の条件を満たすものとする。

(1) F は $X \times X$ 上で C*-proper* かつ C*-closed*

(2) 任意の $x \in X$ に対して，$F(x,\cdot)$ は X 上で *type*(3)*properly quasi* C*-concave* ((3)p.q.C.cc.)

(3) 任意の $y \in X$ に対して，$F(\cdot,y)$ は X 上で C*-upper continuous*

(4) 任意の $x \in X$ に対して，$F(x,x) \cap (-C) \neq \emptyset$

このとき，ある $\hat{x} \in X$ が存在して，任意の $y \in X$ に対して $F(\hat{x},y) \cap (-C) \neq \emptyset$ を満足する。

定理 3.5 ([3]) E を実 *Hausdorff* 線形位相空間，X を E の空でない凸コンパクト部分集合，Y を順序実線形位相空間，C を Y の内部が空でない順序錐，F を $X \times X$ 上の像が空でない集合値写像で以下の条件を満たすものとする。

(1) F は $X \times X$ 上で $(-C)$*-proper*

(2) 任意の $x \in X$ に対して，$F(x,\cdot)$ は X 上で *type*(5)*naturally quasi* C*-concave* ((5)n.q.C.cc.)

(3) 任意の $y \in X$ に対して，$F(\cdot,y)$ は X 上で C*-lower continuous*

(4) 任意の $x \in X$ に対して，$F(x,x) \cap \operatorname{int} C \neq \emptyset$

このとき，ある $\hat{x} \in X$ が存在して，任意の $y \in X$ に対して $F(\hat{x},y) \cap \operatorname{int} C \neq \emptyset$ を満足する。

定理 3.6 ([3]) E を実 *Hausdorff* 線形位相空間，X を E の空でない凸コンパクト部分集合，Y を順序実線形位相空間，C を Y の内部が空でない順序錐，F を $X \times X$ 上の像が空でない集合値写像で以下の条件を満たすものとする。

(1) F は $X \times X$ 上で *compact-valued*

(2) 任意の $x \in X$ に対して，$F(x,\cdot)$ は X 上で *type*(3)*naturally quasi* C*-concave* ((3)n.q.C.cc.)

(3) 任意の $y \in X$ に対して，$F(\cdot,y)$ は X 上で C*-upper continuous*

(4) 任意の $x \in X$ に対して，$F(x,x) \not\subset \operatorname{int} C$

このとき，ある $\hat{x} \in X$ が存在して，任意の $y \in X$ に対して $F(\hat{x},y) \not\subset \operatorname{int} C$ を満足する。

表 1: 定理 3.1 と定理 3.3〜3.6 との比較

	定理 3.1	定理 3.3〜3.6			
		$I_{k,V}^{(5)}$	$I_{k,V}^{(3)}$	$S_{k,V}^{(5)}$	$S_{k,V}^{(3)}$
X	nonempty, compact, convex				
Maps	f on $X \times X$	F on $X \times X$			
(i)		$(-C)$–bounded	C–proper C–closed	$(-C)$–proper	compact-valued
(ii)	q-concave	(5)p.q.C.cc.	(3)p.q.C.cc.	(5)n.q.C.cc.	(3)n.q.C.cc.
(iii)	l.s.c.	C–l.c.	C–u.c.	C–l.c	C–u.c.
(iv)	≤ 0	$\leq_C^{(5)} \{\theta_E\}$	$\leq_C^{(3)} \{\theta_E\}$	$\{\theta_E\} \not\leq_{\mathrm{int}\,C}^{(5)}$	$\{\theta_E\} \not\leq_{\mathrm{int}\,C}^{(3)}$
(v)	≤ 0	$\leq_C^{(5)} \{\theta_E\}$	$\leq_C^{(3)} \{\theta_E\}$	$\{\theta_E\} \not\leq_{\mathrm{int}\,C}^{(5)}$	$\{\theta_E\} \not\leq_{\mathrm{int}\,C}^{(3)}$

(i) $\cdots$ 集合値写像の像の有界性について
(ii) $\cdots$ 第 1 変数を固定した時の写像の性質
(iii) $\cdots$ 第 2 変数を固定した時の写像の性質
(iv) $\cdots$ 対角成分の像と原点との関係
(v) $\cdots$ ある $\hat{x} \in X$ と任意の $y \in X$ のペア $(\hat{x}, y)$ の像と原点との関係

定理 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 を $\leq_C^{(j)}$ の形で表 1 にまとめた。ここで，全順序の場合は $\leq \Leftrightarrow \not>$ であるが，半順序ではその同値関係がないため，type(3),(5) についてそれぞれの否定形 $\not\leq_C^{(3)}$ と $\not\leq_C^{(5)}$ の 2 通りが現れる。

他方，Ricceri の定理を集合値一般化した定理として次のものがある。

定理 3.7 ([5]) E を実線形位相空間，X を E の空でない $\theta_E \in X$ である凸コンパクト部分集合，Y を順序実線形位相空間，C を Y の内部が空でない順序錐，F を $X \times E$ 上の像が空でない集合値写像で以下の条件を満たすものとする。

(1) F は $X \times E$ 上で $(-C)$*-proper*

(2) 任意の $x \in X$ に対して，$F(x, \cdot)$ は E 上で *type* (5) C*-concave* かつ $F(x, \theta_E) = \{\theta_Y\}$

(3) 任意の $y \in E$ に対して，$F(\cdot, y)$ は X 上で C*-lower continuous*

(4) $X \setminus \cup_{\lambda>0}\lambda(x - X) \neq \emptyset$ を満足する任意の $x \in X$ について，$\{\theta_Y\} \leq_{\mathrm{int}\,C}^{(5)} F(x, x)$

このとき，ある $\hat{x} \in X$ が存在し，任意の $y \in X$ に対して $\{\theta_Y\} \not\leq_{\mathrm{int}\,C}^{(5)} F(\hat{x}, y)$ を満足する。

Ricceri の定理と定理 3.7 についてまとめたものが表 2 である。定理 3.7 は定理 3.5(表 1 の列 $S_{k,V}^{(5)}$) と対応している。

表 2: 定理 3.2 と定理 3.7 との比較

	定理 3.2	定理 3.7			
		$I^{(5)}_{k,V}$	$I^{(3)}_{k,V}$	$S^{(5)}_{k,V}$	$S^{(3)}_{k,V}$
Domain set X	nonempty, compact, convex,$\theta_E \in \text{int}\, X$				
Maps	f on $X \times E$	F on $X \times E$			
(i)				$(-C)$-proper	
(ii)	concave			(5) C-conc.	
(iii)	l.s.c.			C-l.c.	
(iv)	$= 0$			$= \{\theta_E\}$	
(v)	> 0			$\{\theta_E\} \leq^{(5)}_{\text{int}\, C}$	
(vi)	≤ 0			$\{\theta_E\} \not\leq^{(5)}_{\text{int}\, C}$	

(i) $\cdots$ 集合値写像の像の有界性について

(ii) $\cdots$ 第 1 変数を固定した時の写像の性質

(iii) $\cdots$ 第 2 変数を固定した時の写像の性質

(iv) $\cdots$ 第 2 変数を原点に固定した時の写像の性質

(v) $\cdots$ ある対角成分の像と原点との関係

(vi) $\cdots$ ある $\hat{x} \in X$ と任意の $y \in X$ のペア $(\hat{x}, y)$ の像と原点との関係

4 集合値写像へ一般化した結果

この節では，定理 3.2 の集合値一般化についての研究結果を 3 通り述べる。それらは表 2 の $I^{(5)}_{k,V}$,$I^{(3)}_{k,V}$,$S^{(3)}_{k,V}$ の 3 列を埋めるようなものとなる。なお，$S^{(3)}_{k,V}$ の場合については証明を得られたが，$I^{(5)}_{k,V}$ と $I^{(3)}_{k,V}$ の場合については与えられた条件によって期待した結論を得ることができなかった。

4.1 $S^{(3)}_{k,V}$ について

結論に $\not\leq^{(3)}_{C}$ の二項関係があらわれる定理は次のようになる。

定理 4.1 E を実線形位相空間，X を E の空でない $\theta_E \in X$ である凸コンパクト部分集合，Y を順序実線形位相空間，C を Y の内部が空でない順序錐，F を $X \times E$ 上の像が空でない集合値写像で以下の条件を満たすものとする。

(1) F は $X \times E$ 上で *compact-valued*

(2) 任意の $x \in X$ に対して，$F(x, \cdot)$ は E 上で *type* (3) C*–concave* かつ $F(x, \theta_E) = \{\theta_Y\}$

(3) 任意の $y \in E$ に対して，$F(\cdot, y)$ は X 上で C*–upper continuous*

(4) $X \setminus \cup_{\lambda>0}\lambda(x - X) \neq \emptyset$ を満足する任意の $x \in X$ について，$\{\theta_Y\} \leq^{(3)}_{\text{int}\, C} F(x, x)$

このとき，ある $\hat{x} \in X$ が存在し，任意の $y \in X$ に対して $\{\theta_Y\} \not\leq^{(3)}_{\text{int}\, C} F(\hat{x}, y)$ を満足する。

この定理はスカラー化関数 $S^{(3)}_{k,V}$ によるスカラー化手法を用いて証明することができる。（現在執筆中の論文で発表予定である。）

4.2　$I^{(j)}_{k,V}$ について

結論を得るための条件とその結論はそれぞれ次のようになると推測される。

問題 4.1 E を実線形位相空間，X を E の空でない $\theta_E \in X$ である凸コンパクト部分集合，Y を順序実線形位相空間，C を Y の内部が空でない順序錐，F を $X \times E$ 上の像が空でない集合値写像で以下の条件を満たすものとする。

(1) F は $X \times E$ 上で C–*bounded*

(2) 任意の $x \in X$ に対して，$F(x,\cdot)$ は E 上で *type* (5) C–*concave* かつ $F(x,\theta_E) = \{\theta_Y\}$

(3) 任意の $y \in E$ に対して，$F(\cdot, y)$ は X 上で C–*lower continuous*

(4) $X \setminus \cup_{\lambda>0}\lambda(x - X) \neq \emptyset$ を満足する任意の $x \in X$ について，$F(x,x) \not\leq^{(5)}_C \{\theta_Y\}$

このとき，ある $\hat{x} \in X$ が存在し，任意の $y \in X$ に対して $F(\hat{x}, y) \leq^{(5)}_C \{\theta_Y\}$ を満足する。

問題 4.2 E を実線形位相空間，X を E の空でない $\theta_E \in X$ である凸コンパクト部分集合，Y を順序実線形位相空間，C を Y の内部が空でない順序錐，F を $X \times E$ 上の像が空でない集合値写像で以下の条件を満たすものとする。

(1) F は $X \times E$ 上で C–*proper* かつ C–*closed*

(2) 任意の $x \in X$ に対して，$F(x,\cdot)$ は E 上で *type* (3) C–*concave* かつ $F(x,\theta_E) = \{\theta_Y\}$

(3) 任意の $y \in E$ に対して，$F(\cdot, y)$ は X 上で C–*upper continuous*

(4) $X \setminus \cup_{\lambda>0}\lambda(x - X) \neq \emptyset$ を満足する任意の $x \in X$ について，$F(x,x) \not\leq^{(3)}_C \{\theta_Y\}$

このとき，ある $\hat{x} \in X$ が存在し，任意の $y \in X$ に対して $F(\hat{x}, y) \leq^{(3)}_C \{\theta_Y\}$ を満足する。

しかし，残念なことに定理3.7の証明で用いたスカラー化手法による証明は適わない。これは反例として定義2.5のスカラー化関数によって情報を取り出した際に立ち行かなくなる例を挙げることができるためである。

例 4.1 $X = [-1,1]$，$Y = \mathbb{R}^2$，$f : X \times X \to Y$ を

$$f(x,y) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}(y+1)\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin\left(\frac{\pi}{4}(y+1)\right) - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

とする。$F : X \times X \to 2^Y \setminus \{\emptyset\}$ を $F(x,y) := \{f(x,y)\}$ とおくと写像 F は単一元集合への集合値写像となる。この写像 F は問題4.1，4.2の条件をすべて満足している。しかし，スカラー化関数との合成写像は凹性をもたない。実際，各 $j = 3,5$，任意の $x \in X$ について，

$$\frac{1}{2}\left(I^{(j)}_{(1,1),\{\theta_Y\}} \circ F\right)(x,-1) + \frac{1}{2}\left(I^{(j)}_{(1,1),\{\theta_Y\}} \circ F\right)(x,1) \not\leq \left(I^{(j)}_{(1,1),\{\theta_Y\}} \circ F\right)(x,0)$$

であり，スカラー化した際に凹性が得られないことがわかる。

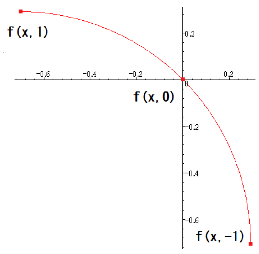

図 1: 例 4.1 の関数 f のグラフ

このことはあくまでそのスカラー化手法で示すことができないことを示すに過ぎず，問題への反例ではないため，問題自体は今後他の手法で示される可能性がある。

5 おわりに

本稿では Ricceri の定理をスカラー化手法によって集合値一般化することについて論じた。また，関係性の深い定理から推測された問題について，このスカラー化手法では証明するに至らないことを例で示した。

参考文献

[1] D. Kuroiwa, T. Tanaka, and T. Xuan Duc Ha, *On cone convexity of set-valued maps*, Nonlinear Analysis **30** (1997), 1487–1496.

[2] I. Kuwano, T. Tanaka, and S. Yamada, *Characterization of Nonlinear Scalarizing Functions for Set-Valued Maps*, Nonlinear Analysis and Optimization (2009), 193–204.

[3] ———, *Unified Scalarization for Sets and Set-Valued Ky Fan Minimax Inequality*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis **11** (2010), 513–525.

[4] B. Ricceri, *Existence Theorems for Nonlinear Problems*, Rendiconti della Accademia nazionale delle scienze detta dei XL. Serie V. Parte I, Memorie di matematica, L'Accademia nazionale delle scienze detta dei XL, 1987, pp. 77–99.

[5] Y. Saito, T. Tanaka, and S. Yamada, *On generalization of Ricceri's theorem for Fan-Takahashi minimax inequality*, to appear in JNCA.

[6] W. Takahashi, *Nonlinear variational inequalities and fixed point theorems*, Journal of the Mathematical Society of Japan **28** (1976), no. 1, 168–181.