

# On Jacobi forms which connect infinite products and infinite sums

青木 宏樹 (東京理科大学)

Hiroki Aoki (Tokyo University of Science)

2014 年 12 月 17 日

本稿は、2014 年 12 月 17 日に数理解析研究所で行った講演をベースに、その後の研究の進展などを含めて再構成したものです。この話題は、もともと、2010 年 8 月に九州大学で行われた研究集会「第 5 回福岡数論研究集会」において筆者が講演したのが最初であり、その報告集も刊行されています ([1])。実際には、そのとき既にこの話題の骨格部分はできあがっており、その後の研究の進展はそう多くありません。しかしながら、当時の報告集は、ある意味「思いつきを素直に書き下した」ものであり、(当時の研究状況では仕方なかったのですが) 今から思うと少しまとまっていない部分がありました。この点、本稿は、思いつきをその順番で書き下すのではなく、ストーリーが見えやすいように順番を工夫して構成したつもりです。

## 1 はじめに

次の等式は、オイラーの五角数定理と呼ばれ、18 世紀、オイラーによって発見、証明されたものです。

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

両辺ともに無限の計算があらわれていますが、たとえば、左辺の無限積は、真面目に  $m = 1$  から順にかけ算していけば、 $m = m_0$  まで計算したところで  $m_0$  次の係数が確定します。この意味で両辺ともに任意の次数の係数を求めることができ、左辺と右辺でそれらが一致するというのが定理の主張です。

とはいえ左辺は無限積なので、直観的には、真面目に  $m = 1$  から順にかけ算 (いわゆる「たすきがけ」) をしていけば、どんどん項が増殖して手におえなくなりそうに思えます。ところがどっこい、実際に計算してみると、あれやこれやと項が打ち消しあって右辺のようなきれいな形になるというのがこの定理の主張です。私がこの等式を知ったのは大学院生のときでした。こんなにきれいな等式があることがすぐには信じられず、まず最初の数項の係数が一致することを手計算で確かめ、次に最初の数十項が一致することをコンピュータに計算させて確認し、その後、証明を読んでよう

やく事実を受け入れ、「それにしても不思議だなあ」と思ったことを今でも覚えています。もっとも、今では初等的かつ非常に簡潔な証明<sup>1</sup>が知られているので、この等式を事実として受け入れるだけなら高校レベルの知識で十分です。しかし、数学者である我々<sup>2</sup>は、経験的に、非自明な等式はその背後に豊かな数学的構造を隠し持っていることを知っています。じゃあ、それを研究して五角数定理を極めれば、、、と目論むのは簡単ですが、オイラーの五角数定理に対する「背後にある豊かな数学的構造」は、保型形式に関わるすべての分野というとても広く広いものであるような気がします。ということで、当時、なんとか修論・博論を仕上げなければならなかった私は、このような壮大な目論見をあっさりと捨ててしまいました。もっとも、私の指導教官であった齋藤恭司先生がエータ商について興味を持っておられたため、五角数定理と類似の「無限積＝無限和」の形をした非自明な等式がいろいろと存在することは私も知っており、その不思議さだけが心に残っている状態が続きました。

話はかわって、1990年代半ば、ポーチャーズによって無限積表示を持つ多変数の保型形式が構成され、ムーンシャイン予想が解決されました。無限積表示を持つ多変数保型形式を構成するアイデアは、その後「保型形式環の決定」「モジュライ空間の具体的記述」など数学の諸問題に応用されているだけでなく、素粒子の振る舞いの記述など数理物理の分野でも使われ始めています。ただ、現在のところ、無限積表示を持つ保型形式の構成は、必要なものを必要なときに構成する各個撃破的なものが多く、「ポーチャーズの方法でどのような（どのくらいの）保型形式が作れるのか？」という素朴な疑問に対する研究は、まだ始まったばかりだと思います。

ということで、私は最近、ポーチャーズ無限積の周辺をいろいろと探っていました。保型形式を無限和で構成する方法はいくつか知られているので、そこに「無限積＝無限和」の形をした非自明な等式が存在し、何か数学的に興味深い現象が起きているのではないかと思ったからです。ポーチャーズ無限積は、その構成において解析接続の可能性をちゃんと調べる必要があり、一般には複雑な議論が必要です。そこでとりあえず、まずは簡単な場合からということで、解析接続のいらない場合について調べてみました。その研究についてまとめたものが、本稿です。あまりに簡単な場合なので、もはやポーチャーズ無限積とはとても言えるものではありません。それでも、五角数定理と類似の「無限積＝無限和」の形をした非自明な等式たちは、たくさん存在するものの、無秩序にあらわれているわけではなく、「ベクトル系」というポスに支配されている様子が少しは見えるようになったかなあと感じています。

---

<sup>1</sup>たとえば [http://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal\\_number\\_theorem](http://en.wikipedia.org/wiki/Pentagonal_number_theorem) にのっています。

<sup>2</sup>ここは突っ込まないでください。

## 2 研究のモチベーション…オイラーの五角数定理

ある種の規則性を持つ多項式の無限積が興味深い等式を導くことに最初に気づいたのは、おそらく、18世紀最大の数学者オイラーであったと思われる。彼は、オイラーの五角数定理と呼ばれる「無限積＝無限和」の形をした非自明な等式を発見した。

**定理（オイラーの五角数定理）** 次の等式が成立する。

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}}$$

この定理は、形式的べき級数環  $\mathbb{Z}[[q]]$  における等式である。左辺の無限積は、ひとつ次数を決めれば、その次数以下の係数はすべて有限回の計算で求まるので、形式的べき級数だとみなすことができる。それがちょうどそれが右辺の形になっているというのが、定理の主張である。

この定理を見れば、当然、次のような問題を考えたいであろう。

**問題** オイラーの五角数定理のように、「無限積＝無限和」の形をした非自明な等式は、他に存在するのだろうか？

問題をはっきりさせるために、エータ積を定義しよう。形式的べき級数  $E(q)$  を

$$E(q) := q^{\frac{1}{24}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) \in \mathbb{Z}[[q^{\frac{1}{24}}]]$$

と定めれば、オイラーの五角数定理は次のように書ける。

$$E(q) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{24}(6n-1)^2} \quad (1)$$

**定義（エータ積）** 有限個の  $n$  を除いて  $c(n) = 0$  となる写像  $c: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  により定まる式

$$E_c(q) := \prod_{n \in \mathbb{N}} E(q^n)^{c(n)}$$

を、（ $c$  によって定まる）エータ積という。

この用語を用いれば、さきほどの問題は、もう少しはっきりとする。

**問題** 展開すればきれいな形になるエータ積は、オイラーの五角数定理の他に存在するのだろうか？

実は、展開すればきれいな形になるエータ積は、けっこうたくさん存在する。たとえば、次のような公式が知られている<sup>3</sup>。

$$\frac{E(q^2)^2}{E(q)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{8}(4n+1)^2} \quad (\text{ガウスの公式}) \quad (2)$$

$$\frac{E(q^2)E(q^3)^2}{E(q)E(q^6)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{24}(6n+1)^2} \quad (3)$$

$$\frac{E(q^2)^2E(q^3)E(q^{12})}{E(q)E(q^4)E(q^6)} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{3}(3n+1)^2} \quad (4)$$

これら公式は、直接的には、形式的べき級数環における等式、つまり両辺を  $q$  の形式的べき級数とみなしての等式である。しかし、現在の数学の立場からすれば、これらの公式は、デデキントの  $\eta$  関数とヤコビの  $\theta$  関数との間に成り立つ 1 変数保型形式の等式だとみなすことができる。すなわち、複素上半平面  $\mathbb{H}$  上で定義されたデデキントの  $\eta$  関数

$$\eta(\tau) := E(q) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) \quad \left( q^m := \exp(2\pi\sqrt{-1}m\tau) \right)$$

を用いてエータ積を  $\tau$  の関数だと思えば、

$$\eta_c(\tau) := \prod_{n \in \mathbb{N}} \eta(n\tau)^{c(n)}$$

は、重さ  $\frac{1}{2} \sum_{n \in \mathbb{N}} c(n)$  の保型性をもつ。したがって、エータ積は、各カスプで正則であれば、保型形式になる。そして、大雑把に言えば、保型形式はテータ関数だから、無限和の形で書けるのである。

<sup>3</sup>エータ積については、齋藤恭司先生による問題提起「エータ積においてフーリエ展開の係数がすべて非負となるのはどのようなときか」があり、齋藤先生自身による解説 [4] のなかで、金子昌信先生から教えていただいた例として式 (3)(4) があげられている。

### 3 興味深い結果…メルスマンの定理

前節の最後で述べた方針で「無限積＝無限和」の形をした非自明な等式を量産しようと考えた場合には、次の結果が、おそらく唯一の先行研究である。

定理（メルスマンの定理, 1991） 次のことが成り立つ。

- 重さを固定するごとに、カスプも込めて正則なエータ積は、本質的に有限個しかない。
- 重さ  $\frac{1}{2}$  のカスプも込めて正則なエータ積は、本質的には次の 14 個だけである。

$$\begin{array}{cccc}
 \eta(\tau) & \frac{\eta(\tau)\eta(4\tau)}{\eta(2\tau)} & \frac{\eta(2\tau)^3}{\eta(\tau)\eta(4\tau)} & \frac{\eta(2\tau)^5}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2} \\
 \frac{\eta(\tau)^2}{\eta(2\tau)} & \frac{\eta(2\tau)^2}{\eta(\tau)} & \frac{\eta(\tau)^2\eta(6\tau)}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)} & \frac{\eta(\tau)\eta(6\tau)^2}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)} \\
 \frac{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)}{\eta(\tau)\eta(6\tau)} & \frac{\eta(2\tau)\eta(3\tau)^2}{\eta(\tau)\eta(6\tau)} & \frac{\eta(\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau)^2}{\eta(2\tau)\eta(3\tau)\eta(12\tau)} & \frac{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)\eta(12\tau)}{\eta(\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau)} \\
 & \frac{\eta(2\tau)^5\eta(3\tau)\eta(12\tau)}{\eta(\tau)^2\eta(4\tau)^2\eta(6\tau)^2} & \frac{\eta(\tau)\eta(4\tau)\eta(6\tau)^5}{\eta(2\tau)^2\eta(3\tau)^2\eta(12\tau)^2} & 
 \end{array}$$

なお、ここでの「本質的」とは、たとえば  $\eta(\tau)$  と  $\eta(2\tau)$  は同一視するという意味である。

この定理は、ザギエによって予想され、メルスマンによって証明された<sup>4</sup>。この定理は、よく知られている次の定理と組み合わせることによって、威力を発揮する。

定理（セール・スタークの定理, 1976） 重さ  $\frac{1}{2}$  の保型形式はテータ関数の一次結合で書くことができる。

これら 2 つの定理を組み合わせれば、14 個の「無限積＝無限和」の形をした非自明な等式が存在することがわかるのである。確かにこれはすばらしい結果なのだが、残念なのは、「書くことができる」というだけで、具体的な書き方は簡単にはわからないという点である。そして、重さが 1 以上のときに同様のことを行おうとすると、セール・スターク型の定理が成立するのかどうかを検討しなければならないうえに、メルスマンの定理で個数を勘定するのは非常に困難であるという問題に直面する。というのは、メルスマンの原論文は、初等的ながら非常に複雑に不等式の評価を行って

<sup>4</sup>ザギエ先生の本 [5] などによると、この定理は、彼の学生であったメルスマン氏が、修士のときに証明したようである。ただ、彼はその後民間企業に就職したため、この定理は一般に入手可能な論文としては出版されておらず、ザギエ先生の本に結果だけが述べられている。

おり、「本質的に有限個」が示せても、実際に正確な個数を勘定することは、とても簡単だとは思えないのである。そこで、次節では、もう少しうまい（系統的な）方法を考えてみることにする。

## 4 一般化への道…ヤコビの三重積公式

19世紀、楕円関数論の研究で有名な数学者ヤコビは、ヤコビの三重積公式と呼ばれる「無限積＝無限和」の形をした非自明な等式を発見した。

定理（ヤコビの三重積公式） 次の等式が成立する。

$$\prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) (1 + q^{m-\frac{1}{2}}\zeta) (1 + q^{m-\frac{1}{2}}\zeta^{-1}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}n^2} \zeta^n$$

この定理は、形式的べき級数環  $\mathbb{Z}[\zeta, \zeta^{-1}][[q^{\frac{1}{2}}]]$  における等式である。そして、この等式は、 $q$  の他にもうひとつの文字  $\zeta$  を含んでおり、特に  $\zeta$  を特殊化することで、オイラーの五角数定理や、その他多くの非自明な「無限積＝無限和」の形の等式を得ることができる。たとえば、ヤコビの三重積公式において、 $q$  を  $q^3$  に、 $\zeta$  を  $-q^{-\frac{1}{2}}$  におきかえればオイラーの五角数定理 (1) が得られる。また、ヤコビの三重積公式において、 $q$  はそのままにし、 $\zeta$  を  $q^{\frac{1}{2}}$  におきかえればガウスの公式 (2) が得られる。現在では、ヤコビの三重積公式の証明は何通りも知られている<sup>5</sup>。

そして、ヤコビの三重積公式に似た等式が、20世紀に入っていくつか発見された。たとえば、ワトソンの五重積公式がそうである。

定理（ワトソンの五重積公式） 次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) (1 - q^m \zeta) (1 - q^{m-1} \zeta^{-1}) (1 - q^{2m-1} \zeta^2) (1 - q^{2m-1} \zeta^{-2}) \\ = \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{\frac{n(3n+1)}{2}} (\zeta^{3n} - \zeta^{-3n-1}) \end{aligned}$$

この公式も、 $\zeta$  を特殊化することで、多くの非自明な「無限積＝無限和」の形をした等式を得ることができる。たとえば、ワトソンの五重積公式において、 $\zeta$  に  $-1$  を代入すればガウスの公式 (2) が得られる。また、 $\zeta$  に 1 の原始 3 乗根を代入すれば式 (3) が得られる。次々と非自明な等式が得られることに気を良くして、がんばってずんずん計算すれば、次の定理を得ることができる。

<sup>5</sup>簡単な証明をあげておく。(右辺)/(左辺)を  $\zeta$  についての関数と思えば、原点を除いて正則で、変換  $\zeta \mapsto q\zeta$  で不変。よってリュービルの定理よりこれは定数であり、オイラーの五角数定理より 1 であることがわかる。

**定理 1.** 重さ  $\frac{1}{2}$  のカスプも込めて正則なエータ積は、すべて、ヤコビの三重積公式かワトソンの五重積公式から変数を置き換えることによって得ることができる。

注：この定理において、エータ積のなかには、 $q$  だけでなく  $q$  も置き換える（たとえば  $q \mapsto -q$ ）必要があるものもある。

これで、我々が扱っている問題「展開すればきれいな形になるエータ積はどのくらい存在するのか？」について、重さが  $\frac{1}{2}$  の場合については、ある程度状況がはっきりとした。メルスマンの定理により、それは本質的に 14 種類 (も) あるのだが、実際には、「ヤコビの三重積公式」「ワトソンの五重積公式」という 2 つの親玉があって、すべてはそこから生み出されているのである !!

同様のことは、重さが 1 以上のときにも成り立つのだろうか？ その場合、「ヤコビの三重積公式」「ワトソンの五重積公式」に相当する親玉は、何なのであろうか？ 現代数学は、この問いに対して、答えではないけれども、非常に関係の深そうな話題を提供している。それは、無限次元リー環の指標公式である。無限次元リー環の指標公式は、適当な設定のもとで、「無限積 = 無限和」の非自明な等式になる。そして、「ヤコビの三重積公式」や「ワトソンの五重積公式」は、まさにその、最も簡単な場合なのである。しかしながら、無限次元リー環は、保型形式よりも表現論や群論と密接に関係しており、ヤコビの三重積公式やワトソンの五重積公式を無限次元リー環の立場で見た場合、それがなぜ保型性を持つのか、明確な理由は知られていない。もちろん、たとえばアフィンリー環の分母公式は見つけない親玉の一部に違いない。ただ、無限次元リー環についてカルタン行列を出発点する従来のアプローチでは、保型形式は主題にはならなかったため、親玉を洗いざらい見つけることは、おそらく非常に困難だろう。我々の問いを解決するには、保型性を持つ無限積を出発点として、理論を展開していかなければならないのである。このアイデアは突飛だと言われても仕方がないものだと思っていたが、1990 年代半ば、ボーチャーズによるムーンシャイン予想の解決を契機に保型性を持つ無限積の理論が整備され、しかも、それは無限次元リー環と非常に近い分野にあることがわかってきた。そこで次節以降、我々が扱っている問題をボーチャーズの整備した道筋に沿って再整備し、考察を進めていくことにする。

## 5 非自明な等式の量産…ボーチャーズ型の無限積

1990 年代半ば、ボーチャーズは、無限積を用いて多変数の保型形式を構成する方法を開発した。現在「ボーチャーズ無限積」と呼ばれているものは、IV 型領域上で無限積を用いて保型形式を構成する方法（または結果）であるが、彼は論文 [2] のなかで「ベクトル系」と呼ばれるより一般的な条件下で無限積を用いてヤコビ形式を構成する方法を与えている。（ヤコビ形式についての一般論は、たとえば [3] を参考のこと。）

定義 (ベクトル系) 写像  $a: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{Z}$  がベクトル系であるとは、 $a$  が次の4条件をみたすことをいう。

(V1)  $R := \{l \in \mathbb{R}^N \mid a(l) \neq 0\}$  は有限集合。

(V2)  $L := \text{Span}_{\mathbb{Z}}(R)$  は  $\mathbb{R}^N$  の格子で、 $\text{rank}_{\mathbb{Z}} L = N$ 。

(V3) 任意の  $l \in R$  に対して  $a(l) = a(-l)$  が成り立つ。

(V4)  $\mu := \frac{\sum_{l \in R} a(l) \langle v, l \rangle^2}{2 \langle v, v \rangle}$  の値は  $v \in \mathbb{R}^N$  の選びかたによらず一定。

ただし、記号  $\langle v, l \rangle$  は、 ${}^t v l$  を意味するものとする。(これは  $\mathbb{R}^N$  における通常の内積であるが、この記号を用いるときには、 $\mathbb{C}^N$  で考えているときでも複素共役をとらないものとする。)

$a$  をベクトル系とする。条件 (V3) より、ベクトル系  $a$  から定まる集合  $R$  は原点  $O$  を中心に対称である。そこで、 $R$  の部分集合  $R^+$  を、条件

$$R^+ \cap (-R^+) = \emptyset, \quad R \setminus \{O\} = R^+ \cup (-R^+)$$

をみたすように選ぶ。 $R^+$  の選び方は一意的ではないが、これは今後の議論には影響しない。また、

$$\rho := \sum_{l \in R^+} a(l)l, \quad d := \sum_{l \in R} a(l)$$

とおく。定義より

$$\mu = \frac{1}{2N} \sum_{l \in R} a(l) \langle l, l \rangle, \quad L \subset \mu L^*$$

であることがわかる。

さて、ベクトル系  $a$  に対し、無限積

$$\varphi_a(\tau, z) := q^{\frac{d}{24}} \zeta^{-\frac{\rho}{2}} \prod_{(m,l) > 0} (1 - q^m \zeta^l)^{a(l)}$$

を考える。ただし  $(m, l) > 0$  は  $m \in \mathbb{N}, l \in R$  または  $m = 0, l \in R^+$  を意味するものとし、また  $q^m := \exp(2\pi\sqrt{-1}m\tau)$ ,  $\zeta^l = \exp(2\pi\sqrt{-1}\langle l, z \rangle)$  とする。厳密には  $\varphi_a$  は  $R^+$  の選び方に依存するが、 $R^+$  の選び方を変えても  $\varphi_a$  は符号が変わるだけであることを注意しておく。

このとき、やや複雑だがそう難しくない計算により、ベクトル系  $a$  に対して定まる無限積  $\varphi_a$  はヤコビ形式の変換規則をみたすことがわかる。すなわち、次の命題が成り立つ。



**命題 (ポーチャーズ, 1995)** ベクトル系  $a$  に対して定まる無限積  $\varphi_a$  は  $\mathbb{H} \times \mathbb{C}^N$  上の有理型関数であり、その零点と極は無限積の形から自明にわかるものだけである。すなわち、 $l \in R^+$  の各々に対し、集合  $\{(\tau, z) \mid \langle l, z \rangle \in \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau\}$  が位数  $a(l)$  の零点 ( $a(l)$  が負の場合は極) となる。さらに、 $\varphi_a$  は重さ  $\frac{a(0)}{2}$  指数  $\frac{\mu}{2}$  の (有理型で指標付きの) ヤコビ形式である。すなわち、以下の変換規則をみたす。

- $\varphi_a(\tau, z) = (-1)^{\langle x, \rho \rangle} q^{\frac{\mu}{2}\langle x, x \rangle} \zeta^{\mu x} \varphi_a(\tau, z + x\tau) \quad (x \in L^*)$
- $\varphi_a(\tau, z) = (-1)^{\langle y, \rho \rangle} \varphi_a(\tau, z + y) \quad (y \in L^*)$
- $\varphi_a(\tau, z) = (-1)^{\frac{d-a(0)}{2}} \varphi_a(\tau, -z)$
- $\varphi_a(\tau, z) = e\left(\frac{d}{8}\right) \tau^{-\frac{a(0)}{2}} e\left(-\frac{\mu\langle z, z \rangle}{2\tau}\right) \varphi_a\left(-\frac{1}{\tau}, \frac{z}{\tau}\right)$
- $\varphi_a(\tau, z) = e\left(-\frac{d}{24}\right) \varphi_a(\tau + 1, z)$

さて、ヤコビ形式における一般論より、ベクトル系より構成された無限積  $\varphi_a$  は、カスプも込めて正則であれば、重さ  $\frac{a(0)-N}{2}$  の楕円モジュラー形式  $f_v$  たちを用いて

$$\varphi_a(\tau, z) = \sum_{v \in (L - \frac{\rho}{2}) / \mu L^*} f_v(\tau) \theta_v(\tau, z),$$

と分解できる。ただし、 $\theta_v$  は次のように定義されたテータ関数 (重さ  $\frac{N}{2}$  指数  $\frac{\mu}{2}$  のヤコビ形式) である。

$$\theta_v(\tau, z) = \sum_{x \in L^*} (-1)^{\langle x, \rho \rangle} q^{\frac{1}{2\mu}\langle v + \mu x, v + \mu x \rangle} \zeta^{v + \mu x}$$

そして特に、ベクトル系  $a$  が条件  $a(0) = N$  をみたしておれば、重さ 0 の楕円モジュラー形式は定数しかないので、 $\varphi_a$  はテータ関数の和で書け、次のような「無限積 = 無限和」の形をした等式が生ずる。

$$\varphi_a(\tau, z) = \sum_{v \in (L - \frac{\rho}{2}) / \mu L^*} c_v \theta_v(\tau, z) \quad (c_v \in \mathbb{Z}) \quad (5)$$

これで、我々が解くべき問題は、はっきりした。

**問題 (よいベクトル系)** 条件  $a(0) = N$  をみたし、 $\varphi_a$  がカスプも込めて正則となるようなベクトル系  $a$  をすべて求めよ。(このようなベクトル系を、ここではよいベクトル系ということにする。)

この問題を解決するために、まず、式(5)の両辺をよくみてみよう。右辺はテータ関数であるので、 $q^n \zeta^\lambda$ の項は $2n\mu = \langle \lambda, \lambda \rangle$ のところだけに現れる。一方、左辺は、無限積を展開すると

$$\varphi_a(\tau, z) := q^{\frac{d}{24}} \zeta^{-\frac{d}{2}} \prod_{(m,l)>0} (1 - q^m \zeta^l)^{a(l)} = \left( \zeta^{-\frac{d}{2}} \prod_{l \in R^+} (1 - \zeta^l)^{a(l)} \right) q^{\frac{d}{24}} + \dots$$

という形になるので、

$$\zeta^{-\frac{d}{2}} \prod_{l \in R^+} (1 - \zeta^l)^{a(l)} = \sum_{\lambda} c_{\lambda} \zeta^{\lambda} \quad (c_{\lambda} \neq 0)$$

と書くことにすれば、左辺にあらわれる $\lambda$ は、条件 $d\mu = 12\langle \lambda, \lambda \rangle$ を満たさねばならないことがわかる。

さて、 $l \in R \setminus \{0\}$ が「割れないベクトル」であるとは、実数 $x$ が $xl \in R$ を満たすならば $|x| \geq 1$ であることと定義しよう。「割れないベクトル」全体の集合を $R_0$ と書くことにし、 $R_0^+ := R_0 \cap R^+$ と定める。このとき、次の補題が成り立つことがわかる。

**補題**  $a$ をよいベクトル系だとする。このとき、 $l \in R_0^+$ であれば、ベクトル系 $a$ の集合 $\{xl \mid x \in \mathbb{R}\} \cap R$ 上での値は次のいずれかである。

- $a(\pm l) = 1$ 。このとき、無限積には項 $(1 - \zeta^l)$ があらわれる。
- $a(\pm l) = -1$ ,  $a(\pm 2l) = 1$ 。このとき、無限積には項 $(1 + \zeta^l)$ があらわれる。

証明は $N$ についての帰納法を用いる。この命題は $R_0^+$ の選び方によらないことに注意しておく。まず、 $N = 1$ のときは容易。一般の $N$ については、 $l \in R_0^+$ に直交するベクトル $v$ をとり、あらためて $R_0^+$ を、その任意の元と $v$ との内積が非負になるように選びなおす。このとき、原点を通り $v$ と直交する $N - 1$ 次元空間に対して帰納法の仮定を使えばよい。したがって、問題(よいベクトル系)は、次の問題の一部であるとみなすことができる。

**問題(ベクトルの配置)** 以下の式において(左辺の $\pm$ は項ごとにどちらを選んでもよいことにして) $\Lambda$ がある球面の部分集合となる場合をすべて求めよ。

$$\prod_{l \in R_0^+} (1 \pm \zeta^l) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_{\lambda} \zeta^{\lambda} \quad (c_{\lambda} \neq 0)$$

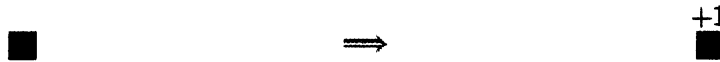
なお、これまでの議論から明らかであるが、問題(ベクトルの配置)の解が見つかったからといって、それが必ずしも問題(よいベクトル系)の解を導くとは限らないことに注意しておく。実際、次節で、 $N = 2$ の場合にそのような例があらわれる。

## 6 解決すべきこと…ベクトル系の分類

### 6.1 1次元の場合

$N = 1$  のときには、問題（ベクトルの配置）を解決することは極めて容易である。すぐに、以下の3通りだけが問題（ベクトルの配置）の条件を満たすことが示せる。なお、それぞれの場合ごとに付記されている図は、左側が問題（ベクトルの配置）における  $R_0^+$  と符号の様子、右側がそれに対応するベクトル系の様子である。

- 自明な場合： $a(0) = 1$ ：オイラーの五角数定理に対応



- 被約な場合： $a(0) = 1, a(\pm 1) = 1$ ：ヤコビの三重積公式に対応



- 被約でない場合： $a(0) = 1, a(\pm 1) = -1, a(\pm 2) = 1$ ：ワトソンの五重積公式に対応



### 6.2 2次元の場合

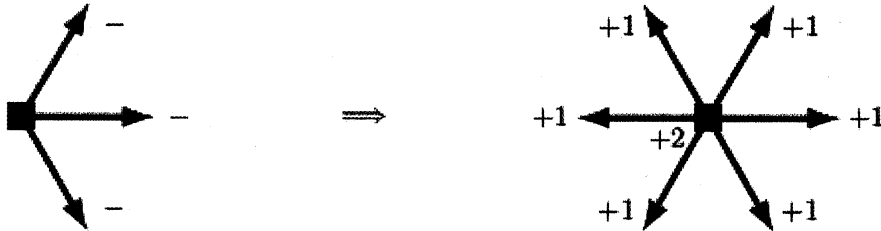
$N = 2$  のときには、問題（ベクトルの配置）を解決することは少々難しい<sup>6</sup>。場合分けの考察を細かく書くと結構複雑になるので、ここでは概要を少し述べるだけにしておく。まず、 $N = 2$  の場合に限らず、問題（ベクトルの配置）の条件が成り立つ場合には、式の左辺を展開して現れる項は、キャンセルする場合も含めて、球面の外側に出ることはないことがわかる。 $N = 2$  のとき、1次元のときに得られたベクトル系の2個の直和が問題（ベクトルの配置）の条件を満たすことはすぐわかるので、それ以外の場合を考えることにする。 $R_0^+$  を、すべての元が平面  $\mathbb{R}^2$  の片側半分にまとまるように選択し、端から順に  $l_1, l_2, l_3, l_4, \dots$  と名づける。また、 $\mathbb{R}^2$  の正規直交基底  $e_1, e_2$  を  $e_1$  は  $l_1$  と同じ向きに、 $e_2$  は任意の  $R_0^+$  の元との内積が非負になるように定める。このとき、特に  $l_1$  と  $l_2$  について考えることにより、次の2つのことがわかる。

- $l_2$  の  $e_1$  方向成分は、 $l_1$  の長さの半整数倍である。
- $R_0^+$  のそれぞれの元の  $e_2$  方向成分のなかで、 $l_2$  のそれは、正の最小のものである。

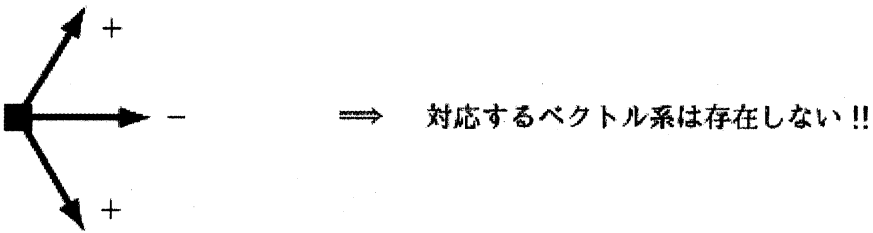
<sup>6</sup>筆者（青木）が何かに気づいてないだけで、本当は易しい問題ではないかという気がします。

同様の考察を、 $R_0^+$  を  $l_1, l_2$  と  $-l_3, -l_4 \dots$  に取り直して行うことにより、 $l_1$  と  $l_2$  の位置関係は4通りに限られることがわかる。すなわち、「1次元のベクトル系2個の直和」以外では、以下の4通りだけが問題（ベクトルの配置）の条件を満たすことが示せる。

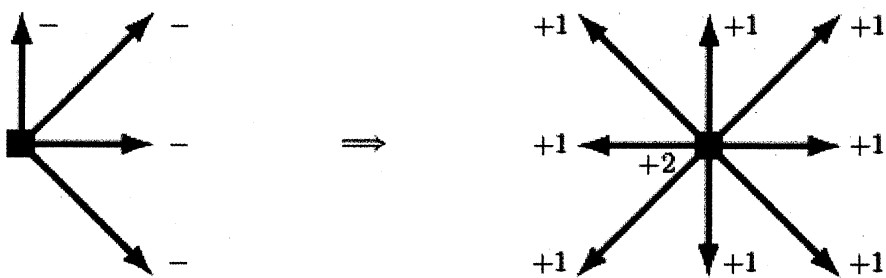
- $A_2$  型のベクトル系：



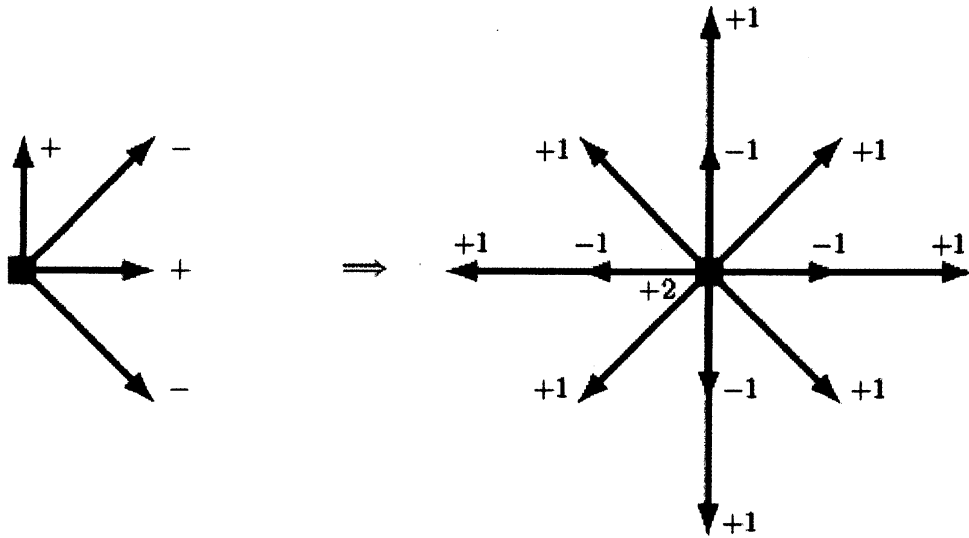
なお、次のパターンも、問題（ベクトルの配置）の条件をみたすが、これはベクトル系の定義の (V4) をみたさず、問題（良いベクトル系）の解答にはならない。



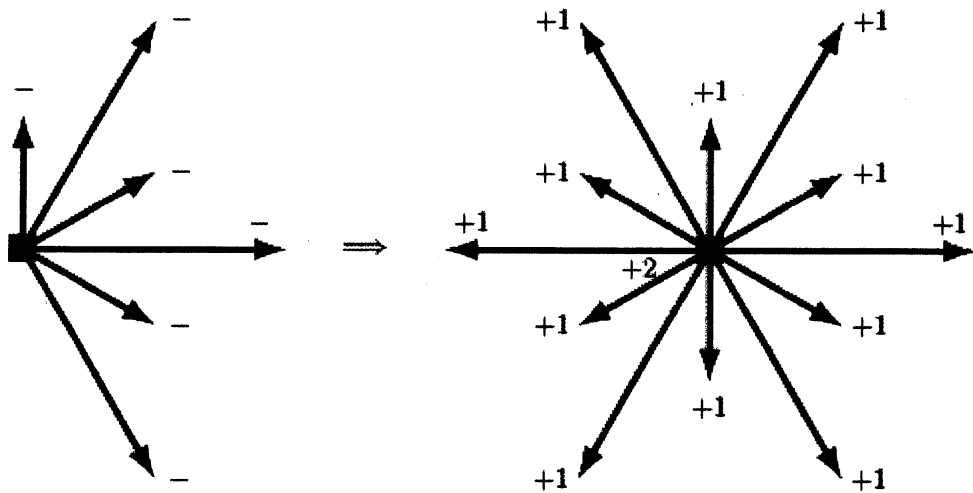
- $B_2$  型のベクトル系：



- $BC_2$  型のベクトル系 :



- $G_2$  型のベクトル系 :



### 6.3 わかったこと

以上で、 $N = 1, 2$  の場合には、よいベクトル系はすべてアフィンルート系と対応していることがわかった。すなわち、次の定理が成り立つ。

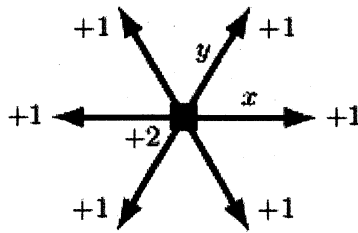
**定理 2.**  $N = 1, 2$  の場合には、よいベクトル系は、アフィンルート系と 1 対 1 に対応している。したがって、よいベクトル系から導かれる「無限積=無限和」の形をした等式は、アフィンルート系の分母公式にほかならない。

実際、次元によらずアフィンルート系がよいベクトル系を導くことは、分母公式の形から明らかである。 $N \geq 3$  のとき、アフィンルート系に対応していないよいベクトル系が存在するかどうかは、まだ調べていない。

さて、 $N = 2$  のときに、よいベクトル系から導かれる「無限積＝無限和」の形をした等式が、エータ積とテータ関数の間の等式を導くことを、 $A_2$  型のベクトル系を例として試みよう。 $A_2$  型のベクトル系から得られる「無限積＝無限和」の形をした等式を書き下すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} q^{\frac{1}{3}} X^{-1} (1-X)(1-Y)(1-XY^{-1}) \prod_{m=1}^{\infty} \left\{ (1-q^m)^2 (1-q^m X)(1-q^m Y) \right. \\ \left. (1-q^m XY^{-1})(1-q^m X^{-1})(1-q^m Y^{-1})(1-q^m X^{-1}Y) \right\} \\ = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \binom{n-m}{3} q^{\frac{1}{3}(m^2+n^2+mn)} X^m Y^n \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $X, Y$  は、下図のようにベクトル  $x, y$  を定め、 $X = \zeta^x, Y = \zeta^y$  とおいた。また、 $\binom{n-m}{3}$  はルジャンドル記号である。



$$\binom{n-m}{3} = \begin{cases} 1 & (n-m \equiv 1 \pmod{3}) \\ 0 & (n-m \equiv 0 \pmod{3}) \\ -1 & (n-m \equiv 2 \pmod{3}) \end{cases}$$

式(6)で  $X$  を  $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$  に、 $Y$  を  $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$  に置き換えると、次のようなエータ積の等式が得られる。

$$\frac{\eta(3\tau)^3}{\eta(\tau)} = \frac{1}{3} \sum_{m-n \equiv 1 \pmod{3}} q^{\frac{1}{3}(m^2+n^2+mn)}$$

ただ、 $\zeta$  をどのように置き換えるとエータ積の形になるかなど、得られた多変数の等式の1変数への制限については、既に述べた  $N = 1$  の場合（しらみつぶしにやった結果が定理1である）を除いて、系統的には調べていない。

## 7 今後の課題

以下に、未解決の問題をまとめておく。

未解決問題 1.  $N \geq 3$  のときに、よいベクトル系をすべて求めよ。そのなかに、アフィンルート系に対応しないものはあるのだろうか？

未解決問題 2.  $N \geq 2$  のときに、よいベクトル系から得られる「無限積＝無限和」の形をした等式、あるいはアフィンリー環の分母公式を 1 変数に制限すれば、重さ  $\frac{N}{2}$  のカスプも込めて正則なエータ積は、すべて得られるだろうか？

もしも何か良い発見があれば、ぜひとも筆者に教えていただきたい。

## 8 さいごに

とても完備しているとはいえない内容であるにもかかわらず、このテーマについて講演する機会を与えてくださいました、田中太初先生、原田昌晃先生ほか研究集会に関わられた先生方に感謝いたします。

また、本稿は 1 変数の保型形式をテーマにしているため、過去の文献に何らかの類似の記述がある可能性もおおいにあり得ると考えています。本稿の内容については、筆者の能力不足により、過去の文献の調査が不十分な報告であることをお詫びいたします。

## 参考文献

- [1] 青木 宏樹, A Remark on Borcherds construction of Jacobi forms, 第 5 回福岡数論研究集会報告集 (福岡, 2010), 11–22
- [2] R. E. Borcherds, Automorphic forms on  $O_{s+2,2}(R)$  and infinite products, *Invent. Math.* **120**(1) (1995), 161–213.
- [3] M. Eichler, D. Zagier, *The theory of Jacobi forms* (Birkhäuser, 1985).
- [4] K. Saito, *Non-negativity of Fourier Coefficients of Eta-products*, Proceedings of the second spring conference on automorphic forms (Hamanako, 2003), 95–144, (2004).
- [5] D. Zagier, *Elliptic Modular Forms and Their Applications*, The 1-2-3 of Modular forms, 1103, (Universitext, Springer, Berlin, 2008).