数理解析研究所講究録
第 1964 巻 2015 年 167-171

一意半単一化問題とアンカー付き半単一化問題の比較*

岩見 宗弘
島根大学総合理工学研究科
情報システム学領域

概要

半単一化問題とは, 単一化問題を一般化した概念である. 半単一化問題は, 項書換えシステムの停止性の反証やプログラミング言語の型推論等に応用されている. なお, 半単一化問題は, 一般的に決定不能であることが知られている. また, 決定可能な半単一化問題として, 一意半単一化問題が提案され, 様々な研究が行われてきた. さらに, 新しい半単一化問題として, アンカー付き半単一化が最近提案された. アンカー付き半単一化問題は, 重なりがない再帰スキームを法とした単一化問題を解くために導入された. しかしながら, アンカー付き半単一化問題と他の半単一化問題との比較は十分に行われていない. 特に, 一意半単一化問題との比較は不十分である. 本論文では, 一意半単一化問題とアンカー付き半単一化問題を具体例を用いて比較する.

1 一意半単一化問題

本論文で省略されている定義等は, 文献 [1, 2, 5] を参照して頂きたい.

本節では, 記号半単一化 ([1]) の概念を用いる. 特殊な項数 1 の関数記号 $\nabla \notin \mathcal{F}$([1]) を用いて一意半単一化問題における剰余代入 ρ を構文的に表現する.

定義 1 *(記号半単一化問題, [1]).* ∇-等式の集合 E に対して,E の**半単一化子**とは, すべての等式 $s \approx t \in E$ に対して $s\sigma^* = t\sigma^*$ を満たす ∇-代入 σ である. 集合 E が半単一化子をもつとき,E は**半単一化可能**であるという. **記号半単一化問題**とは, 与えられた ∇-等式の集合に対して半単一化子が存在するかを問う問題である.

注意 2 定理 *23([1])* より, 記号半単一化問題が解けることと, 一意半単一化問題が解けることは同値である. よって, 以降では一意半単一化問題と記号半単一化問題は同じ意味で用いる.

我々は記号半単一化に対する推論規則とその適用例を与える. 記号半単一化においては, 等式 $s \approx t$ と $t \approx s$ は区別しない.

定義 3 *(記号半単一化に対する推論規則, [1]).*

- Decompose*:* $\{f(s_1,\ldots,s_n) \approx f(t_1,\ldots,t_n)\} \uplus E \Longrightarrow \{s_1 \approx t_1,\ldots,s_n \approx t_n\} \cup E$ *($f \in \mathcal{F}$ のとき)*
- Reduce*:* $\{x^i \approx t, C[x^i] \approx u\} \uplus E \Longrightarrow \{x^i \approx t, C[t] \approx u\} \cup E$ *($x^i > t$ のとき)*
- Delete*:* $\{x^i \approx x^i\} \uplus E \Longrightarrow E$

*This paper is an extended abstract and the details will appear elsewhere.

- Clash: $\{f(s_1,\ldots,s_m) \approx g(t_1,\ldots,t_n)\} \uplus E \Longrightarrow \perp$ $(f \neq g, f, g \in \mathcal{F}$ のとき$)$
- Check: $\{x^i \approx t\} \uplus E \Longrightarrow \perp$ $(t \notin \mathcal{V}^*, x^i \trianglelefteq t$ のとき$)$

ここでは, 定義 3 において述べた推論規則を任意に 1 回使った推論を $\rightsquigarrow$ により表す.

例 4 我々は次の記号半単一化問題を考える: $E = \{\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y, x) \leqslant \mathsf{f}(x, \mathsf{h}\cdot(\mathsf{h}\cdot y))\}$ [1]. 2 つの項 $\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y, x)$ と $\mathsf{f}(x, \mathsf{h}\cdot(\mathsf{h}\cdot y))$ は単一化不可能である. 我々はこの問題を定義 3 における記号半単一化の推論規則を用いて解く. $E' = \{\nabla(\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y, x)) \approx \mathsf{f}(x, \mathsf{h}\cdot(\mathsf{h}\cdot y))\}$ とする. このとき, 次のように推論規則が適用できる.

$$\begin{array}{llll} & E' & = & \{\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y^1, x^1) \approx \mathsf{f}(x, \mathsf{h}\cdot(\mathsf{h}\cdot y))\} \\ \rightsquigarrow_{\mathsf{Dec}} & \{\mathsf{h}\cdot y^1 \approx x, x^1 \approx \mathsf{h}\cdot(\mathsf{h}\cdot y)\} & \rightsquigarrow_{\mathsf{Red}} & \{\mathsf{h}\cdot y^1 \approx x, \mathsf{h}\cdot y^2 \approx \mathsf{h}\cdot(\mathsf{h}\cdot y)\}\ (x > \mathsf{h}\cdot y^1) \\ \rightsquigarrow_{\mathsf{Dec}} & \{\mathsf{h}\cdot y^1 \approx x, \mathsf{h} \approx \mathsf{h}, y^2 \approx \mathsf{h}\cdot y\} & \rightsquigarrow_{\mathsf{Del}} & \{\mathsf{h}\cdot y^1 \approx x, y^2 \approx \mathsf{h}\cdot y\} \end{array}$$

このとき, $\sigma = \{x := \mathsf{h}\cdot y^1, y^2 := \mathsf{h}\cdot y\}$ とする. $\sigma^*(\nabla(\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y, x))) = \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y^1, \mathsf{h}\cdot(\mathsf{h}\cdot y)) = \sigma^*(\mathsf{f}(x, \mathsf{h}\cdot(\mathsf{h}\cdot y)))$ より, 代入 σ は E の半単一化子である.

2 アンカー付き半単一化問題

本節では, 文献 [5] において提案されたアンカー付き半単一化の概念を紹介する.

ここで, 我々は文献 [5] のアンカー付き半単一化問題を, 文献 [1] の一意半単一化問題と比較するために, その定義を整理し再定式化する. アンカー付き半単一化において, 等式 $s \approx t$ と $t \approx s$ は区別する.

定義 5 *(項, [5]).* **定数記号**は a, b, c, **関数記号**は f, g, h, **変数**は x, y, z により表されると仮定する. さらに, **代入変数**が α, β, γ により表されると仮定する. **インスタンス変数** αx は代入変数 α と変数 x の組である. 我々は次の *BNF* 記法により項を再定義する. 項は s, t により表す.

$s, t ::= a \mid x \mid \alpha x \mid s \cdot t \mid f(s_1, \ldots, s_n)$

このとき, 条件 $s_i \not\trianglerighteq g(t_1, \ldots, t_m)$ を満たす $(g \in \mathcal{F} \setminus \{\cdot\}, 1 \leq i \leq m)$. ここで, $(\cdot)$ は $\mathcal{F}$ に属する項数 2 の関数記号である.

前節における関数記号 ∇ と本節における 1 つの代入変数 α は似たような働きをする.

定義 6 *(単純項, [5]).* 項 t が**単純**であるとは, 条件 $t \not\trianglerighteq f(s_1, \ldots, s_n)$ を満たすときをいう $(f \in \mathcal{F} \setminus \{\cdot\})$.

変数またはインスタンス変数のことをアトムとよび, X, Y, Z で表す [5].

定義 7 *(アンカー付き条件, [5]).* E を次のインデックス付きの不等式の集合とする: $E = \{s_1 \leqslant_1 t_1, \ldots, s_n \leqslant_k t_n\}$. インデックス付きの不等式の集合 E が, 次の条件を満たすとき**アンカー付き**[2]であるという. $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}(s_i) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{V}(t_i)$

定義 8 *(アンカー付き半単一化問題, [5]).* **アンカー付き半単一化問題**とは, アンカー付き条件を満たす与えられたインデックス付きの不等式の集合に対して半単一化子が存在するかを問う問題である.

[1] ここで, $(\cdot)$ は文献 [5] において使われている $\mathcal{F}$ に属する項数 2 の関数記号である.
[2] 文献 [5] 中の定義は複雑であるため, 我々は文献 [5] に基づいてアンカー付き条件を再定式化する.

定義 9 *(変換規則, [5]).* 我々は不等式をいくつかの等式へ次の変換規則を用いて分解する.

- $f(x_1, \ldots, x_n) \leqslant f(s_1, \ldots, s_n) \looparrowright \alpha x_1 \approx s_1, \ldots, \alpha x_n \approx s_n$ *($f \in \mathcal{F} \setminus \{\cdot\}$, $x_i \in \mathcal{V}$, s_i は単純 $(1 \leq i \leq n)$ のとき),*
- $s \leqslant t \looparrowright s \approx t$ *(s と t は単純のとき),*

ここで, 記号 α は不等式に対する新しい代入変数である.

定義 10 *(解決形, [5]).* 与えられた等式の集合 E に対して, 次の条件を満たすときに, アトム X が削除的であるという: $E = E' \uplus \{X \approx s\}$ のとき, 変数 $X \notin \mathcal{V}(E') \cup \mathcal{V}(s)$ であり, かつ, インスタンス変数 $\alpha X \notin \mathcal{V}(E') \cup \mathcal{V}(s)$ である. 等式の集合 E が解決形であるとは, すべての等式が $X \approx s$ の形をしており, X は削除的であり, かつ s は単純であるときをいう.

定義 11 *(アンカー付き半単一化の推論規則, [5]).*

- Bop: $E \uplus \{s_1 \cdot s_2 \approx t_1 \cdot t_2\} \Longrightarrow E \cup \{s_1 \approx t_1, s_2 \approx t_2\}$
- Refl: $E \uplus \{s \approx s\} \Longrightarrow E$
- $\mathsf{Orient1}$: $E \uplus \{s \approx \alpha x\} \Longrightarrow E \cup \{\alpha x \approx s\}$ *(s がインスタンス変数でないとき)*
- $\mathsf{Orient2}$: $E \uplus \{s \approx x\} \Longrightarrow E \cup \{x \approx s\}$ *(s がアトムでないとき)*
- $\mathsf{Elim1}$: $E \uplus \{\alpha x \approx s\} \Longrightarrow E[s/\alpha x] \cup \{\alpha x \approx s\}$ *(s が単純なとき)*
- $\mathsf{Elim2}$: $E \uplus \{x \approx s\} \Longrightarrow E[s/x] \cup \{x \approx s\}$ *($x \notin \mathcal{V}(s)$ かつ s が単純なとき)*
- $\mathsf{Clash1}$: $E \uplus \{a \approx s\} \Longrightarrow \perp$ *($a \neq s$ かつ s がアトムでないとき)*
- $\mathsf{Clash2}$: $E \uplus \{s \approx a\} \Longrightarrow \perp$ *($a \neq s$ かつ s がアトムでないとき)*
- $\mathsf{Check1}$: $E \uplus \{x \approx s\} \Longrightarrow \perp$ *($x \trianglelefteq s$ またはある α に対して $\alpha x \trianglelefteq s$, かつ,$s$ はアトムでないとき)*
- $\mathsf{Check2}$: $E \uplus \{\alpha x \approx s\} \Longrightarrow \perp$ *($\alpha x \trianglelefteq s \neq \alpha x$ のとき)*

ここでは, 定義 11 における推論規則を任意に 1 回用いた推論を $\vdash$ により表す.
アンカー付き半単一化問題として次の例を与える.

例 12 *([5])* 次のインデックス付きの不等式の集合を考える. 定義 *9* の変換規則と定義 *11* の推論規則を用いることにより, 不等式の集合は次のように解決形に変換される.

$$
E = \left\{
\begin{array}{ll}
x_1 \leqslant_1 x_4, & \\
\mathsf{g}(x_5, x_6) \leqslant_1 \mathsf{g}(\mathsf{a} \cdot x_1, x_2), & \mathsf{f}(x_7, x_8) \leqslant_1 \mathsf{f}(\mathsf{a} \cdot x_3, \mathsf{a} \cdot \mathsf{a} \cdot x_4), \\
x_6 \leqslant_2 x_7, & \\
\mathsf{f}(x_1, x_2) \leqslant_2 \mathsf{f}(\mathsf{a} \cdot x_5, \mathsf{a} \cdot \mathsf{a} \cdot x_6), & \mathsf{g}(x_3, x_4) \leqslant_2 \mathsf{g}(\mathsf{a} \cdot x_7, x_8)
\end{array}
\right\}
$$

$$
\looparrowright^* \vdash^* \left\{
\begin{array}{ll}
x_1 \approx x_4, & \\
\alpha x_5 \approx \mathsf{a} \cdot x_4, \alpha x_6 \approx \mathsf{a} \cdot x_3, & x_2 \approx \mathsf{a} \cdot x_3, \\
x_7 \approx x_6, & \\
x_8 \approx \mathsf{a} \cdot x_5, & \beta x_3 \approx \mathsf{a} \cdot x_6, \beta x_4 \approx \mathsf{a} \cdot x_5
\end{array}
\right\}
$$

このとき, 我々は E の半単一化子として代入 $\sigma = \{x_1 := x_4, x_2 := \mathsf{a} \cdot x_3, x_7 := x_6, x_8 := \mathsf{a} \cdot x_5\}$ を得る. さらに,σ の剰余代入として $\rho_1 = \{x_5 := \mathsf{a} \cdot x_4, x_6 := \mathsf{a} \cdot x_3\}$ と $\rho_2 = \{x_3 := \mathsf{a} \cdot x_6, x_4 := \mathsf{a} \cdot x_5\}$ を得る.

3 一意半単一化問題とアンカー付き半単一化問題の比較

本節では, 我々は一意半単一化問題 (USUP と略す) とアンカー付き半単一化問題 (AnSUP と略す) をいくつかの例を用いて比較する. 注意 2 で述べたように, 一意半単一化問題が解けることと記号半単一化問題が解けることは同値である. このため, 以降では, 一意半単一化問題と記号半単一化問題は同じ意味で用いる.

上記の例 4 中の一意半単一化問題は, 文献 [5] の手法を用いて解くことはできない.

注意 13 我々は例 *4* 中の不等式の集合を再び考える. $\mathcal{V}(\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)) \subseteq \mathcal{V}(\mathsf{f}(x,\mathsf{h}\cdot(\mathsf{h}\cdot y)))$ より, E はアンカー付きである. しかしながら, $\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x) \trianglerighteq \mathsf{h}\cdot y \notin \mathcal{V}$ であるから, この不等式を次のように等式に変換することはできない:

$$\{\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x) \leqslant \mathsf{f}(x,\mathsf{h}\cdot(\mathsf{h}\cdot y))\} \not\mapsto \{\mathsf{h}\cdot\alpha y \approx x, \alpha x \approx \mathsf{h}\cdot(\mathsf{h}\cdot y)\}.$$

したがって, この一意半単一化問題はアンカー付き半単一化の手法では解くことができない.

次の例は, 一意半単一化問題はアンカー付き半単一化問題を含まないことを示す.

例 14 *(AnSUP $\not\subseteq$ USUP, [5]).* 例 *12* 中の不等式の集合 E を再び考える.*Smolka* と *Tebbi* の手法で E の半単一化子を得ることができる *[5]*. しかしながら,E は 2 種類のインデックス付きの 6 つの不等式からなるので, 一意半単一化問題ではない. よって, 一意半単一化に関する先行研究 *[1, 3, 4]* は E に適用できない.

次の例は, 一意半単一化問題とアンカー付き半単一化問題に共通部分があることを示す.

例 15 *(USUP $\cap$ AnSUP $\neq \emptyset$).* ここで, 我々は次の例を考える: $E = \{\mathsf{f}(x,y) \leqslant \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)\}$. このとき,2 つの項 $\mathsf{f}(x,y)$ と $\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)$ は単一化不可能である.

1. 最初に, この問題を文献 *[5]* の手法で解く. $\mathcal{V}(\mathsf{f}(x,y)) \subseteq \mathcal{V}(\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x))$ より, E はアンカー付きである. 上記の不等式を等式へ次のように変換する:

   $$\mathsf{f}(x,y) \leqslant \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x) \mapsto \alpha x \approx \mathsf{h}\cdot y, \alpha y \approx x$$

   このとき, $\{\alpha x \approx \mathsf{h}\cdot y, \alpha y \approx x\}$ は定義 *10* より, 解決形である. いま,$\sigma = \emptyset$ と $\rho = \{x := \mathsf{h}\cdot y, y := x\}$ とする. $\rho(\sigma(\mathsf{f}(x,y))) = \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x) = \sigma(\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x))$ より, 代入 σ は半単一化子であり, 代入 ρ は剰余代入である.

2. 次に, 我々はこの問題を文献 *[1]* の手法で解く. $E' = \{\nabla(\mathsf{f}(x,y)) \approx \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)\}$ とする. 次のように定義 *3* の推論規則が適用できる.

   $$E' = \{\mathsf{f}(x^1,y^1) \approx \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x)\} \rightsquigarrow_{\mathsf{Dec}} \{x^1 \approx \mathsf{h}\cdot y, y^1 \approx x\}$$

   このとき,$\sigma = \{x^1 := \mathsf{h}\cdot y, y^1 := x\}$ とする. $\sigma^*(\mathsf{f}(x^1,y^1)) = \mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x) = \sigma^*(\mathsf{f}(\mathsf{h}\cdot y,x))$ より, E は半単一化可能である. すなわち, 代入 σ は E の半単一化子である.

次の例は, 単一化問題 (UP と略す) とアンカー付き半単一化問題の共通部分が存在することを示す.

例 16 *(UP $\cap$ AnSUP $\neq \emptyset$).* ここで, 我々は次の例を考える: $E = \{\mathsf{f}(x,y) \leqslant \mathsf{f}(y,x)\}$. このとき,2 つの項 $\mathsf{f}(x,y)$ と $\mathsf{f}(y,x)$ は単一化可能である.

1. まず, この問題を文献 *[5]* の手法で解く.

$\mathcal{V}(\mathsf{f}(x,y)) \subseteq \mathcal{V}(\mathsf{f}(y,x))$ より, E はアンカー付きである. 我々は不等式を等式へ次のように変換する*:*

$$\mathsf{f}(x,y) \leqslant \mathsf{f}(y,x) \looparrowright \alpha x \approx y, \alpha y \approx x$$

定義 *10* より, $\{\alpha x \approx y, \alpha y \approx x\}$ は解決形である. このとき,$\sigma = \emptyset$ と $\rho = \{x := y, y := x\}$ とする. $\rho(\sigma(\mathsf{f}(x,y))) = f(y,x) = \sigma(\mathsf{f}(y,x))$ より, E は半単一化可能である.

2. 次に, 我々は文献 *[1]* の手法を用いて, この問題を解く. いま,$E' = \{\nabla(\mathsf{f}(x,y)) \approx \mathsf{f}(y,x)\}$ とする. 次のように定義 *3* の推論規則が適用できる.

$$E' = \{\mathsf{f}(x^1,y^1) \approx \mathsf{f}(y,x)\} \rightsquigarrow_{\mathsf{Dec}} \{x^1 \approx y, y^1 \approx x\}.$$

このとき, $\sigma = \{x^1 := y, y^1 := x\}$ とする. $\sigma^*(\nabla(\mathsf{f}(x,y))) = \mathsf{f}(y,x) = \sigma^*(\mathsf{f}(y,x))$ より, E は半単一化可能である.

4 結論

本論文では, 一意半単一化問題 (USUP) とアンカー付き半単一化問題 (AnSUP) をいくつかの例を考えることにより比較した. 我々はアンカー付き半単一化の手法を用いて解くことができない一意半単一化問題が存在することを示した. さらに, 我々は AnSUP $\not\subseteq$ USUP, USUP $\cap$ AnSUP $\neq \emptyset$, かつ UP $\cap$ AnSUP $\neq \emptyset$ を示した. 今後の課題は, 一意半単一化問題とアンカー付き半単一化問題をより理論的に比較することである.

参考文献

[1] Aoto, T., Iwami, M.: Termination of rule-based calculi for uniform semi-unification. In: Proc. the 7th International Conf. on Language and Automata Theory and Applications (LATA) 2013. LNCS, vol. 7810, pp. 56–67. Springer-Verlag (2013)

[2] Baader, F., Nipkow, T.: Term Rewriting and All That. Cambridge University Press (1998)

[3] Kapur, D., Musser, D., Narendran, P., Stillman, J.: Semi-unification. Theoretical Computer Science 81(2), 169–187 (1991)

[4] Oliart, A., Snyder, W.: Fast algorithms for uniform semi-unification. Journal of Symbolic Computation 37(4), 455–484 (2004)

[5] Smolka, G., Tebbi, T.: Unification modulo nonnested recursion schemes via anchored semi-unification. In: Proc. of the 24th International Conf. on Rewriting Techniques and Applications (RTA) 2013. pp. 271–286 (2013)