数理解析研究所講究録
第 1965 巻 2015 年 66-78

Path and gallery models for level-zero representations of quantum affine algebras

石井 基裕 *
Motohiro Ishii

東北大学大学院情報科学研究科
純粋・応用数学研究センター

Research Center for Pure and Applied Mathematics,
Graduate School of Information Sciences, Tohoku University

(e-mail: ishii@math.is.tohoku.ac.jp)

Abstract

Littelmann の Lakshmibai–Seshadri (LS) パス模型は複素半単純 Lie 環 (より一般に対称化可能な Kac–Moody Lie 環) の可積分最高ウェイト加群の結晶基底に対するルート系の型に依らない統一的な組合せ論的実現を与える. 本稿では, LS パス模型の一つの拡張として, アフィン Kac–Moody Lie 環の Weyl 加群の結晶基底に対する組合せ論的な実現について述べる.

1 導入 -結晶基底と Lakshmibai–Seshadri パス模型-

複素半単純 Lie 環 $\mathfrak{g}$ の優整ウェイト λ を一つ固定し, 有限集合 $\{\langle\alpha^{\vee},\lambda\rangle \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \alpha \in \Delta^{+}\} \setminus \{0\}$ の最小公倍数を $N = N_{\lambda} \in \mathbb{Z}_{>0}$ とする. ただし, Δ^{+} は $\mathfrak{g}$ の正ルート全体の集合を表す. 最高ウェイト λ の可積分最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群の基底は, 型 λ の **Lakshmibai–Seshadri (LS)** パスの集合

$$\mathbb{B}(\lambda) := \{(\underbrace{w_1, w_2, \ldots, w_N}_{\in W^{\lambda}}) \mid (s/N)\text{-chain } w_s \Leftarrow w_{s+1} \text{ が存在 } (1 \leq s < N)\}$$

*本研究は科学研究費補助金「研究活動スタート支援」(26887002) の補助を受けました.

と一対一に対応することが知られている ([Lit95]). ただし, W^λ は剰余類集合 $W/\{w \in W \mid w\lambda = \lambda\}$ の極小代表元全体を表す. 実は, $\mathbb{B}(\lambda)$ には $\mathfrak{g}$ 上の結晶の構造 $(\mathbb{B}(\lambda); \mathrm{wt}, e_\alpha, f_\alpha, \varepsilon_\alpha, \varphi_\alpha)$ (α は単純ルート全体を動く) が定まり (付録 A, B を参照せよ), 次のより強い主張が成立する.

定理 1.1 ([Kas94, Jos95]). 型 λ の LS パスのなす結晶は最高ウェイト λ の可積分最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群の**結晶基底**と結晶として同型である.

結晶基底の結晶構造を介して, 表現の構造を組合せ論的な構造に読み替えることができる, すなわち表現論と組合せ論とを結びつけることができる. また, 例えば表現のテンソル積の構造を調べる際, 結晶構造に着目することによって, その既約分解則を見通しよく記述することができる. しかし, 結晶基底の結晶構造を明示的に記述することは一般には非常に困難である. 定理 1.1 はそれが LS パスによって記述できることを示している.

本題に入る前に, 結晶の定義, 及び結晶基底の結晶構造について簡単に復習しておこう ([Kas93]). $\mathfrak{g}$ のウェイト格子を P とする. 集合 B, 及び写像 $\mathrm{wt}: B \to P$, $e_\alpha, f_\alpha : B \to B \sqcup \{\mathbf{0}\}$, $\varepsilon_\alpha, \varphi_\alpha : B \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}$ (α は $\mathfrak{g}$ の単純ルート全体を動く) の組 $(B; \mathrm{wt}, e_\alpha, f_\alpha, \varepsilon_\alpha, \varphi_\alpha)$ が $\mathfrak{g}$ 上の**結晶**であるとは, 各 $b \in B$ と単純ルート α について以下の条件 (1)〜(5) が満たされることである:

(1) $\varphi_\alpha(b) = \varepsilon_\alpha(b) + \langle \alpha^\vee, \mathrm{wt}(b) \rangle$ が成り立つ;

(2) $\begin{cases} e_\alpha b \neq \mathbf{0} \text{ ならば } \mathrm{wt}(e_\alpha b) = \mathrm{wt}(b) + \alpha \text{ が成り立つ}, \\ f_\alpha b \neq \mathbf{0} \text{ ならば } \mathrm{wt}(f_\alpha b) = \mathrm{wt}(b) - \alpha \text{ が成り立つ}; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} e_\alpha b \neq \mathbf{0} \text{ ならば } \varepsilon_\alpha(e_\alpha b) = \varepsilon_\alpha(b) - 1,\ \varphi_\alpha(e_\alpha b) = \varphi_\alpha(b) + 1 \text{ が成り立つ}, \\ f_\alpha b \neq \mathbf{0} \text{ ならば } \varepsilon_\alpha(f_\alpha b) = \varepsilon_\alpha(b) + 1,\ \varphi_\alpha(f_\alpha b) = \varphi_\alpha(b) - 1 \text{ が成り立つ}; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} e_\alpha b \neq \mathbf{0} \text{ ならば } f_\alpha e_\alpha b = b \text{ が成り立つ}, \\ f_\alpha b \neq \mathbf{0} \text{ ならば } e_\alpha f_\alpha b = b \text{ が成り立つ}; \end{cases}$

(5) $\varepsilon_\alpha(b) = -\infty$ ならば $e_\alpha b = f_\alpha b = \mathbf{0}$ が成り立つ.

今, q を不定元とし, $U_q(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に付随する**量子展開環**とする. $U_q(\mathfrak{g})$ は $\mathbb{C}(q)$ 上の Hopf 代数であり, $\mathfrak{g}$ の展開環 $U(\mathfrak{g})$ の Hopf 代数構造を q-変形したものと見做すことが出来る. ここで, $\mathfrak{g}$ の表現 V の結晶基底 B とは, V の q-変形を与える $U_q(\mathfrak{g})$ の表現 V_q のウェイト・ベクトルからなる $\mathbb{C}(q)$-基底 B_q の $q=0$ への特殊化 $B=B_{q=0}$ であって, $q=0$ で well-defined な単純ルート・ベクトルの作用 $\tilde{e}_\alpha$, $\tilde{f}_\alpha$ (**柏原作用素**と呼ばれる) で閉じているもののことである (すなわち, $\tilde{e}_\alpha B, \tilde{f}_\alpha B \subset B \sqcup \{0\}$). このような基底が存在するかどうかは一般には不明であるが, 可積分最高ウェイト加群は常に結晶基底を持つことが知られている ([Kas91]). 各 $b \in B$ はウェイト・ベクトルを $q=0$ へ特殊化したものなので, 自然にそのウェイト $\mathrm{wt}(b) \in P$ が定まっている. また,

$$\varepsilon_\alpha(b) := \max\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{e}_\alpha^n b \neq 0\}, \quad \varphi_\alpha(b) := \max\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \tilde{f}_\alpha^n b \neq 0\},$$

と定めると, $(B; \mathrm{wt}, \tilde{e}_\alpha, \tilde{f}_\alpha, \varepsilon_\alpha, \varphi_\alpha)$ は $\mathfrak{g}$ 上の結晶となる.

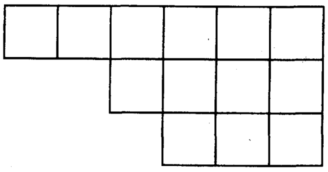
§2 では, 一般線型 Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C})$ の場合に半標準盤による結晶基底の実現について述べる. §3, 4 では, アフィン・ルート・データ, 及びアフィン Kac–Moody Lie 環の Weyl 加群について述べる. §5 では, Weyl 加群の結晶基底に対するギャラリー模型を導入する. これは可積分最高ウェイト加群の結晶基底に対する LS パス模型の一つの拡張であるとみなすことができる. 付録 A, B では, LS パスの定義, 及びその結晶構造について述べる.

謝辞. RIMS 研究集会「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究」における講演の機会を与えて下さった世話人の田中太初氏にこの場を借りて御礼申し上げます.

2 A 型の場合の半標準盤による結晶基底の実現

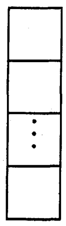
この節では一般線型 Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n+1}(\mathbb{C})$, すなわち A_n 型の Kac–Moody Lie 環, の可積分最高ウェイト加群の結晶基底に対する半標準盤による実現について述べる. これは LS パス模型の理論の基礎をなす重要な具体例を与える.

$I=\{1,2,\ldots,n\}$ を A_n 型の Dynkin 図形の頂点集合とし, $(n+1)$-次元 Euclid 空間 $\mathfrak{h}=\bigoplus_{i=1}^{n+1}\mathbb{R}\varepsilon_i$ を用意する. ただし, $\{\varepsilon_i\}_{1\le i\le n+1}$ は $\mathfrak{h}$ の正規直交基底であり, $\mathfrak{h}$ 上の内積を $\langle -,-\rangle$ で表す. $(n+1)$-次対称群 $W:=\mathfrak{S}_{n+1}=\langle r_i:=(i,i+1)\mid i\in I\rangle$ は $\mathfrak{h}$ 上に座標 $\{\varepsilon_i\}_{1\le i\le n+1}$ の置換として自然に作用している. 今, $\alpha_i:=\varepsilon_i-\varepsilon_{i+1}, i\in I$, とおくと, $\Delta:=\{w\alpha_i\mid w\in W, i\in I\}$ は A_n 型ルート系を定め, $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ はその単純ルート系をなす. また, $\varpi_i:=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots+\varepsilon_i\in\mathfrak{h}$, $i\in I$, を基本ウェイトとする; $\langle\varpi_i,\alpha_j\rangle=\delta_{ij}$, $i,j\in I$. そして, 各優整ウェイト $\lambda=\sum_{i\in I}m_i\varpi_i$, $m_i\in\mathbb{Z}_{\ge 0}$, を高さ i の列が m_i 個の Young 図形と同一視する. 例えば, $\lambda=2\varpi_1+\varpi_2+3\varpi_3$ は, 次の Young 図形に対応する (後の議論の都合により, 通常とは異なる左右逆転させた記述方法を用いる):



一般に型 λ で成分が $\{1,2,\ldots,n+1\}$ の半標準盤全体の集合 $\mathsf{Tab}(\lambda)$ は, 最高ウェイト λ の可積分最高ウェイト $\mathfrak{g}$-加群 $L(\lambda)$ の基底と一対一に対応することが知られている. ただし, 半標準盤とは Young 図形の各箱の中に下方向には狭義増加に, 左方向には広義増加となるように数字を書き込んだものを言う. 以下, この対応について簡単に説明する.

まず, A_n 型の場合は全ての基本ウェイト

$\varpi_i=$  (高さ i)

が minuscule ウェイトであることに注意する. すなわち, 最高ウェイト ϖ_i の可積分最高ウェイト加群 $L(\varpi_i)$ の基底は, ϖ_i の W-軌道 $W\varpi_i\cong W^{\varpi_i}$ (極小代表元全体の集合) と一対一に対応する. 従って, $L(\varpi_i)$ の結晶基底を $B(\varpi_i)$

とすると, 標準的な一対一対応 $B(\varpi_i) \cong W^{\varpi_i}$ が存在する. 実際,

$$\varpi_i = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_i = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, \underbrace{0 \ldots, 0}_{n+1-i}) \in \mathfrak{h}$$

であるので, 次の対応が成り立つ:

$$\begin{aligned} W\varpi_i &= \{\varepsilon_{k_1} + \varepsilon_{k_2} + \cdots + \varepsilon_{k_i} \mid 1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_i \le n+1\} \\ &\cong \left\{ \begin{array}{|c|} \hline k_1 \\ \hline k_2 \\ \hline \vdots \\ \hline k_i \\ \hline \end{array} \;\middle|\; 1 \le k_1 < k_2 < \cdots < k_i \le n+1 \right\} = \mathsf{Tab}(\varpi_i). \end{aligned}$$

次に, 一般の優整ウェイト $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$, を取る. 今, $u_\lambda \in L(\lambda)$ をウェイト λ の最高ウェイト・ベクトルとする. すると, $\tilde{u}_\lambda := \bigotimes_{i \in I} u_{\varpi_i}^{\otimes m_i} \in \bigotimes_{i \in I} L(\varpi_i)^{\otimes m_i}$ はウェイト λ の最高ウェイト・ベクトルであるので, $\mathfrak{g}$-加群としての埋め込み $L(\lambda) \hookrightarrow \bigotimes_{i \in I} L(\varpi_i)^{\otimes m_i}$, $u_\lambda \mapsto \tilde{u}_\lambda$, が存在する. ここで, 対応する結晶基底の埋め込み

$$\begin{aligned} B(\lambda) \hookrightarrow \bigotimes_{i \in I} B(\varpi_i)^{\otimes m_i} &= B(\varpi_1)^{\otimes m_1} \otimes B(\varpi_2)^{\otimes m_2} \otimes \cdots \otimes B(\varpi_n)^{\otimes m_n} \\ &\cong (W^{\varpi_1})^{m_1} \times (W^{\varpi_2})^{m_2} \times \cdots \otimes (W^{\varpi_n})^{m_n} \end{aligned}$$

について考える. 右辺の元は, 型 λ で成分が $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ の列標準盤全体と対応していると考えることができる. ただし, 列標準盤とは下方向に狭義増加であるものを言う. このとき, 結晶基底のテンソル積規則によって,

$$\bigotimes_{i \in I} B(\varpi_i)^{\otimes m_i} \ni [\underbrace{w_1^1, \ldots, w_{m_1}^1}_{\in W^{\varpi_1}}; \underbrace{w_1^2, \ldots, w_{m_2}^2}_{\in W^{\varpi_2}}; \cdots\cdots; \underbrace{w_1^n, \ldots, w_{m_n}^n}_{\in W^{\varpi_n}}]$$

$$\leftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline a_1 & \cdots & a_{m_1} & b_1 & \cdots & b_{m_2} \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{} & c_1 & \cdots & c_{m_2} \\ \cline{4-6} \end{array} \;\cdots\cdots\; \begin{array}{|c|c|c|} \hline d_1 & \cdots & d_{m_n} \\ \hline e_1 & \cdots & e_{m_n} \\ \hline \vdots & \cdots & \vdots \\ \hline f_1 & \cdots & f_{m_n} \\ \hline \end{array} \qquad \cdots\cdots \quad (*)$$

が $B(\lambda)$ の元の像であるための必要十分条件は, 各 $w_k^i \in W^{\varpi_i}$ の $W \twoheadrightarrow W^{\varpi_i}$ に関する引き戻し $\bar{w}_k^i \in W$ であって, W 上の Bruhat 順序 $\geq$ に関して

$$\bar{w}_1^1 \geq \cdots \geq \bar{w}_{m_1}^1 \geq \bar{w}_1^2 \geq \cdots \geq \bar{w}_{m_2}^2 \geq \cdots\cdots \geq \bar{w}_1^n \geq \cdots \geq \bar{w}_{m_n}^n$$

となるものが存在することであることがわかる. 実は, この条件は列標準盤 (*) が半標準盤であることと同値であり, 従って $B(\lambda)$ が型 λ の半標準盤全体 $\mathsf{Tab}(\lambda)$ と一対一に対応することが分かる.

A 型以外の場合でも, 結晶基底を結晶基底のテンソル積の中に埋め込んで, 結晶基底の各元を Weyl 群の元の列として記述することによって, 結晶基底と LS パスとの間の対応が得られる (定理 1.1).

3 アフィン・ルート・データ

§1〜§2 で述べた結果のアフィン Kac–Moody Lie 環の Weyl 加群の場合への拡張を述べるために, ここではまずアフィン・ルート・データについて述べる. 簡単のために, ADE 型のルート・データのみを扱うことにする.

I を有限集合とし, $\{\alpha_i\}_{i\in I} \subset P = \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\varpi_i$ を ADE 型の有限ルート・データとする. ただし $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ は単純ルートの集合, ϖ_i, $i \in I$, は基本ウェイトであり, P 上の内積に関して $\langle \alpha_i, \varpi_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j \in I$, となる. $W := \langle r_i \mid i \in I \rangle$ を有限 Weyl 群とし, $\Delta := \{w\alpha_i \mid w \in W, i \in I\}$, $\Delta^+ := \Delta \cap \sum_{i\in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i$, $Q := \bigoplus_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i$ とおく.

$I_{\mathrm{af}} := I \sqcup \{0\}$ とし, $\{\alpha_i\}_{i\in I_{\mathrm{af}}} \subset P_{\mathrm{af}} := \bigoplus_{i\in I_{\mathrm{af}}} \mathbb{Z}\Lambda_i \oplus \mathbb{Z}\delta$ を上記の有限ルート・データに付随する (捩れのない) アフィン・ルート・データとする. ただし, $\theta \in \Delta^+$ を最高ルートとすると, $\delta := \alpha_0 + \theta$ である. ここで, $\varpi_i = \Lambda_i - \langle \delta, \Lambda_i \rangle \Lambda_0$ として $P \subset P_{\mathrm{af}}$ と見做す; $\langle \delta, \varpi_i \rangle = 0$, $i \in I$, となることに注意せよ. $W_{\mathrm{af}} := \langle r_i \mid i \in I_{\mathrm{af}} \rangle$ を W に付随するアフィン Weyl 群とする. $W_{\mathrm{af}} \cong W \ltimes \{t_\xi \mid \xi \in Q\}$ であることに注意せよ. ただし, t_ξ は $\xi \in Q$ に付随する平行移動を表す.

4 アフィン Kac–Moody Lie 環の Weyl 加群

$\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ を §3 で導入したアフィン・ルート・データに付随するアフィン Kac–Moody Lie 環とし, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ を有限ルート・データに対応する有限次元複素半単純 Lie 部分環とする. また $\mathfrak{g}'_{\mathrm{af}} := [\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}, \mathfrak{g}_{\mathrm{af}}] \subset \mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ とおき, $\mathbf{L}\mathfrak{g} := \mathfrak{g}'_{\mathrm{af}}/\mathbb{C}\delta$ を $\mathfrak{g}$ に付随するループ代数とする. $U_q(\mathfrak{g})$, $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$, $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$, $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ に付随する量子展開環とする. 以下, $\mathfrak{g}$ の優整ウェイト $\lambda = \sum_{i\in I} m_i \varpi_i \in P$, $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, を一つ固定する.

$L(\lambda)$ を最高ウェイト λ の有限次元既約最高ウェイト $U_q(\mathfrak{g})$-加群とし, その結晶基底を $B(\lambda)$ とする.

$\underline{\mathcal{W}}(\lambda)$ を端ウェイト λ の端ウェイト $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$-加群とし, その結晶基底を $\underline{\mathcal{B}}(\lambda)$ とする ([Kas94, Kas02]). これは u_λ によって生成される可積分加群であって, u_λ がウェイト λ の端ウェイト・ベクトルであるという関係式によって定義される $U_q(\mathfrak{g}_{\mathrm{af}})$-加群である. また $\langle \lambda, \delta \rangle = 0$ であることから, $\underline{\mathcal{W}}(\lambda)$ は $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ 上の加群となる. このとき $\underline{\mathcal{W}}(\lambda)$ は $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の Drinfeld 実現から来る三角分解に関する普遍的可積分最高ウェイト加群と同型であり, **大域的 Weyl $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群**とも呼ばれている ([CP01]).

$\underline{\mathcal{W}}(\varpi_i)$ 上にはウェイトを δ ずらす $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群同型 $z_i : u_{\varpi_i} \mapsto u_{\varpi_i+\delta}$ が存在し, $\mathcal{W}(\varpi_i) := \underline{\mathcal{W}}(\varpi_i)/(z_i - \mathrm{id})\underline{\mathcal{W}}(\varpi_i)$ は有限次元の既約 $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群となる. $\mathcal{W}(\varpi_i)$ をレベル・ゼロ基本加群と呼ぶ ([Kas02]). $\mathcal{W}(\lambda) := \bigotimes_{i\in I} \mathcal{W}(\varpi_i)^{\otimes m_i}$ の結晶基底を $\mathcal{B}(\lambda) = \bigotimes_{i\in I} \mathcal{B}(\varpi_i)^{\otimes m_i}$ とおく. $\mathcal{W}(\lambda)$ は $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$ の Drinfeld 実現から来る三角分解に関する普遍的有限次元最高ウェイト加群と同型であり, **局所的 Weyl $U_q(\mathbf{L}\mathfrak{g})$-加群**とも呼ばれている ([CP01]).

5 Weyl 加群の結晶基底に対するギャラリー模型

$\mathfrak{h}_\mathbb{R} := \mathbb{R} \otimes_\mathbb{Z} P$ 上への W_{af} のアフィン変換による作用を考える. $\alpha \in \Delta$, $m \in \mathbb{Z}$ に対して $H_{\alpha,m} := \{h \in \mathfrak{h}_\mathbb{R} \mid \langle h, \alpha \rangle = m\}$ と定め, $\mathfrak{h}_\mathbb{R} \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta} H_{\alpha,0}$ 及

び $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{\alpha\in\Delta, m\in\mathbb{Z}} H_{\alpha,m}$ の連結成分を Weyl 部屋及び Weyl 小部屋と呼ぶ. このとき, Weyl 小部屋 $A^{+} := \{h \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \mid 0 < \langle h, \alpha_i \rangle \ (i \in I),\ \langle h, \theta \rangle < 1\}$ を含む唯一つの Weyl 部屋 C^{+} が存在する. W 及び W_{af} はそれぞれ Weyl 部屋全体の集合及び Weyl 小部屋全体の集合に単純推移的に作用している. アフィン超平面 $H_{\beta,m}$ に関する鏡映を $r_{\beta,m} \in W_{\mathrm{af}}$ とし, 特に $r_{\beta} := r_{\beta,0}$ と書く.

以下, 簡単のために $\lambda = \sum_{i\in I} m_i \varpi_i \in P$ を非退化優整ウェイトとする, すなわち $m_i \in \mathbb{Z}_{>0}, i \in I$, と仮定する. また原点 $0 \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ から $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ への極小なギャラリー, すなわち連続する小部屋の列

$$\gamma_{\lambda} = \left(\{0\} = \Upsilon'_0 \subset \Upsilon_0 \supset \Upsilon'_1 \subset \Upsilon_1 \supset \cdots \supset \Upsilon'_n \subset \Upsilon_n \supset \Upsilon'_{n+1} = \{\lambda\}\right)$$

であって長さ n が最小なものを一つ固定する. ただし, 各 Υ_k は小部屋で, Υ'_k は隣り合った小部屋の間の壁を表す. A^{+} の閉包 $\overline{A^{+}}$ の壁は I_{af} と一対一に対応する; $i \in I_{\mathrm{af}}$ に対応する壁 $H_i \subset \overline{A^{+}}$ は次のようにして与えられる:

$$H_i = \{h \in \overline{A^{+}} \mid \langle h, \alpha_i \rangle = 0\} \quad (i \in I),$$
$$H_0 = \{h \in \overline{A^{+}} \mid \langle h, \theta \rangle = 1\} \quad (i = 0).$$

各 $1 \le k \le n$ に対して, ある $i_k \in I_{\mathrm{af}}$ が (一意的に) 存在して, ある $x_k \in W_{\mathrm{af}}$ に対して $\Upsilon'_k = x_k(H_{i_k})$ となる. また, $\overline{A^{+}}$ の頂点 $v_{\lambda} \in \overline{A^{+}}$ が (一意的に) 存在して, ある $x \in W_{\mathrm{af}}$ に対して $\lambda = x(v_{\lambda})$ となる.

各 $i \in I_{\mathrm{af}}$ に対して $\langle r_i \rangle = \{1, r_i\} \subset W_{\mathrm{af}}$ (極小放物型部分群) とおき, 次のような W_{af} の部分群 ($\langle r_i \rangle$ に付随するアフィン Weyl 群) を考える:

$$\langle r_i \rangle_{\mathrm{af}} := \begin{cases} \langle r_i \rangle \ltimes \{t_{m\alpha_i} \mid m \in \mathbb{Z}\} & (i \in I), \\ \langle r_0 \rangle \ltimes \{t_{m\theta} \mid m \in \mathbb{Z}\} & (i = 0). \end{cases}$$

上で定めた I_{af} の元の列 $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ に対して, 次の集合を導入する:

$$\Gamma(\gamma_{\lambda}) := W \times \langle r_{i_1} \rangle \times \langle r_{i_2} \rangle \times \cdots \times \langle r_{i_n} \rangle,$$

$$\Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_{\lambda}) := W_{\mathrm{af}} \times \langle r_{i_1} \rangle_{\mathrm{af}} \times \langle r_{i_2} \rangle_{\mathrm{af}} \times \cdots \times \langle r_{i_n} \rangle_{\mathrm{af}}.$$

定義から自然な埋め込み $\Gamma(\gamma_\lambda) \hookrightarrow \Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_\lambda)$ 及び自然な全射 $\Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_\lambda) \twoheadrightarrow \Gamma(\gamma_\lambda)$ が存在することが分かる.

各 $\gamma = [w_0, w_1, \ldots, w_n] \in \Gamma(\gamma_\lambda)$ に対して, $\Sigma_k := w_0 \cdots w_k(A^+)$, $0 \le k \le n$, によって 0 から $\mu := w_0 \cdots w_n(v_\lambda) \in P$ へのギャラリー

$$\left(\{0\} = \Sigma'_0 \subset \Sigma_0 \supset \Sigma'_1 \subset \Sigma_1 \supset \cdots \supset \Sigma'_n \subset \Sigma_n \supset \Sigma'_{n+1} = \{\mu\}\right)$$

が定まる. この対応は単射なので, 以下 $\Gamma(\gamma_\lambda)$ の元をギャラリーと見做す.

次に $\Gamma(\gamma_\lambda) \sqcup \{\mathbf{0}\}$ 上にルート作用素 e_α, f_α, $\alpha \in \{\alpha_i\ (i \in I),\ -\theta\}$, を定める ([GL05, §6]). まず e_α の定義を述べる. 今, $m \in \mathbb{Z}$ をある $0 \le p \le n+1$ について $\Sigma'_p \subset H_{\alpha,m}$ となる最小のものとする. すると $m \le 0$ である. もしも $m = 0$ ならば $e_\alpha \gamma := \mathbf{0}$ と定める. また $m < 0$ のとき, $0 < k \le n+1$ を $\Sigma'_k \subset H_{\alpha,m}$ となる最小のものとし, $\Sigma'_j \subset H_{\alpha,m+1}$ なる最大の $0 \le j < k$ を取る. このとき, $e_\alpha \gamma \in \Gamma(\gamma_\lambda)$ を次で定める:

$$e_\alpha \gamma := (\{0\} \subset \Omega_0 \supset \Omega'_1 \subset \Omega_1 \supset \cdots \supset \Omega'_n \subset \Omega_n \supset \{\mu + \alpha\}),$$

$$\Omega_l := \begin{cases} \Sigma_l & \text{for } l \le j-1, \\ r_{\alpha,m+1}(\Sigma_l) & \text{for } j \le l \le k-1, \\ t_\alpha(\Sigma_l) & \text{for } k \le l. \end{cases}$$

次に f_α の定義を述べる. まず $\langle \mu, \alpha \rangle \ge m$ であることに注意して, もしも $\langle \mu, \alpha \rangle = m$ ならば $f_\alpha \gamma := \mathbf{0}$ と定める. また, $\langle \mu, \alpha \rangle > m$ のとき, $0 \le j < n+1$ を $\Sigma'_j \subset H_{\alpha,m}$ なる最大のものとし, $\Sigma'_k \subset H_{\alpha,m+1}$ なる最小の $j < k \le n+1$ を取る. このとき $f_\alpha \gamma \in \Gamma(\gamma_\lambda)$ を次で定める:

$$f_\alpha \gamma := (\{0\} \subset \Omega_0 \supset \Omega'_1 \subset \Omega_1 \supset \cdots \supset \Omega'_{n-1} \subset \Omega_n \supset \{\mu - \alpha\}),$$

$$\Omega_l := \begin{cases} \Sigma_l & \text{for } l \le j-1, \\ r_{\alpha,m}(\Sigma_l) & \text{for } j \le l \le k-1, \\ t_{-\alpha}(\Sigma_l) & \text{for } k \le l. \end{cases}$$

以下 $e_i := e_{\alpha_i}$, $f_i := f_{\alpha_i}$ $(i \in I)$, $e_0 := e_{-\theta}$, $f_0 := f_{-\theta}$ とし，これらの生成するモノイド $\mathcal{A} := \langle e_i, f_i \mid i \in I \rangle \subseteq \mathcal{A}_{\mathrm{af}} := \langle e_i, f_i \mid i \in I_{\mathrm{af}} \rangle$ を導入する．自然な全射 $\Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_\lambda) \twoheadrightarrow \Gamma(\gamma_\lambda)$ と整合性が取れるように $\Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_\lambda)$ 上にルート作用素 $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ $(i \in I_{\mathrm{af}})$ を定めることが出来る．同様に $\tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{af}} := \langle \tilde{e}_i, \tilde{f}_i \mid i \in I_{\mathrm{af}} \rangle$ とおく．

定義 5.1. $\lambda \in P$ を優整ウェイトとする．

(1) ([GL05]). $\Gamma_{\mathrm{LS}}(\gamma_\lambda) := \{D(\gamma_\lambda) \in \Gamma(\gamma_\lambda) \mid D \in \mathcal{A}\} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(2) $\Gamma_{\mathrm{QLS}}(\gamma_\lambda) := \{D(\gamma_\lambda) \in \Gamma(\gamma_\lambda) \mid D \in \mathcal{A}_{\mathrm{af}}\} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

(3) $\Gamma^{\frac{\infty}{2}}_{\mathrm{LS},0}(\gamma_\lambda) := \{D(\gamma_\lambda) \in \Gamma^{\frac{\infty}{2}}(\gamma_\lambda) \mid D \in \tilde{\mathcal{A}}_{\mathrm{af}}\} \setminus \{\mathbf{0}\}$.

定理 5.2. $\lambda \in P$ を優整ウェイトとする．

(1) ([GL05]). $\mathfrak{g}$ 上の結晶としての同型 $\Gamma_{\mathrm{LS}}(\gamma_\lambda) \cong B(\lambda)$ が成り立つ．

(2) $\mathbf{L}\mathfrak{g}$ 上の結晶としての同型 $\Gamma_{\mathrm{QLS}}(\gamma_\lambda) \cong \mathcal{B}(\lambda)$ が成り立つ．

(3) $\mathfrak{g}_{\mathrm{af}}$ 上の結晶としての同型 $\Gamma^{\frac{\infty}{2}}_{\mathrm{LS},0}(\gamma_\lambda) \cong \underline{\mathcal{B}}_0(\lambda)$ が成り立つ．ただし，右辺は u_λ を含む $\underline{\mathcal{B}}(\lambda)$ の連結成分を表す．

A　Lakshmibai–Seshadri パス

$\lambda \in P$ を優整ウェイトとし，$W^\lambda \cong W/\{w \in W \mid w\lambda = \lambda\}$ を極小代表元全体の集合とする．$J = \{i \in I \mid \langle \alpha_i^\vee, \lambda \rangle = 0\}$ とし，W 上の Bruhat 順序を $\geq$ とすると，W^λ は次のように表すことできる:

$$W^\lambda = \{w \in W \mid wr_\alpha \geq w \text{ for all } \alpha \in \Delta^+ \cap \textstyle\sum_{j \in J} \mathbb{Z}\alpha_j\}.$$

Bruhat 順序に関する cover relation を $w \leftarrow v$ と表す; すなわち，$w \geq v$, $w \neq v$, であって，$w \geq u$ かつ $u \geq v$ なる $u \in W \setminus \{w, v\}$ が存在しないことを表す．このとき，ある $\alpha \in \Delta^+$ が一意的に存在して $w = r_\alpha v$ となることが知られているので，$w \xleftarrow{\alpha} v$ と書くこともある．

定義 A.1 ([Lit95]). (1) $a \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ とする. $v \in W$ から $w \in W$ への (λ に関する) a-chain $w \Leftarrow v$ とは, v から w への列

$$w = x_0 \xleftarrow{\beta_1} x_1 \xleftarrow{\beta_2} \cdots \xleftarrow{\beta_k} x_k = v$$

であって, $a\langle \beta_s^\vee, x_s\lambda \rangle \in \mathbb{Z}$, $1 \leq s \leq k$, を満たすもののことを言う.

(2) $(w_1, w_2, \ldots, w_N) \in (W^\lambda)^N$ が型 λ の LS パスであるとは, 各 (w_s, w_{s+1}), $1 \leq s < N$, に対して (s/N)-chain が存在することである.

$\mathbb{B}(\lambda)$ を型 λ の LS パス全体の集合とする.

B $\mathbb{B}(\lambda)$ 上の結晶構造

$\pi = (w_1, w_2, \ldots, w_N) \in \mathbb{B}(\lambda)$ に対して, $\mathrm{wt}(\pi) := (1/N)\sum_{s=1}^N w_s\lambda$ と定める. α を $\mathfrak{g}$ の単純ルートとし, $e_\alpha\pi, f_\alpha\pi \in \mathbb{B}(\lambda) \sqcup \{\mathbf{0}\}$ を次で定める. ただし, $\mathbf{0}$ は $\mathbb{B}(\lambda)$ に属さない形式的な元である. 今, $m_\alpha := \min\{\langle \alpha^\vee, (1/N)\sum_{s=1}^k w_s\lambda \rangle \mid 0 \leq k \leq N\}$ とおく. $k = 0$ のとき $(1/N)\sum_{s=1}^k w_s\lambda = 0$ であるので, $m_\alpha \leq 0$ であることに注意せよ. もしも, $m_\alpha = 0$ ならば $e_\alpha\pi := \mathbf{0}$ と定める. また, $m_\alpha < 0$ ならば,

$$k_1 := \min\{0 < k \leq N \mid \langle \alpha^\vee, (1/N)\textstyle\sum_{s=1}^k w_s\lambda \rangle = m_\alpha\},$$
$$k_0 := \max\{0 \leq k < k_1 \mid \langle \alpha^\vee, (1/N)\textstyle\sum_{s=1}^k w_s\lambda \rangle = m_\alpha + 1\},$$

が存在することが分かり, これらを用いて $e_\alpha\pi$ を次で定める:

$$e_\alpha\pi := (w_1, \ldots, w_{k_0}, \underbrace{r_\alpha w_{k_0+1}, \ldots, r_\alpha w_{k_1}}_{r_\alpha\text{が作用する}}, w_{k_1+1}, \ldots, w_N) \in \mathbb{B}(\lambda).$$

同様に, $\langle \alpha^\vee, \mathrm{wt}(\pi) \rangle - m_\alpha \geq 0$ に注意して, $m_\alpha = \langle \alpha^\vee, \mathrm{wt}(\pi) \rangle$ ならば, $f_\alpha\pi := \mathbf{0}$ と定める. また, $m_\alpha < \langle \alpha^\vee, \mathrm{wt}(\pi) \rangle$ ならば,

$$l_0 := \max\{0 \leq l < N \mid \langle \alpha^\vee, (1/N)\textstyle\sum_{s=1}^l w_s\lambda \rangle = m_\alpha\},$$

$$l_1 := \min\{l_0 < l \leq N \mid \langle \alpha^\vee, (1/N)\sum_{s=1}^{l} w_s \lambda \rangle = m_\alpha + 1\},$$

が存在することが分かり，これらを用いて $f_\alpha \pi$ を次で定める:

$$f_\alpha \pi := (w_1, \ldots, w_{l_0}, \underbrace{r_\alpha w_{l_0+1}, \ldots, r_\alpha w_{l_1}}_{r_\alpha \text{が作用する}}, w_{l_1+1}, \ldots, w_N) \in \mathbb{B}(\lambda).$$

各単純ルート α に対して，

$$\varepsilon_\alpha(\pi) := -m_\alpha, \qquad \varphi_\alpha(\pi) := \langle \alpha^\vee, \mathrm{wt}(\pi) \rangle - m_\alpha,$$

と定めると，

$$\varepsilon_\alpha(\pi) = \max\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid e_\alpha^n \pi \neq \mathbf{0}\}, \quad \varphi_\alpha(\pi) = \max\{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f_\alpha^n \pi \neq \mathbf{0}\},$$

が成り立つ.

定理 B.1 ([Lit95]). *上で定めた集合及び写像の組* $(\mathbb{B}(\lambda); \mathrm{wt}, e_\alpha, f_\alpha, \varepsilon_\alpha, \varphi_\alpha)$ *(*α *は単純ルート全体を動く) は* $\mathfrak{g}$ *上の結晶となる.*

参考文献

[BN04] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* **123** (2004), 335-402.

[CP01] V. Chari and A. Pressley, Weyl modules for classical and quantum affine algebras, *Represent. Theory* **5** (2001), 191-223.

[GL05] S. Gaussent and P. Littelmann, LS galleries, the path model, and MV cycles, *Duke Math. J.* **127** (2005), 35-88.

[INS14] M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki, Semi-infinite Lakshmibai–Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, arXiv:1402.3884.

[Jos95] A. Joseph, Quantum Groups and Their Primitive Ideals, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete 3 Folge, vol. **29**, Springer-Verlag, Berlin, 1995.

[Kas91] M. Kashiwara, On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras, *Duke Math. J.* **63** (1991), 465-509.

[Kas93] M. Kashiwara, The crystal base and Littelmann's refined Demazure character formula, *Duke Math. J.* **71** (1993), 839-858.

[Kas94] M. Kashiwara, Crystal bases of modified quantized enveloping algebra, *Duke Math. J.* **73** (1994), 383-413.

[Kas96] M. Kashiwara, Similarity of crystal bases, Lie Algebras and Their Representations (Seoul, 1995) (S.-J. Kang, M.-H. Kim, and I. Lee, eds), Contemp. Math., vol. **194**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1996), 177-186.

[Kas02] M. Kashiwara, On level-zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), 117-175.

[Lit95] P. Littelmann, Paths and root operators in representation theory, *Ann. of Math.* **142** (1995), 499-525.

[LNSSS14] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Quantum Lakshmibai–Seshadri paths and root operators, *Advanced Studies in Pure Mathematics* (Mathematical Society of Japan, Tokyo), 2014, to appear, arXiv:1308.3529.