数理解析研究所講究録
第 1967 巻 2015 年 68-74

Notes on the Hochschild homology dimension and truncated cycles

板垣　智洋
(Tomohiro Itagaki)
東京理科大学理学研究科
(Department of Mathematics, Tokyo University of Science)

1 Introduction

1989 年, Happel[7] は代数的閉体上の有限次元多元環について, 大域次元が有限であれば, その高次ホッホシルトコホモロジーは全て 0 であるが, 逆は知られていないと注意した. 後に, 代数的閉体上の有限次元多元環の高次のホッホシルトコホモロジー群が全て 0 であれば, その多元環の大域次元が有限であるという主張は Happel's question と呼ばれ, 研究がなされてきたが, [2] で反例が挙げられ, 否定的に解決された. 2006 年には Han[5] によってホッホシルトホモロジー次元が定義され, Happel's question のホモロジー版として, 体上の有限次元多元環 A に対して以下が同値であることが予想されている.

(i) A のホッホシルトホモロジー次元が有限

(ii) A のホッホシルトホモロジー次元が 0

(iii) A の大域次元が有限

特に, monomial algebra に対しては肯定的に解決されているが一般には未解決である. また, この予想は Hochschild homology dimension conjecture と呼ばれている [6].

[3] では多元環のクイバーに着目して, この予想にアプローチされている. 具体的には, m-truncated cycle を導入し, 2-truncated cycle をもつ多元環のホッホシルトホモロジー次元が無限大であることが示されている.

K を体, Q を有限クイバーとし, R_Q を KQ の arrow ideal とする. ここでは, $I \subset R_Q^m$ を満たす有限次元多元環 KQ/I について, それが m-truncated cycle をもつときのホッホシルトホモロジー次元について考察する. この内容は東京理科大学の眞田克典氏との共同研究の内容に基づくものである. 第 2 節では, 多元環のホッホシルトホモロジーとホッホシルトホモロジー次元の定義を述べ, cycle, basic cycle や記号について説明する. 第 3 節では, truncated quiver algebra のホッホシルトホモロジーについて Sköldberg の結果を述べ, 補題を用意する (補題 3.3, 補題 3.4). そして, truncated quiver algebra に対する複体の準同型について述べる. 第 4 節では, $I \subset R_Q^m$ を満たす有限次元多元環 KQ/I が m-truncated cycle をもつとき, そのホッホシルトホモロジー次元が無限大であることを述べる (定理 4.2).

2 Preliminaries

K を可換環とし, A を K 上の多元環とする. このとき, A の Hochschild complex $C(A)$ は次で定義される:

$$\cdots \to A^{\otimes n+1} \xrightarrow{b} A^{\otimes n} \xrightarrow{b} \cdots \xrightarrow{b} A^{\otimes 2} \xrightarrow{b} A \otimes A \xrightarrow{b} A,$$

ただし, $b : A^{\otimes n+1} \to A^{\otimes n}$ は

$$b(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := +\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) + (-1)^n a_n a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}.$$

によって与えられる K-準同型である. A の n 次ホッホシルトホモロジー群 $\mathrm{HH}_n(A)$ は $\mathrm{HH}_n(A) = \mathrm{H}_n(C(A))$ で定義される. また, A が K 上射影的なとき, $\mathrm{HH}_n(A) \cong \mathrm{Tor}_n^{A^e}(A, A)$ である.

K-多元環 A,B に対して, $f : A \to B$ を K-多元環の準同型とすると, f は Hochschild complex の間の準同型を誘導する. すなわち $f^{\otimes n} : A^{\otimes n} \to B^{\otimes n}$ によって与えられる準同型 $\{f^{\otimes n}\}_{n\in\mathbb{N}} : C(A) \to C(B)$ が誘導される. したがって, $f^{\otimes n} : \mathrm{HH}_n(A) \to \mathrm{HH}_n(B)$ も誘導される.

多元環 A に対して, そのホッホシルトホモロジー次元 $\mathrm{HHdim}\, A$ は

$$\mathrm{HHdim}\, A = \sup\{n \in \mathbb{Z} \mid \mathrm{HH}_n(A) \neq 0\}$$

で定義される.

Q を有限クイバーとし, 長さ n の path 全体の集合を Q_n とする. Cycle γ に対して $\gamma = \delta^m$ となる cycle δ と $m \geq 2$ が存在しないとき γ を basic cycle という. 長さ n の cycle 全体の集合を Q_n^{c}, 長さ n の basic cycle 全体の集合を Q_n^{b} とする. Q_n^{c} 上の位数 n の巡回群 $G_n = \langle t_n \rangle$ の作用を $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n \in Q_n^{\mathrm{c}}$ に対して

$$t_n \cdot (\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n) = (\alpha_n\alpha_1\cdots\alpha_{n-1})$$

で与える. 同様に Q_n^{b} も巡回群 $\langle t_n \rangle$ が作用する. Q_n^{c}/G_n の位数を a_n, Q_n^{b}/G_n の位数を b_n とする. 便宜上 $Q_0^{\mathrm{c}}/G_0 = Q_0, Q_0^{\mathrm{b}}/G_0 = Q_0$ とする.

有限クイバー Q に対して, $\hat{Q} = \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_i \cup \{\perp\}$ とする. 以下のように積を定義することによって, $\hat{Q}$ は半群になる:

$$\delta \cdot \gamma = \begin{cases} \delta\gamma & \text{if} \quad t(\delta) = s(\gamma), \\ \perp & \text{otherwise}, \end{cases} \quad \delta, \gamma \in \bigcup_{i=0}^{\infty} Q_i; \quad \perp \cdot \gamma = \gamma \cdot \perp = \perp, \ \gamma \in \hat{Q}.$$

3 Truncated quiver algebra の Hochschild homology

この節では, Sköldberg による truncated quiver algebra のホッホシルトホモロジーについて振り返り, 主結果の証明に必要な補題と複体の準同型について述べる.

Sköldberg は可換環上の truncated quiver algebra A の両側射影分解を次のように与えている.

定理 3.1 ([8, Theorem 1]). K を可換環とし, $A = KQ/R_Q^m$ とする. A の $\hat{Q}$-graded な両側射影分解 $\boldsymbol{P}$ が次で与えられる:

$$\boldsymbol{P}: \cdots \xrightarrow{d_{i+1}} P_i \xrightarrow{d_i} \cdots \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} A \longrightarrow 0.$$

ここで, $P_i (i \geq 0)$ は

$$P_i = A \otimes_{KQ_0} K\Gamma^{(i)} \otimes_{KQ_0} A$$

で定義される. ただし, $\Gamma^{(i)}$ は

$$\Gamma^{(i)} = \begin{cases} Q_{cm} & \text{if } i = 2c\ (c \geq 0), \\ Q_{cm+1} & \text{if } i = 2c+1\ (c \geq 0), \end{cases}$$

とする. また, differential は

$$d_{2c}(\alpha \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{cm} \otimes \beta) = \sum_{j=0}^{m-1} \alpha\alpha_1 \cdots \alpha_j \otimes \alpha_{1+j} \cdots \alpha_{(c-1)m+1+j} \otimes \alpha_{(c-1)m+2+j} \cdots \alpha_{cm}\beta,$$

$$d_{2c+1}(\alpha \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{cm+1} \otimes \beta) = \alpha\alpha_1 \otimes \alpha_2 \cdots \alpha_{cm+1} \otimes \beta - \alpha \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{cm} \otimes \alpha_{cm+1}\beta,$$

で与えられる. ただし, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{cm+1} \in Q_1$ とする. ε: $A \otimes_{KQ_0} KQ_0 \otimes_{KQ_0} A \cong A \otimes_{KQ_0} A \longrightarrow A$ は $\varepsilon(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$. で定義される.

複体 $A \otimes_{A^e} \boldsymbol{P}$ に対して, $A \otimes_{A^e} (A \otimes_{KQ_0} K\Gamma^{(n)} \otimes_{KQ_0} A) \xrightarrow{\sim} A \otimes_{KQ_0^e} K\Gamma^{(n)}$ によって与えられる, $A \otimes_{A^e} \boldsymbol{P}$ と同型な複体 $(A \otimes_{KQ_0^e} K\Gamma^{(n)})_n$ を考える. この複体は

$$A \otimes_{KQ_0^e} K\Gamma^{(n)} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\substack{x\,:\,\text{path} \\ y \in \Gamma^{(n)} \\ xy\,:\,\text{cycle}}} Kx \otimes_{KQ_0^e} y \xrightarrow{\sim} \bigoplus_i \bigoplus_{\bar{\gamma} \in Q_i^c/G_i} \Big(\bigoplus_{xy \in \bar{\gamma}} (Kx \otimes y)\Big)_n$$

によって直和分解されるので, 各 $\mathrm{HH}_p(A)$ は $\mathbb{N}$-graded である. Sköldberg は truncated quiver algebra A について, $\mathrm{HH}_p(A)$ の q 次部分の加群構造を決定している.

定理 3.2 ([8, Theorem 2]). K を可換環, $A = KQ/R_Q^m$ とし, $q = cm + e (0 \leq e \leq m-1)$ とする. A の p 次ホッホシルトホモロジー群の q 次部分は次で与えられる:

$$\mathrm{HH}_{p,q}(A) = \begin{cases} K^{a_q} & \text{if } 1 \leq e \leq m-1 \text{ and } 2c \leq p \leq 2c+1, \\ \bigoplus_{r|q} \left(K^{\ (m,r)-1} \oplus \mathrm{Ker}\left(\cdot\frac{m}{\gcd(m,r)} : K \longrightarrow K\right)\right)^{b_r} & \\ & \text{if } e = 0 \text{ and } 0 < 2c-1 = p, \\ \bigoplus_{r|q} \left(K^{\gcd(m,r)-1} \oplus \mathrm{Coker}\left(\cdot\frac{m}{\gcd(m,r)} : K \longrightarrow K\right)\right)^{b_r} & \\ & \text{if } e = 0 \text{ and } 0 < 2c = p, \\ K^{\#Q_0} & \text{if } p = q = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

この生成元を調べると次が得られる.

補題 3.3. K を体, $A = KQ/R_Q^m$ とする. $\bar{\gamma} \in Q_{cm}^{c}/G_{cm}$ に対して, $\gamma = \alpha_1 \cdots \alpha_{cm}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{cm} \in Q_1)$, とすると,

$$\alpha_{(c-1)m+i+1} \cdots \alpha_{cm}\alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \otimes \alpha_i \cdots \alpha_{(c-1)m+i} \in A \otimes_{KQ_0^e} K\Gamma^{((c-1)m+1)}$$

は $\mathrm{HH}_{2c-1}(A)$ の 0 でない元に対応する. ただし, $d = \gcd(m, \mathrm{per}\,\bar{\gamma})$, $i = 1, 2, \ldots, d-1$ とする.

補題 3.4. K を体, $A = KQ/R_Q^m$ とする. $\bar{\gamma} \in Q_{cm+e}^{c}/G_{cm+e}(1 \leq e \leq m-1)$ に対して, $\gamma = \alpha_1 \cdots \alpha_{cm+e}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{cm+e} \in Q_1)$, とすると,

$$\alpha_{cm+1} \cdots \alpha_{cm+e} \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{cm} \in A \otimes_{KQ_0^e} K\Gamma^{(cm)}$$

は $\mathrm{HH}_{2c}(A)$ の 0 でない元に対応する.

主結果の証明のために, 複体の準同型を用意する. そのために Cibils による bound quiver algebra の両側射影分解 $\boldsymbol{P'}$ を述べ, truncated quiver algebra に対して, Ames, Cagliero, Tirao によって構成された $\boldsymbol{P'}$ から Sköldberg の両側射影分解 $\boldsymbol{P}$ への複体の準同型について紹介する.

補題 3.5 ([4, Lemma 1.1]). K を体, $A = KQ/I$ を bound quiver algebra とし, $J = R_Q/R_Q^m$ を A の根基とする. KQ_0 を Q_0 で生成される A の部分環とする. このとき, A の両側射影分解 $\boldsymbol{P'}$ は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P'} : \cdots \longrightarrow A \otimes_{KQ_0} r^{\otimes^i_{KQ_0}} \otimes_{KQ_0} A \xrightarrow{d_i} A \otimes_{KQ_0} r^{\otimes^{i-1}_{KQ_0}} \otimes_{KQ_0} A \longrightarrow \cdots \\ \longrightarrow A \otimes_{KQ_0} r \otimes_{KQ_0} A \xrightarrow{d_1} A \otimes_{KQ_0} A \xrightarrow{d_0} A \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

で与えられる. ただし, $i \geq 1$ に対して

$$\begin{aligned} d_0(\lambda[\ \ ]\mu) &= \lambda\mu, \\ d_i(\lambda[x_1|\cdots|x_i]\mu) &= \lambda x_1[x_2|\cdots|x_i]\mu + \sum_{j=1}^{i-1}(-1)^i\lambda[x_1|\cdots|x_jx_{j+1}|\cdots|x_i]\mu \\ &\quad + (-1)^i\lambda[x_1|\cdots|x_{i-1}]x_i\mu \end{aligned}$$

である. ここで, $\lambda[x_1|\cdots|x_i]\mu$ は $\lambda \otimes x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \mu$ を表す.

命題 3.6 ([1]). $A = KQ/R_Q^m$ とする. 次で定義される写像 $\pi = \{\pi_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \boldsymbol{P'} \longrightarrow \boldsymbol{P}$ は複体の準同型である. $x_1, x_2, \ldots$ を Q の path とし, その長さをそれぞれ $m_1, m_2, \ldots$ とする. $x_1 = \alpha_1 \cdots \alpha_{m_1}, x_2 = \alpha_{m_1+1} \cdots \alpha_{m_1+m_2}, \ldots$ とする. ただし $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \in Q_1$ とする. このとき, $\pi_n : P'_n \to P_n$ を次で定義する:

$$\pi_0(\alpha[\ \ ]\beta) = \alpha \otimes \beta, \quad \pi_1(\alpha[x_1]\beta) = \sum_{j=1}^{m_1} \alpha\alpha_1 \cdots \alpha_{j-1} \otimes \alpha_j \otimes \alpha_{j+1} \cdots \alpha_{m_1}\beta,$$

$$\pi_{2c}(\alpha[x_1|x_2|\cdots|x_{2c}]\beta) = \begin{cases} \alpha \otimes \alpha_1 \cdots \alpha_{cm} \otimes \alpha_{cm+1} \cdots \alpha_{m_1+\cdots+m_{2c}}\beta \\ \qquad \text{if} \quad m_{2i-1} + m_{2i} \geq m \ (1 \leq i \leq c), \\ 0 \qquad \text{otherwise,} \end{cases}$$

$$
\pi_{2c+1}(\alpha[x_1|x_2|\cdots|x_{2c+1}]\beta)
= \begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{m_1} \alpha\alpha_1\cdots\alpha_{j-1}\otimes\alpha_j\cdots\alpha_{j+cm}\otimes\alpha_{j+cm+1}\cdots\alpha_{m_1+\cdots+m_{2c+1}}\beta & \\ & \text{if} \quad m_{2i}+m_{2i+1}\geq m\ (1\leq i\leq c), \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}
$$

Truncated quiver algebra $A = KQ/R_Q^m$ に対して, 以下の合成で与えられる複体の準同型を $\Phi : C(A) \to (A \otimes_{KQ_0^e} K\Gamma^{(n)})_n$ とする.

$$
\begin{array}{c}
A \otimes_{A^e} P'_n \xleftarrow{\theta} A \otimes_{A^e} (C^{\mathrm{bar}})_n = A \otimes_{A^e} A^{\otimes(n+2)} \xleftarrow{\psi} A^{\otimes(n+1)} \\
\Big\downarrow \mathrm{id}\otimes\pi \\
A \otimes_{A^e} P_n \xrightarrow{\sim} A \otimes_{KQ_0^e} K\Gamma^{(n)},
\end{array}
$$

ただし, ψ は $\psi(a_0 \otimes \cdots \otimes a_n) = a_0 \otimes_{A^e} (1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)$ で与えられる同型であり, θ は $\theta(a_0 \otimes_{A^e} (1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)) = a_0 \otimes_{A^e} [a_1 \otimes \cdots \otimes a_n]$ で与えられる.

主結果の証明では, Φ を用いる.

4 Truncated cycle をもつ多元環のホッホシルトホモロジー次元

この節では, m-truncated cycle を定義し, 体 K 上の多元環 $I \subset R_Q^m$ を満たす KQ/I が m-truncated cycle をもつとき, $\mathrm{HHdim}\, KQ/I = \infty$ であることを述べる.

定義 4.1 ([3]). K を体, m を 2 以上の整数とし, Q を有限クイバーとする. Bound quiver algebra KQ/I に対して, $\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_u$ が cycle となる矢の列 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_u$ で, 全ての $i(1 \leq i \leq u)$ に対して

$$
\alpha_i\cdots\alpha_{i+m-1} = 0, \quad \alpha_i\cdots\alpha_{i+m-2} \neq 0 \quad \text{in } KQ/I
$$

を満たすものを m-truncated cycle という. ただし α の添え字は u を法としている.

定理 4.2. K を体, Q を有限クイバー, m を 2 以上の整数とし, $I(\subset KQ)$ を R_Q^m に含まれるイデアルとする. KQ/I が m-truncated cycle $\alpha_1, \ldots, \alpha_u$ を含むとき, 次が成り立つ:

(i) $\gcd(m, \mathrm{per}(\alpha_1\cdots\alpha_u)) \neq 1$ とする. $un \equiv 0 \pmod m$ を満たす $n \geq 1$ に対して, 元

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{(c-1)m+2}\cdots\alpha_{cm}\otimes\alpha_1\otimes\alpha_2\cdots\alpha_m\otimes\alpha_{m+1} \\
&\quad \otimes\alpha_{m+2}\cdots\alpha_{2m}\otimes\alpha_{2m+1}\otimes\cdots\otimes\alpha_{(c-2)m+2}\cdots\alpha_{(c-1)m}\otimes\alpha_{(c-1)m+1},
\end{aligned}
$$

は $\mathrm{HH}_{2c-1}(KQ/I)$ で 0 でない. ただし, $c = un/m$, α の添え字は u を法とする.

(ii) $e(1 \leq e \leq m-1)$ を整数とする. $un \equiv e \pmod m$ を満たす $n \geq 1$ に対して, 元

$$
\begin{aligned}
\sum_{0\leq j_1,\ldots,j_c\leq m-2} &\alpha_{2c+1+j_1+\cdots+j_c}\cdots\alpha_{un} \\
&\otimes\alpha_1\cdots\alpha_{1+j_1}\otimes\alpha_{2+j_1}\otimes\alpha_{3+j_1}\cdots\alpha_{3+j_1+j_2}\otimes\alpha_{4+j_1+j_2}\otimes\cdots \\
&\quad\otimes\alpha_{2c-1+j_1+\cdots+j_{c-1}}\cdots\alpha_{2c-1+j_1+\cdots+j_c}\otimes\alpha_{2c+j_1+\cdots+j_c},
\end{aligned}
$$

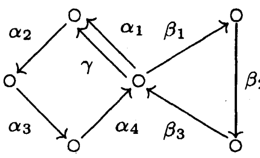
は $\mathrm{HH}_{2c}(KQ/I)$ で 0 でない. ただし, $c=(un-e)/m$, α の添え字は u を法とする.

特に, $\mathrm{HHdim}\,(KQ/I)=\infty$.

証明の概略. (i) $A = KQ/R_Q^m$ とする. 仮定から多元環の自然な全射 $f : KQ/I \to A$ が存在する. $un \equiv 0 \pmod m$ を満たす $n \geq 1$ に対して, $c = un/m$ とする. (i) に書かれている元 $\alpha_{(c-1)m+2}\cdots\alpha_{cm}\otimes\alpha_1\otimes\cdots\otimes\alpha_{(c-2)m+2}\cdots\alpha_{(c-1)m}\otimes\alpha_{(c-1)m+1}\in(KQ/I)^{\otimes 2c}$ を x とし, $x\in\mathrm{Ker}\,b$ と $\Phi f^{\otimes 2c}(x)=\alpha_{(c-1)m+2}\cdots\alpha_{cm}\otimes\alpha_1\cdots\alpha_{(c-1)m+1}$ を示せば, 補題 3.3 から $\Phi f^{\otimes 2c}(x)$ が $\mathrm{HH}_{2c-1}(A)$ の 0 でない元に対応するので, x が $\mathrm{HH}_{2c-1}(A)$ の 0 でない元に対応することがわかる. (ii) も同様にして, 補題 3.4 を用いれば示せる. □

系 4.3. K を体, Q を有限クイバー, m を 2 以上の整数とし, $I(\subset KQ)$ を R_Q^m に含まれる admissible ideal とする. 多元環 KQ/I の大域次元が有限のとき, KQ/I は m-truncated cycle を含まない.

例 4.4. K を体, 以下のクイバーを Q とする:



KQ のイデアル I を $I=\langle\alpha_i\alpha_{i+1}\alpha_{i+2},\beta_1\beta_2\beta_3,\beta_3\gamma\alpha_2,\ \beta_2\beta_3\alpha_1-\beta_2\beta_3\gamma\,|\,i=1,2,3,4\rangle$ とし, $A=KQ/I$ とする. このとき, A は truncated cycle $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ を持つので A の大域次元は無限大である.

参考文献

[1] G. Ames, L. Cagliero and P. Tirao, *Comparison morphisms and the Hochschild cohomology ring of truncated quiver algebras*, J. Algebra 322(5)(2009), 1466–1497.

[2] R.-O. Buchweitz, E. Green, D. Madsen and Ø. Solberg, *Finite Hochschild cohomology without finite global dimension*, Math. Res. Lett. 12 (2005), no. 5-6, 805–816.

[3] P.A. Bergh, Y. Han and D. Madsen, *Hochschild homology and truncated cycles*, Proc. Amer. Math. Soc. (2012), no. 4, 1133–1139.

[4] C. Cibils, *Cohomology of incidence algebras and simplicial complexes*, J. Pure Appl. Algebra 56(3) (1989), 221–232.

[5] Y. Han, *Hochschild (co)homology dimension*, J. Lond. Math. Soc. (2) 73 (2006), no. 3, 657–668.

[6] Y. Han, *A bimodule approach to the strong no loop conjecture*, J. Pure Appl. Algebra, 219 (2015), no. 6, 2139–2143.

[7] D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, in *Séminaire d'Algèbre Paul Dubreil et Marie-Paul Malliavin, 39ème Année (Paris, 1987/1988)*, Lectrue Notes in Mathematics 1404, Springer, Berlin, 1989, 108–126.

[8] E. Sköldberg, *The Hochschild homology of truncated and quadratic monomial algebras*, J. Lond. Math. Soc. (2) 59 (1999), no. 1, 76–86.