

# Hochschild cohomology of $q$ -Schur algebras

大阪市立大学大学院 理学研究科数物系専攻 塚本真由 \*

Mayu Tsukamoto

Department of Mathematics Graduate School of Science,  
Osaka City University

本稿は RIMS 研究集会「有限群のコホモロジー論とその周辺」の講演内容をまとめたものである.  $q$ -Schur algebra の Hochschild cohomology を quasi-hereditary algebra の Hochschild cohomology の一般論を構成し (§.2), その結果と Chuang-Rouquier と Chuang-Miyachi の定理が使う事が出来る場合に導来同値の応用と具体的計算により求める (§.3).

## 目次

1	準備	1
1.1	導入	2
1.2	記号	2
2	Quasi-hereditary algebra の Hochschild cohomology について	3
2.1	Quasi-hereditary algebra の定義と性質	3
2.2	Hochschild cohomology の定義と性質	4
2.3	Quasi-hereditary algebra の Hochschild cohomology についての一般論	5
3	Hochschild cohomology of $q$ -Schur algebra	9
3.1	$q$ -Schur algebra の定義と性質	9
3.2	主結果	11

## 1 準備

この section では, 本稿の内容の導入と記号の定義を行う.

---

\* m13sa30M19@st.osaka-cu.ac.jp

## 1.1 導入

多元環の Hochschild cohomology は Gerhard Hochschild 氏により 1945 年に導入された。多元環  $A$  の  $n$  次 Hochschild cohomology group は、 $\mathrm{HH}^n(A) := \mathrm{Ext}_{A \otimes A^{\mathrm{op}}}^n(A, A)$  と定義する事が出来、多元環の両側加群としての射影分解により与えられる。しかし一般に多元環の両側加群としての極小射影分解は与えられていない事もあり、Hochschild cohomology を計算する事は困難とされている。群の cohomology と同様に標準分解と呼ばれる射影分解を構成する事は出来るが標準分解の場合は次元が大きくなるので、計算が困難になる。

また、多元環の Hochschild cohomology は「2つの多元環またはその表現がどの程度似ているのか、またはどの程度似ていないのか」を調べるための道具と見ることが出来るので、多元環の表現を知る上で非常に重要な量である。実際多元環  $A$  に対し、 $\mathrm{HH}^*(A) := \bigoplus_{n \geq 0} \mathrm{HH}^n(A)$  とおくと、これは米田積により次数付き代数となり、(これを多元環の Hochschild cohomology ring と言う。) これは多元環に付随する様々な圏の同値に関しての不変量となっている。例えば多元環の Hochschild cohomology ring は表現圏の導来圏の同値のもとで不変である。

$q$ -Schur algebra は有限一般線形群の非等標数での分解行列を記述するために Dipper-James によって 1989 年に導入された代数である。 $q$ -Schur algebra は一般線形量子群の標準的商代数で表される有限次元代数であり、一般線形量子群の有限次元表現論を統制もする重要な代数である。Leclerc-Thibon 予想解決により  $\mathbb{C}$  上の  $q$ -Schur 代数の分解定数が、アフアインの特殊線型量子群の level 1 Fock 空間の大域的基底を LLT アルゴリズムにより求める事で計算出来る事も知られている。近年では有理的 Cherednik 代数の圏  $\mathcal{O}$  との関係も明らかになり、非常に活発な研究領域である。

本稿では、Hochschild cohomology ring が導来不変量であるという事を用いて  $q$ -Schur algebra の Hochschild cohomology を計算したので、その結果について述べる。先行研究として、Benson-Erdmann によって標数 0 の体上の対称群に付随する岩堀-Hecke 環でパラメータ  $q$  が 1 の冪根の場合の Hochschild cohomology が与えられている。本研究はそれの  $q$ -Schur algebra の場合である。先行研究の対称群に付随する岩堀-Hecke 環の場合と異なる点は、quasi-hereditary algebra の Hochschild cohomology についての一般論を構成し、 $q$ -Schur algebra の Hochschild cohomology を統一的に決定出来る事と本研究では even part のある部分代数の環構造まで言及している事である。

## 1.2 記号

この subsection では本稿で用いる記号を導入する。

$S$  を十分大きな (分解) 体  $k$  上の有限次元代数とする。 $S \mathrm{mod}$  を有限生成左  $S$  加群の成す圏、 $\mathrm{mod} S$  を有限生成右  $S$  加群の成す圏とし、 $D^b(S \mathrm{mod})$  を  $S \mathrm{mod}$  の有界導来圏とする。 $\{L(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda^+\}$  を  $S$  の simple module の同型類の完全代表系とする。ここで  $\Lambda^+$  に partial

ordering を1つ固定しておく.  $P(\lambda)$  を simple module  $L(\lambda)$  の projective cover とし,  $I(\lambda)$  を simple module  $L(\lambda)$  の injective hull とする.  $M \in S \text{ mod}$  に対し,  $[M : L(\lambda)]$  を  $M$  の composition multiplicity とする.

## 2 Quasi-hereditary algebra の Hochschild cohomology について

この section では quasi-hereditary algebra と Hochschild cohomology の定義と性質を述べた後に, quasi-hereditary algebra の Hochschild cohomology の一般論について説明する.

### 2.1 Quasi-hereditary algebra の定義と性質

Quasi-hereditary という概念は Cline-Parshall-Scott [CPS88] によって 1988 年に導入された. この subsection では Dlab-Ringel [DR89] に従い, ideal の言葉で復習する.

**Definition 2.1.** (heredity ideal)  $H$  を  $S$  の両側 ideal とする.  $H$  が以下の条件を満たすとき,  $H$  を heredity ideal と呼ぶ.

- $HH = H$ .
- $\text{Hom}_S(H, S/H) = 0$ .
- $HJ(S)H = 0$ , ここで  $J(S)$  は  $S$  の Jacobson radical を表す.

**Definition 2.2.** (quasi-hereditary, 1988)  $S$  が quasi-hereditary algebra であるとは  $S$  が次のようなある両側 ideal の列を持つ時を言う.

$$S = H_0 > H_1 > \cdots > H_i > H_{i+1} > \cdots > H_n = 0.$$

ここで各  $i$  に対して,  $H_i/H_{i+1}$  は  $S/H_{i+1}$  で heredity ideal になる.

この両側 ideal の列のことを  $S$  の heredity chain と呼ぶ.

*Remark 2.3.* Quasi-hereditary algebra  $S$  の大域次元  $\text{gldim } S$  は有限である.

**Example 2.4.**  $A_e := kQ/I$  とする. ここで,

$$Q := (1) \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha(1)} \\ \xleftarrow{\alpha^-(1)} \end{array} \cdots (i-1) \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha(i-1)} \\ \xleftarrow{\alpha^-(i-1)} \end{array} (i) \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha(i)} \\ \xleftarrow{\alpha^-(i)} \end{array} (i+1) \cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha(e-1)} \\ \xleftarrow{\alpha^-(e-1)} \end{array} (e).$$

また path algebra  $kQ$  の両側 ideal  $I$  は次の様に定義される.

$$I := \left\langle \begin{array}{l} \alpha(i)\alpha(i-1), \alpha^-(i-1)\alpha^-(i), \\ \alpha(i-1)\alpha^-(i-1) - \alpha^-(i)\alpha(i) \ (2 \leq i \leq e-1), \alpha(e-1)\alpha^-(e-1). \end{array} \right\rangle.$$

するとこの時,

$$\begin{aligned} A_e &> A_e((2) + (3) + \cdots + (i) + (i+1) + \cdots + (e))A_e > \cdots \\ &\cdots > A_e((j) + \cdots + (e))A_e > \cdots > A_e((e))A_e > 0. \end{aligned}$$

は  $A_e$  の heredity chain となり,  $A_e$  は quasi-hereditary algebra. ( $\text{gldim } A_e = 2(e-1)$ .)

*Remark 2.5.* この  $A_e$  は  $q$ -Schur algebra のある特別な block algebra と森田同値になることが知られており, この代数は後で登場する.

この subsection では以下, standard module 及び costandard module について文献 Donkin [Don98] に従って述べる.

**Definition 2.6** (standard module, costandard module). 各  $\lambda \in \Lambda^+$  に対して,  $K(\lambda)$  は次を満たす  $P(\lambda)$  の極小部分加群とする.

$$[\text{Rad } P(\lambda)/K(\lambda) : L(\mu)] \neq 0 \Rightarrow \lambda > \mu.$$

この時,  $\Delta(\lambda) := P(\lambda)/K(\lambda)$  とし,  $\Delta(\lambda)$  を standard module と呼ぶ.

また各  $\lambda \in \Lambda^+$  に対して,  $\nabla(\lambda)$  を次を満たす  $I(\lambda)$  の極大部分加群とする.

$$[\nabla(\lambda)/L(\lambda) : L(\mu)] \neq 0 \Rightarrow \lambda < \mu.$$

ここで  $\nabla(\lambda)$  を costandard module と呼ぶ.

**Definition 2.7** ( $\Delta$ -filtered module (resp.  $\nabla$ -filtered module)).  $M \in S \text{ mod}$  が次のような部分加群の列を持つとき  $M$  は  $\Delta$ -filtered module (resp.  $\nabla$ -filtered module) という.

$$M = M_0 > M_1 > \dots > M_i > M_{i+1} > \dots > M_n = 0.$$

ここで, 各  $i$  に対して  $M_i/M_{i+1} \cong \Delta(\lambda)$  (resp.  $\nabla(\lambda)$ ) となる  $\lambda \in \Lambda^+$  (これを filtration factor と呼ぶ.) が存在する. この様な部分加群の列の長さは  $M$  の部分加群の取り方に依らず一定で, この長さを  $M$  の filtration length と呼び, 以下  $fl(M)$  と書く.

*Remark 2.8.* Standard module, costandard module の定義から直ちに次のことがわかる.

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda)/\text{Rad } \Delta(\lambda) &\cong L(\lambda), [\text{Rad } \Delta(\lambda) : L(\mu)] \neq 0 \Rightarrow \mu < \lambda. \\ \text{Soc } \nabla(\lambda) &\cong L(\lambda), [\text{Soc } \nabla(\lambda) : L(\mu)] \neq 0 \Rightarrow \mu < \lambda. \end{aligned}$$

これより,  $\{[\Delta(\lambda)] \mid \lambda \in \Lambda^+\}$  (resp.  $\{[\nabla(\lambda)] \mid \lambda \in \Lambda^+\}$ ) は Gothendieck group  $K_0(S \text{ mod})$  の  $\mathbb{Z}$ -basis となる. (ここで,  $[N]$  は  $K_0(S \text{ mod})$  における  $N \in S \text{ mod}$  の同値類を表す.) よって,  $\Delta$ -filtered module (resp.  $\nabla$ -filtered module) の  $\Delta$ -filtration multiplicity (resp.  $\nabla$ -filtration multiplicity) は well-defined である.

## 2.2 Hochschild cohomology の定義と性質

この subsection では Hochschild cohomology の定義と性質を文献 Cartan-Eilenberg [CE56] 及び文献 服部-中山 [服部 57] に従って述べる.

**Definition 2.9** (Hochschild cohomology group).  $K$  を可換環とする.  $K$  上の代数  $R$  に対して,  $R$  の  $n$  次 Hochschild cohomology group が次で定義される:

$$\mathrm{HH}^n(R) := \mathrm{Ext}_{R^{\mathrm{en}}}^n(R, R).$$

ここで,  $R^{\mathrm{en}} := R \otimes_K R^{\mathrm{op}}$  であり,  $R^{\mathrm{en}}$  は両側からの積により  $R$  へ作用している.

**Definition 2.10** (Hochschild cohomology ring).  $K$  を可換環とし,  $R$  を  $K$  上の代数とする.

$$\mathrm{HH}^*(R) := \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{HH}^i(R).$$

この時,  $\mathrm{HH}^*(R)$  は米田積を積として, 次数付き代数となる. この時,  $R$  の Hochschild cohomology ring と呼ばれる.

*Remark 2.11.* Hochschild cohomology ring  $\mathrm{HH}^*(R)$  に対し, 次が成立する.

$$\alpha \in \mathrm{HH}^i(R), \beta \in \mathrm{HH}^j(R) \Rightarrow \alpha\beta = (-1)^{ij}\beta\alpha.$$

**Definition 2.12.**  $R$  を可換環  $K$  上の代数とする. この時,

$$\mathrm{HH}^{\mathrm{ev}}(R) := \bigoplus_{i \geq 0} \mathrm{HH}^{2i}(R).$$

とし, これを Hochschild cohomology ring  $\mathrm{HH}^*(R)$  の even part と呼ぶ.

*Remark 2.13.*  $\mathrm{HH}^{\mathrm{ev}}(R)$  は可換代数である.

**Theorem 2.14** (cf. Happel [Hap87], Rickard [Ric91]).  $\Lambda, \Gamma$  を  $k$  上の有限次元代数とする時, 次が成立する:

$$\mathcal{D}^b(\Lambda \mathrm{mod}) \simeq \mathcal{D}^b(\Gamma \mathrm{mod}) \Rightarrow \mathrm{HH}^*(\Lambda) \cong \mathrm{HH}^*(\Gamma).$$

ここで,  $\mathcal{D}^b(\Lambda \mathrm{mod}) \simeq \mathcal{D}^b(\Gamma \mathrm{mod})$  は  $\Lambda \mathrm{mod}$  の導来圏と  $\Gamma \mathrm{mod}$  の導来圏が三角圏として圏同値である事を表す. 以下, 導来同値と言う.

### 2.3 Quasi-hereditary algebra の Hochschild cohomology についての一般論

この subsection では quasi-hereditary algebra の Hochschild cohomology の間に成立する関係について説明する. 以下,  $S$  は quasi-hereditary algebra と仮定する. まずこの subsection の主定理を述べる.

**Theorem 2.15.**  $H$  を  $S$  の両側 ideal とし,  $H$  が  $S$  のある heredity chain の中に現れるとする. この時, 次の次数付き代数としての全射が存在する:

$$\phi : \mathrm{HH}^*(S) \twoheadrightarrow \mathrm{HH}^*(S/H).$$

*Remark 2.16.* 定理 2.15 は一般の有限次元代数には、反例が存在する。

**Example 2.17.**  $\Lambda := kQ/I$  とする。ここで、 $Q := \gamma_1 \circlearrowleft 1 \begin{matrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{matrix} 2 \circlearrowright \gamma_2$

また path algebra  $kQ$  の両側 ideal  $I$  は次の様に定義される。

$$I := \langle \gamma_i^2 (i = 1, 2), \alpha\gamma_2, \beta\gamma_1, \alpha\beta\alpha, \gamma_2\beta \rangle.$$

この時、 $\Lambda$  の両側 ideal  $\Lambda(2)\Lambda$  を考えると、実はこの場合は  $\mathrm{HH}^*(\Lambda)$  から  $\mathrm{HH}^*(\Lambda/\Lambda(2)\Lambda)$  へ次数付き代数としての全射は存在しない。つまり、定理 2.15 は一般の代数では成立するとは限らない。

*Remark 2.18.* Quasi-hereditary algebra  $S$  に対し、 $S/H$  は再び quasi-hereditary algebra になるが、順序を壊さないように冪等元  $\xi$  を上手く選ぶと  $\xi S \xi$  も quasi-hereditary algebra になる事が知られている。この時定理 2.15 と同様に次の次数付き代数としての全射が存在する。

$$\psi : \mathrm{HH}^*(S) \rightarrow \mathrm{HH}^*(\xi S \xi).$$

この写像は定理 2.22, 定理 2.14, Ringel dual が導来同値を引き起こす事からわかる。 $S$  の Ringel dual を  $S'$  と書くと、 $(\xi S \xi)' \cong S'/H'$  となる  $S'$  の heredity chain に現れる両側イデアル  $H'$  が存在するので、Ringel dual が導来同値を引き起こす事と定理 2.14 から次の同型がわかる。

$$\begin{aligned} \mathrm{HH}^*(\xi S \xi) &\cong \mathrm{HH}^*(S'/H'). \\ \mathrm{HH}^*(S) &\cong \mathrm{HH}^*(S'). \end{aligned}$$

更に定理 2.22 から、次の次数付き代数としての全射が存在する。

$$\mathrm{HH}^*(S') \rightarrow \mathrm{HH}^*(S'/H').$$

以上の議論から、 $\psi$  を構成する事が出来る。

以下、 $H$  を一つ固定して、 $\bar{S} := S/H$  と書くことにする。

2つの関手を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \mathbf{F} : S \text{ mod} &\longrightarrow \bar{S} \text{ mod}. \\ M &\mapsto \bar{S} \otimes_S M \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{\mathrm{en}} : S^{\mathrm{en}} \text{ mod} &\longrightarrow \bar{S}^{\mathrm{en}} \text{ mod}. \\ M &\mapsto \bar{S}^{\mathrm{en}} \otimes_{S^{\mathrm{en}}} M. \end{aligned}$$

定理 2.15 の証明では、 $\mathbf{F}^{\mathrm{en}}$  によって、 $S$  の両側加群としての射影分解を  $S^{\mathrm{en}}$  の両側加群としての射影分解へ移す事を考える。しかし、 $\mathbf{F}^{\mathrm{en}}$  は一般に右完全関手であるが左完全関手であるとは限らない。そこで、 $S$  の両側加群としての射影分解を  $\mathbf{F}^{\mathrm{en}}$  で送った先の複体も再び完全列になる事 (torsion 群が消える事) を示す。そのために補題をいくつか準備する。

**Lemma 2.19** (cf. Cartan-Eilenberg [CE56]).  $\Lambda, \Gamma, \Sigma$  を  $k$  上の代数とする. さらに,  $A \in \text{mod } \Lambda \otimes_k \Sigma$ ,  $B \in \Lambda \text{ mod } \Sigma$ ,  $C \in \Gamma \otimes_k \Sigma \text{ mod}$  に対し,  $\forall n > 0, \text{Tor}_n^\Lambda(A, B) = 0 = \text{Tor}_n^\Sigma(B, C)$ . が成り立つと仮定する. この時, 次が成り立つ.

$$\forall i \geq 0, \text{Tor}_i^{\Lambda \otimes \Sigma}(A \otimes_\Lambda B, C) \cong \text{Tor}_i^{\Lambda \otimes \Gamma}(A, B \otimes_\Sigma C)$$

**Lemma 2.20.**  $X \in \text{mod } \bar{S}, Y \in \bar{S} \text{ mod}$  とすると, 次が成立する.

$$\forall i \geq 0, \text{Tor}_i^S(X, Y) \cong \text{Tor}_i^{\bar{S}}(X, Y).$$

*Remark 2.21.*  $S \rightarrow \bar{S}$  の自然な全射を通して,  $\forall M \in \bar{S} \text{ mod}$  は  $M \in S \text{ mod}$  と見なすことが出来る.

この補題 2.20 の証明は Grothendieck のスペクトル系列の退化による. そこでまず次の主張を文献 谷崎 [谷崎 06] に従って確認する.

**Theorem 2.22** (Grothendieck).  $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$  をアーベル圏,  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  は十分多くの射影的対象を持つとする.  $\Phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  を右完全関手とし,  $\Psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  を加法関手とする.  $\mathcal{A}$  の任意の射影的対象  $P$  に対して,  $\Phi(P)$  は  $\Psi$ -非輪状とする. この時,  $\forall A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  に対してスペクトル系列の  $E^2$  ページは次の様に収束する.

$$E_{p,q}^2 = (\mathbb{L}_p \Psi)(\mathbb{L}_q \Phi)(A) \Rightarrow \mathbb{L}_{p+q}(\Psi \circ \Phi)(A).$$

そこで,  $X \in \text{mod } \bar{S}$  に対し, 次のような関手を定義する.

$$\begin{aligned} \mathbf{G}: \bar{S} \text{ mod} &\rightarrow k \text{ mod} \\ Y &\mapsto X \otimes_{\bar{S}} Y. \end{aligned}$$

すると,  $\mathbf{F}, \mathbf{G}$  は右完全関手で,  $\forall P \in S \text{ proj}$  に対し  $\mathbf{F}(P)$  は  $\mathbf{G}$ -非輪状である. ゆえに, 定理 2.22 からスペクトル系列の収束が得られる. この時スペクトル系列の収束先は,  $\mathbf{G} \circ \mathbf{F} = X \otimes_{\bar{S}} -$  より,  $\text{Tor}_*^S(X, Y)$  となる. 一方,  $E^2$  ページは  $\text{Tor}_p^{\bar{S}}(X, \mathbb{L}_q \mathbf{F}(Y))$  となる. ( $\mathbf{F}$  の  $i$  次左導来関手を  $\mathbb{L}_i \mathbf{F}$  と書く. 但し,  $i = 1$  の時は 1 は省略する.) そこで次を示せば良い.

**Lemma 2.23.** 任意の  $Y \in \bar{S} \text{ mod}$  に対して,  $\forall i > 0, \mathbb{L}_i \mathbf{F}(Y) = 0$ .

補題 2.23 の証明は次の補題と  $i$  及び  $Y$  の composition length についての帰納法による.

**Lemma 2.24.**  $W$  を任意の  $\Delta$ -filtered module とすると, 次が成立する.  $\forall i > 0, \mathbb{L}_i \mathbf{F}(W) = 0$ .

*Proof.*  $i$  と  $W$  の filtration length ( $fl(W)$ ) に関する帰納法で示す.

まず  $i = 1$  の時を  $fl(W)$  に関する帰納法で証明する.

$fl(W) = 1$  の時,  $W \cong \Delta(\lambda)$  となる  $\lambda \in \Lambda^+$  が存在し, 次の短完全列を得る.

$$(2-1) \quad 0 \rightarrow K(\lambda) \rightarrow P(\lambda) \rightarrow \Delta(\lambda) \rightarrow 0.$$

短完全列 (2-1) から次の完全列を得る.

$$0 \rightarrow \mathbf{LF}(\Delta(\lambda)) \rightarrow \mathbf{F}(K(\lambda)) \rightarrow \mathbf{F}(P(\lambda)) \rightarrow \mathbf{F}(\Delta(\lambda)) \rightarrow 0.$$

$\Lambda^+$  には「良い」順序が入っているので, この完全列から  $\mathbf{LF}(\Delta(\lambda)) = 0$  が導かれる.

次に  $fl(W) > 1$  とすると, 次が短完全列になるような  $\lambda \in \Lambda^+$  と  $W$  の剰余加群  $Q$  が存在する.  
(この時,  $fl(Q) = fl(W) - 1$  となる事に注意.)

$$(2-2) \quad 0 \rightarrow \Delta(\lambda) \rightarrow W \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

$\mathbf{LF}(\Delta(\lambda)) = 0$  より, 次の長完全列を得る.

$$0 \rightarrow \mathbf{LF}(W) \rightarrow \mathbf{LF}(Q) \rightarrow \mathbf{F}(\Delta(\lambda)) \rightarrow \mathbf{F}(W) \rightarrow \mathbf{F}(Q) \rightarrow 0.$$

ここで,  $fl(Q) < fl(W)$  なので  $fl(W) > 1$  の時, 主張は示される.

次に  $i > 1$  の時も  $fl(W)$  についての帰納法で示す.

$fl(W) = 1$  の時,  $W \cong \Delta(\lambda)$  となる  $\lambda \in \Lambda^+$  が存在する. この時, 短完全列 (2-1) から次の長完全列を得る.

$$\cdots \rightarrow \mathbb{L}_{i+1}\mathbf{F}(P(\lambda)) \rightarrow \mathbb{L}_{i+1}\mathbf{F}(\Delta(\lambda)) \rightarrow \mathbb{L}_i\mathbf{F}(K(\lambda)) \rightarrow \mathbb{L}_i\mathbf{F}(P(\lambda)) \rightarrow \cdots.$$

この長完全列から  $\mathbb{L}_{i+1}\mathbf{F}(\Delta(\lambda)) \cong \mathbb{L}_i\mathbf{F}(K(\lambda))$  が得られる. 従って, 帰納法の仮定からこの時, 主張は成立する.

更に  $fl(W) > 1$  の時, 短完全列 (2-2) から次の長完全列を得る.

$$\cdots \rightarrow \mathbb{L}_{i+1}\mathbf{F}(\Delta(\lambda)) \rightarrow \mathbb{L}_i\mathbf{F}(W) \rightarrow \mathbb{L}_i\mathbf{F}(Q) \rightarrow \mathbb{L}_i\mathbf{F}(\Delta(\lambda)) \rightarrow \cdots.$$

ゆえに,  $\mathbb{L}_i\mathbf{F}(W) \cong \mathbb{L}_i\mathbf{F}(Q)$  が成り立つから, 帰納法の仮定からこの時も主張は示される.  $\square$

補題 2.20, 補題 2.19 から次の同型を得られる.

$$\begin{aligned} \mathrm{Tor}_i^{S^{\mathrm{en}}}(\bar{S}^{\mathrm{en}}, S) &\cong \mathrm{Tor}_i^S(\bar{S}, \bar{S}^{\mathrm{op}} \otimes_{S^{\mathrm{op}}} S) \\ &\cong \mathrm{Tor}_i^{\bar{S}}(\bar{S}, \bar{S}^{\mathrm{op}} \otimes_{S^{\mathrm{op}}} S). \end{aligned}$$

この同型から, 次が成立する事がわかる.

$$\forall i > 0, \mathrm{Tor}_i^{S^{\mathrm{en}}}(\bar{S}^{\mathrm{en}}, S) = 0.$$

ゆえに, 各  $i$  に対して次の写像を定める事が出来る.

$$\begin{aligned} \phi_i : \mathrm{HH}^i(S) &\rightarrow \mathrm{HH}^i(\bar{S}). \\ [\alpha] &\mapsto [\mathbf{F}^{\mathrm{en}}(\alpha)] \end{aligned}$$

*Remark 2.25.* 各  $\phi_i$  が well-defined である事は,  $\mathbf{F}^{\mathrm{en}}$  が関手である事から従う.



*Remark 2.26.* 各  $\phi_i$  は全射になる.

$\phi := \bigoplus_{i \geq 0} \phi_i$  とおくと, これが定理 2.15 の写像である.

*Remark 2.27.*  $\phi$  が次数付き代数としての準同型になる事は,  $\mathbf{F}^{\text{en}}$  が関手である事と米田積が関手的である事から従う.

### 3 Hochschild cohomology of $q$ -Schur algebra

この section では  $q$ -Schur algebra の Hochschild cohomology についての計算結果について述べる. この section では次の記号を用いる.  $\mathbf{n} := \{1, 2, \dots, n\}$  とし,  $I(n, \mathbf{d}) := \{i = (i_1, i_2, \dots, i_d) \mid j \in \mathbf{d}, i_j \in \mathbf{n}\}$  とする.

Hochschild cohomology の計算は一般に困難とされている. そこで, Hochschild cohomology ring が導来不変量であるという事 (定理 2.14) を用いて,  $q$ -Schur algebra の Hochschild cohomology を直接計算するのではなく, Chuang-Rouquier 及び Chuang-Miyachi の定理から導かれる計算したい代数と導来同値な代数の Hochschild cohomology を計算する事によって,  $q$ -Schur algebra の Hochschild cohomology を計算する.

#### 3.1 $q$ -Schur algebra の定義と性質

この subsection では残りの section の準備として  $q$ -Schur algebra の定義とその性質を文献 Donkin [Don98] 及び文献 Martin [Mar93] に従って述べる.  $q \in k^\times$  とする.  $F(n)$  を  $n^2$  個の非可換な変数  $X_{ij} (1 \leq i, j \leq n)$  で生成される  $k$  上の代数とする.

**Definition 3.1.**  $A_q(n)$  は次の様に定義される  $k$  上の代数とする.

$$A_q(n) := F(n)/J$$

ここで,

$$J = \left\langle \begin{array}{l} X_{ik}X_{jl} - qX_{jl}X_{ik} \ (i > j, k \leq l) \\ X_{ik}X_{jl} - X_{jl}X_{ik} - (q-1)X_{jk}X_{il} \ (i > j, k > l) \\ X_{ik}X_{il} - X_{il}X_{ik} \ (i, l, k \in \mathbf{n}) \end{array} \right\rangle.$$

$F(n)$  から  $A_q(n)$  への自然な全射の  $X_{ij}$  の像を  $c_{ij}$  と書くと,  $A_q(n)$  は  $\{c_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$  で生成され, 次の関係式を満たす.

- $c_{ij}c_{jl} = qc_{jl}c_{ik}. \ (i > j, k \leq l)$
- $c_{ik}c_{jl} = c_{jl}c_{ik} + (q-1)c_{jk}c_{il}. \ (i > j, k > l)$
- $c_{ik}c_{il} = c_{il}c_{ik}. \ (i, l, k \in \mathbf{n})$

この時,  $d \geq 0$  に対して  $F(n, d) := \{rX_{i_1j_1}X_{i_2j_2} \cdots X_{i_dj_d} \mid r \in R, \underline{i}, \underline{j} \in I(n, d)\}$  とすると,

$$F(n) = \bigoplus_{d \geq 0} F(n, d).$$

と書けて,  $F(n)$  は次数付き代数になる.  $J$  は homogeneous で  $\deg = 2$  で生成されるから

$$A_q(n) = \bigoplus_{d \geq 0} A_q(n, d)$$

は次数付き代数となる. ここで,

$$A_q(n, d) := \{rc_{i_1j_1}c_{i_2j_2} \cdots c_{i_dj_d} \mid r \in R, \underline{i}, \underline{j} \in I(n, d)\}.$$

である.  $q$ -Schur algebra を  $A_q(n, d)$  の dual として定義したいので,  $A_q(n, d)$  に余積と余単位射を定める.  $\Delta(X_{ij}) := \sum X_{ik} \otimes X_{kl}$  と定め, これを

$$\Delta : F(n) \rightarrow F(n) \otimes F(n)$$

へ拡張する.

同様に,  $\epsilon(X_{ij}) := \delta_{ij}$  と定めて

$$\epsilon : F(n) \rightarrow k$$

へ拡張する. すると  $\Delta$  と  $\epsilon$  は余積と余単位射になる.

**Theorem 3.2** (Dipper-Donkin [DD91, Lemma 1.4.1]).  $J$  は次の  $F(n)$  の両側 ideal とする.

$J$  を上で定めた  $F(n)$  の両側 ideal とする. 更に,  $\Delta$  及び  $\epsilon$  は上で定めた  $F(n)$  の余積及び余単位射とする. この時, 次が成立する.

$$\epsilon(J) = 0, \Delta(J) \subseteq J \otimes F(n) + F(n) \otimes J.$$

ゆえに  $A_q(n)$  と  $A_q(n, d)$  に対しても,  $\Delta$  及び  $\epsilon$  が well-defined に定まる.

**Definition 3.3** (Dipper-James [DJ89] 1989, Dipper-Donkin [DD91], 1991).

$$\mathcal{S}_q(n, d) := \text{Hom}_k(A_q(n, d), k).$$

とし, 積は  $\Delta^*$  で定める.  $\mathcal{S}_q(n, d)$  を  $q$ -Schur algebra と言う.

*Remark 3.4.* Dipper-James [DJ89] によって  $q$ -Schur algebra が導入された時,  $q$ -Schur algebra は対称群に付随する岩堀-Hecke 環  $\mathcal{H}_{q,d}$  上の加群の直和の End 環として与えられた. その後, Dipper-Donkin [DD91] によって,  $\text{Hom}_k(A_q(n, d), k)$  と同型である事が示された.

*Remark 3.5.*  $n \geq d$  ならば,  $\mathcal{S}_q(d, d)$  と  $\mathcal{S}_q(n, d)$  は森田同値である.

次に,  $q$ -Schur algebra の性質を述べる.

**Theorem 3.6** (Dipper-James [DJ89, Remark 2.10]).  $q$  が 1 の冪根でない  $\Rightarrow \mathcal{S}_q(n, d)$  は半単純.

*Remark 3.7.* 定理 3.6 は,  $q$ -Schur algebra が対称群に付随する岩堀-Hecke 環  $\mathcal{H}_{q,d}$  の End 環として表すことが出来る事 (具体的には, 量子包絡代数 (Lusztig による divided power integral form) の自然表現  $V$  のテンソル空間  $V^{\otimes d}$  に余積を通して定まる量子包絡代数の作用と  $\mathcal{H}_{q,d}$  の作用が定まり, この2つの作用が可換になり,  $\mathcal{S}_q(n, d) = \text{End}_{\mathcal{H}_{q,d}}(V^{\otimes})$  と表すことが出来る.) と,  $q$  が 1 の冪根でないならば  $\mathcal{H}_{q,d}$  が半単純である事からわかる.

**Theorem 3.8** (cf. Parshall-Wang [PW91, Theorem 11.5.2]). 体上の  $q$ -Schur algebra は *quasi-hereditary algebra* になる.

## 3.2 主結果

この subsection では 特に断らない限り  $\text{char}(k) = l$  とし,  $q$  を 1 の冪根とする.  $e := \inf\{i \in \mathbb{Z}_{\geq 2} \mid 1 + q + \dots + q^{i-1} = 0 \text{ in } k.\}$  とする. ( $e$  は量子標数と呼ばれる.)

まずこの subsection で用いる用語の定義を行う.

**Definition 3.9.**  $p, n$  を自然数とする.  $\lambda$  を  $n$  の分割とする.  $\lambda$  に対応する Young 図が  $p$ -hook (長さ  $p$  の hook) を持たない時, 分割  $\lambda$  は  $p$ -core であると言う.

**Example 3.10.**  $(1^2), (2)$  は 3-core な分割である.

**Definition 3.11.**  $p, n$  を自然数とし,  $\lambda$  を  $n$  の分割とする.  $\lambda$  の  $p$ -weight とは, 分割  $\lambda$  に対応する Young 図が  $p$ -core になるまでに取り除く事の出来る  $p$ -hook の数の事を言う. ここで hook を取り除くとは, Young 図から hook を取り除いて, Young 図に隙間が出来てしまう場合は左上に詰めて新しい Young 図を得る事を意味する. (Young 図に隙間が出来ない時は, 単に hook を取り除くだけとする.)

*Remark 3.12.*  $p$ -core は  $p$ -hook の取り除き方に依らない.

次に,  $q$ -Schur algebra の Hochschild cohomology を計算する上で重要な導来同値があるので, それを紹介する.

**Theorem 3.13** (Chuang-Rouquier [CR08, 7.6]+Chuang-Miyachi [CM10, Theorem 18]).  $C$  を  $\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{S}_q(d, d)$  の  $e$ -weight  $w$  の block algebra とする.  $l = 0$  または  $w < l, q \in \mathbb{F}_l$  と仮定する. この時, 次が成立する.

$$\mathcal{D}^b(C \text{ mod}) \simeq \mathcal{D}^b(B_e^{\otimes w} \rtimes k\mathfrak{S}_w \text{ mod})$$

ここで,  $B_e$  は  $q$ -Schur algebra  $\mathcal{S}_q(e, e)$  の determinant 表現を零化しない block algebra (principal block) である.

*Remark 3.14.*  $B_e$  は  $A_e$  (例 2.4) と森田同値である.

**Remark 3.15.** Chuang-Miyachi の定理の技術的な仮定

$l = 0$  または  $l > w$  が本質的な条件という事が Chuang-Miyachi によって予想されている.

定理 3.13 と Hochschild cohomology ring が導来不変量であるという事 (定理 2.14) から次の結果を得る.

**Corollary 3.16.**  $C$  を  $\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{S}_q(d, d)$  の  $e$ -weight  $w$  の block algebra とする.  $l = 0$  または  $w < l, q \in \mathbb{F}_l$  と仮定する. この時, 次の成立する.

$$\mathrm{HH}^*(C) \cong \mathrm{HH}^*(A_e^{\otimes w} \rtimes k\mathfrak{S}_w)$$

**Remark 3.17.**  $q$ -Schur algebra  $\mathcal{S}_q(n, d)$  は  $n < d$  の時, ある冪等元  $\xi$  が存在して次の同型が成立する.

$$\mathcal{S}_q(n, d) \cong \xi \mathcal{S}_q(d, d) \xi.$$

ゆえに定理 2.15 及びその注意から次の次数付き代数としての全射が存在する.

$$\mathrm{HH}^*(\mathcal{S}_q(d, d)) \rightarrow \mathrm{HH}^*(\mathcal{S}_q(n, d)).$$

先の注意でも与えた通り,  $d \leq n$  の時は  $\mathcal{S}_q(d, d)$  と森田同値である. ゆえに,  $\bigoplus_{d \geq 0} \mathcal{S}_q(d, d)$  の block algebra を取れば良い.

系 3.16 から  $A_e^{\otimes w} \rtimes k\mathfrak{S}_w$  に着目し, その Hochschild cohomology の計算を行った. すると  $\mathrm{HH}^*(A_e)$  の環構造は次のようになる.

**Proposition 3.18.**

$$\mathrm{HH}^*(A_e) \cong k[z_1, z_2, \dots, z_{e-1}, x, y]/J$$

ここで,  $\deg z_i = 0, \deg x = 1, \deg y = 2$ . であり,  $J$  は次で与えられる両側 ideal である.

$$J = \langle z_i z_j, z_i x, z_k y, (1 \leq i, j, k \leq e-1) x^2, xy^{e-1}, y^e \rangle.$$

**Remark 3.19.** 命題 3.18 の証明は, 定理 2.15 による. ( $A_e$  は quasi-hereditary algebra になるので定理 2.15 を使うことが出来る.)

概略を述べる. 次の条件を満たす様な  $A_e$  の両側 ideal  $H$  が存在する.

$A_e$  のある heredity chain に現れる.

$$A_{e-1} \cong A_e/H.$$

よって, 定理 2.15 から次の次数付き代数としての全射が存在する.

$$\mathrm{HH}^*(A_e) \rightarrow \mathrm{HH}^*(A_{e-1}).$$

ゆえに, 帰納的に環構造を決定することが出来る.

次にこの結果を  $\mathrm{HH}^n(A_e^{\otimes w} \rtimes k\mathfrak{S}_w)$  まで拡張することを考える。そこで次の結果を用いる。

**Proposition 3.20** (Alev-Farinati-Lambre-Solotar [AFLS00, Proposition 3.1], Etingof-Oblomkov [EO06, Theorem 3.1]).  $k$  の標数を 0 とし,  $\Gamma$  を  $k$  上の代数とする時, 次の同型が成立する。

$$\mathrm{HH}^*(\Gamma^{\otimes w} \rtimes k\mathfrak{S}_w) \cong \bigoplus_{\lambda \in P_w} \bigotimes_{i \geq 1} (\mathrm{HH}^*(\Gamma)^{\otimes p_i(\lambda)})^{\mathfrak{S}_{p_i(\lambda)}}.$$

ここで 右辺は対称群の作用による固定点を表し,  $\lambda$  は  $w$  の分割,  $p_i(\lambda)$  は分割  $\lambda$  の中に  $i$  が出てくる回数を表すとする。

*Remark 3.21.* 定理 3.20 の右辺の対称群の作用は, 置換による作用ではない。次の様な作用を考える。  $V$  を次数付き代数とする。また, この注意の中では,  $x \in V$  に対して  $|x| := \deg x$  と表す事とする。

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n \times V^{\otimes n} &\rightarrow V^{\otimes n}. \\ (\sigma, v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &\rightarrow \sigma.(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) := (-1)^{p_v(\sigma)} v_{\sigma^{-1}(1)} \cdots v_{\sigma^{-1}(n)}. \end{aligned}$$

ここで,  $p_v(\sigma) := \#\{(k, l) \mid |v_k|, |v_l| \text{ は奇数で, } k < l, \sigma(k) > \sigma(l)\}$ . とする。

更に,  $(V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$  には次の積を考える。  $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, y_1 \otimes \cdots \otimes y_n \in (V^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}$  とする。この時,

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = (-1)^s x_1 y_1 \otimes \cdots \otimes x_n y_n.$$

ここで,

$$s := \left( \sum_{i=2}^n |x_i| \right) \left( \sum_{j=1}^{i-1} |y_j| \right) = \sum_{1 \leq j < i \leq n} |x_i| |y_j|.$$

とする。

この結果を用いて Hochschild cohomology ring の even part の部分代数の環構造について考える。

命題 3.18 から,  $\mathrm{HH}^*(A_e)$  の even part は次の様に与えられる。ここで,  $\deg z_i = 0, \deg y = 2$  である。

$$\mathrm{HH}^{\mathrm{ev}}(A_e) = k[z_1, \dots, z_{e-1}, y] / \langle z_i z_j, z_k y (1 \leq i, j, k \leq e-1), y^e \rangle.$$

次の写像を考える。

$$\begin{aligned} \phi : k[z_1, \dots, z_{e-1}, y] / \langle z_i z_j, z_k y, y^e \rangle &\rightarrow k[y] / \langle y^e \rangle. \\ y &\mapsto y. \\ z_i &\mapsto 0. \end{aligned}$$

ここで,  $\mathrm{Ker} \phi = \langle z_i (1 \leq i \leq e-1) \rangle$ . となる。次に  $\phi$  を  $n$  回テンソルした写像を考える。

$$\phi^{\otimes n} : (k[z_1, \dots, z_{e-1}, y] / \langle z_i z_j, z_k y, y^e \rangle)^{\otimes n} \rightarrow (k[y] / \langle y^e \rangle)^{\otimes n}.$$

ここで、テンソル空間は、置換によって  $n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  の作用が入っているので、 $\phi^{\otimes n}$  を  $k\mathfrak{S}_n$  準同型写像とみなす事が出来る。この下で、 $\phi^{\otimes n}$  に関手  $\text{Hom}_{k\mathfrak{S}_n}(k, -)$  をあてると、 $k$  の標数を 0 としていたので、 $\text{Hom}_{k\mathfrak{S}_n}(k, -)$  は完全関手で次の全射を得る。

$$\text{Hom}_{k\mathfrak{S}_n}(k, \phi^{\otimes}) : ((k[z_1, \dots, z_{e-1}, y] / \langle z_i z_j, z_k y, y^e \rangle)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \rightarrow ((k[y] / \langle y^e \rangle)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n}.$$

そこで、次の代数の対称群の作用による固定点を求める。

$$((k[y] / \langle y^e \rangle)^{\otimes n})^{\mathfrak{S}_n} \cong (k[y_1, \dots, y_n] / \langle y_1^e, \dots, y_n^e \rangle)^{\mathfrak{S}_n}.$$

そのために次の自然な全射の核を求める。但し、 $\Lambda_n$  は、 $n$  変数の対称多項式環とする。

$$\begin{aligned} \pi : \Lambda_n &\rightarrow (k[y_1, \dots, y_n] / \langle y_1^e, \dots, y_n^e \rangle)^{\mathfrak{S}_n}. \\ x_i &\mapsto y_i. \end{aligned}$$

この自然な全射  $\pi$  の核は、次の結果から与えられる。

**Theorem 3.22** (Galleto, [Gal10]).  $\Lambda_n$  を  $n$  変数対称多項式環とし、

$$\begin{aligned} \pi : \Lambda_n &\rightarrow (k[y_1, \dots, y_n] / \langle y_1^e, \dots, y_n^e \rangle)^{\mathfrak{S}_n}. \\ x_i &\mapsto y_i. \end{aligned}$$

とする。この時、

$$\text{Ker } \pi = \langle p_{e+1}, \dots, p_{e+n+1} \rangle.$$

ここで、 $p_k$  は  $k$  次の *power sum symmetric function* を表す。

## 参考文献

- [AFLS00] J. Alev, M. A. Farinati, T. Lambre, and A. L. Solotar. Homologie des invariants d'une algèbre de Weyl sous l'action d'un groupe fini. *J. Algebra*, Vol. 232, No. 2, pp. 564–577, 2000.
- [CE56] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological algebra*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1956.
- [CM10] Joseph Chuang and Hyohe Miyachi. Runner removal Morita equivalences. In *Representation theory of algebraic groups and quantum groups*, Vol. 284 of *Progr. Math.*, pp. 55–79. Birkhäuser/Springer, New York, 2010.

- [CPS88] E. Cline, B. Parshall, and L. Scott. Finite-dimensional algebras and highest weight categories. *J. Reine Angew. Math.*, Vol. 391, pp. 85–99, 1988.
- [CR08] Joseph Chuang and Raphaël Rouquier. Derived equivalences for symmetric groups and  $\mathfrak{sl}_2$ -categorification. *Ann. of Math. (2)*, Vol. 167, No. 1, pp. 245–298, 2008.
- [DD91] Richard Dipper and Stephen Donkin. Quantum  $GL_n$ . *Proc. London Math. Soc. (3)*, Vol. 63, No. 1, pp. 165–211, 1991.
- [DJ89] Richard Dipper and Gordon James. The  $q$ -Schur algebra. *Proc. London Math. Soc. (3)*, Vol. 59, No. 1, pp. 23–50, 1989.
- [Don98] S. Donkin. *The  $q$ -Schur algebra*, Vol. 253 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [DR89] Vlastimil Dlab and Claus Michael Ringel. Quasi-hereditary algebras. *Illinois J. Math.*, Vol. 33, No. 2, pp. 280–291, 1989.
- [EO06] Pavel Etingof and Alexei Oblomkov. Quantization, orbifold cohomology, and Cherednik algebras. In *Jack, Hall-Littlewood and Macdonald polynomials*, Vol. 417 of *Contemp. Math.*, pp. 171–182. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [Gal10] F. Galetto. Generators of truncated symmetric polynomials. *ArXiv e-prints*, nov 2010.
- [Hap87] Dieter Happel. On the derived category of a finite-dimensional algebra. *Comment. Math. Helv.*, Vol. 62, No. 3, pp. 339–389, 1987.
- [Mar93] Stuart Martin. *Schur algebras and representation theory*, Vol. 112 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [PW91] Brian Parshall and Jian Pan Wang. Quantum linear groups. *Mem. Amer. Math. Soc.*, Vol. 89, No. 439, pp. vi+157, 1991.
- [Ric91] Jeremy Rickard. Derived equivalences as derived functors. *J. London Math. Soc. (2)*, Vol. 43, No. 1, pp. 37–48, 1991.
- [谷崎 06] 谷崎俊之. 非可換環. 岩波書店, 2006.
- [服部 57] 服部昭, 中山正. ホモロジー代数学. 共立出版, 1957.