数理解析研究所講究録
第 1967 巻 2015 年 138-152

村井正文氏の業績
(On the work of Masafumi Murai)

熊本大学　渡辺アツミ
Kumamoto University　Atumi Watanabe

はじめに. 村井正文氏は 1983 年から 2012 年にかけて 21 編の論文を発表し, 2 編の未発表の論文がある. 23 編の論文は有限群のブロック理論に関する 20 編と有限群論に関する 3 編から成る. 本報告ではブロックに関する論文のうち 17 編を課題に従って分類し解説する :

1. Brauer の $k(B)$-予想　2. 正規部分群のブロックと既約指標の高さ　3. ブロックと部分群　4. Brauer の高さ 0 予想と Alperin-McKay 予想　5. Alperin の重さ予想　6. Dade のブロック拡張 (block extension)　7. 弱 P-radical 加群と P-radical ブロック.

なお, 村井氏の論文リストは本報告の参考文献の後に掲載している. [1], [2] など数字を用いた引用は村井氏の論文リストからのものであり, アルファベットを用いた引用は参考文献からの引用を意味する.

以下の記号をこの報告を通して用いる.

G : 有限群
$(\mathcal{K}, \mathcal{O}, k)$: 十分大きな p-モジュラー系
$\mathfrak{o} := \mathcal{O}$ または k
B : $\mathfrak{o}G$ のブロック
D : B の不足群
$k(B)$: B の既約指標全体 $\mathrm{Irr}(B)$ の濃度
$l(B)$: B の Brauer 既約指標全体 $\mathrm{IBr}(B)$ の濃度
$B_0(G)$: $\mathfrak{o}G$ の主ブロック

1　Brauer の $k(B)$-予想

Brauer の $k(B)$-予想は 1956 年に提起されブロック理論における (多分) 最も古く最も手がつけにくい予想である.

Brauer の $k(B)$-予想 ([B1]) : $k(B) \leq |D|$.

1.1

[2] A note on the number of irreducible characters in a p-block with normal defect group, 1983
[3] A note on the number of irreducible characters in a p-block of a finite group, 1984

Brauer-Feit [BF] による不等式 $k(B) \leq \frac{1}{4}|D|^2 + 1$ はよく知られている. 一方 Brauer の $k(B)$-予想 (以下簡単に $k(B)$-予想と言う) は Nagao [N] によって, p-可解群に対しては $k(GV)$-問題へ帰着された: 任意の基本可換 p-群 V と, V の自己同型群の p'-部分群 G に対しつねに $k(G \ltimes V) \leq |V|$ ならば p-可解群に対して $k(B)$-予想は正しい. ($k(G)$ は G の共役類の個数を表す) [2], [3] では主に p-可解群に対する $k(B)$-予想が研究された. $m(G) = \frac{|G_{p'}|}{|G|_{p'}}$ とおく. $G_{p'}$ は G の p-正則元の全体を表し, $|G|_{p'}$ は位数 $|G|$ の p'-部分である. 氏は [3] において次の予想を提起した.

予想 1 $|G_{p'}| = |G|_{p'}$ ならば G は p-冪零である.

予想 2 $m(G) \geq l(B_0(G))$.

村井氏がデビューの論文 [1] において Frobenius 予想を単純群の場合に帰着させたことは余りに有名である. 予想 1 は Frobenius 予想の特別な場合であり Frobenius 予想はその後有限単純群の分類定理を用いて証明され (Iiyori-Yamaki [IY]), よって予想 1 は正しい. 予想 2 は (ML) と呼ばれる. G が p-可解群のとき, (ML) も $k(GV)$-問題における群 GV へ問題が帰着されることが示されている.

定理 1 (ML) が正しいならば主ブロック $B_0(G)$ に対し $k(B)$-予想は正しい.

定理 2 G は p-可解であるとする. p が G の sectional p-rank より十分大きいならば, G に対して (ML) は正しい.

定理 3 G は p-可解であるとする. B の不足群 D に対し, p が D の sectional rank より十分大きいならば, B に対して $k(B)$-予想は正しい.

[2] では 不足群 D が G で正規ならば定理 3 の結論が成り立つことが示されている. $k(GV)$-問題は有限単純群の分類定理を用いて Gluck- Magaard-Riese-Schmid [GMRS] において証明が完成し, 従って p-可解群に対し $k(B)$-予想は正しい.

1.2

$k(B)$-予想はこの 60 年間 Nagao の還元定理以降 (解決の方向を示すと思われる) 大きな進展はなかった. 但しカルタン行列を用いた $k(B)$ の上限に関する結果や, 特別な場合における予想の検証は得られている. 村井氏は [2], [3] の何年か後に未公表の論文 [23] において (ML) を主ブロックから一般のブロックへ拡張した.

[23] An invariant of Frobenius type associated with blocks of finite groups, 2012, preprint.

f を有限アーベル群 Q に対して有理数 $f(Q)$ を対応させる関数で次を満たすのものとする (f は一意的に決まる).

$$\frac{1}{|Q|} = \sum_{T \leq Q} f(T).$$

$m(G)$ に代わるブロックに対する不変量 $m(B)$ が以下の通り定義される :

$$m(B) = \sum_{(Q,b)} \frac{|D(B)|f(Q)}{|N_G(Q,b) : C_G(Q)|},$$

(Q,b) は Q がアーベル群である B-部分対の共役類の代表元を渡る. この節で B-部分対は G の p-部分群 Q と, B に随伴する $C_G(Q)$ のブロック b の対 (Q,b) を指す. ブロック B の不足群を $D(B)$ で表す.

定理 4 $m(B_0(G)) = m(G)$.

定理 5 次が成り立つ.
(i) $m(B)$ は整数である.
(ii) $\sum_{(u,b_u)} \frac{m(b_u)}{|D(b_u)|} = 1$, 但し (u,b_u) は B-Brauer 元の共役類の代表元を渡る.

予想 3 $m(B) = 1$ ならば B は冪零ブロックである.

予想 4 $m(B) \geq l(B)$.

定理 6 予想 4 が正しいならば $k(B)$-予想は正しい.

予想 3 は予想 1(実際は定理) の拡張であるが, 不足群がアーベル群や正規部分群のブロック, 又は p-可解群のブロックなどに対して正しいことが示されている. 予想 4 は不足群が巡回群のブロックや, 冪零ブロックに対して正しいことが示されている. 村井氏の上述の結果は, 氏の他の文献から 2000 年以前に得られていたことがわかる. 予想 4 が正しければ $m(B) > 0$ であるが, これを示すことが出来なかったと序文に述べられている. このようなことから [23] はプレプリントのまま公表が見送られていたのではないかと推察される.

2 正規部分群のブロックと既約指標の高さ

この節では有限群のブロックと正規部分群のブロックの間の関係について, 既約指標の高さの関係などを考察した村井氏の 90 年代の研究 [4], [5], [7], [8], [14] を取り上げる. 氏を代表する研究である. この節では N を G の正規部分群とし, $\bar{G} = G/N$ とおく.

2.1

[4] Characterizations of p-nilpotent groups, 1994

[5] Block induction, normal subgroups and characters of height zero, 1994

B の既約指標 χ の高さ $\mathrm{ht}(\chi)$ と $\mathfrak{o}G$-格子 U の高さ $\mathrm{ht}(U)$ は以下の通り定義される:

$$p^{\mathrm{ht}(\chi)} = \frac{\chi(1)_p}{|G:D|_p}, \; p^{\mathrm{ht}(U)} = \frac{(\mathrm{rank}_{\mathfrak{o}} U)_p}{|G:D|_p}.$$

$\mathrm{Irr}_0(B)$ を B の高さ 0 既約指標全体とする. $\mathfrak{o}G$-加群 U と N のブロック b に対して, $\mathfrak{o}N$-加群 bU を U_b で表す. 指標についても同様の記号を用いる.

定理 7 b を B によって被覆される N のブロックとする. B に属する高さ 0 の直既約格子 U に対して, U_b のある直既約因子の高さは 0 である. 同様に $\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)$ に対し, χ_b の既約成分の高さは 0 である.

この結果には強い衝撃を受けた. それまでこのような U と U_b の直既約成分との関係に関する結果はなかったからである. 村井氏はこれを始めに (以下に述べる) 定理 8, 25, 26 など高さ 0 の既約指標が持つ独自の性質に注目した. Brauer によって定義されたブロックの核

$$\mathrm{Ker}(B) = \textstyle\bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}(B)} \mathrm{Ker}(\chi), \;\; \text{mod-Ker}(B) = \bigcap_{\phi \in \mathrm{IBr}(B)} \mathrm{Ker}(\phi)$$

に対し, 村井氏は高さ 0 の既約指標の核

$$\mathrm{Ker}_0(B) := \bigcap_{\chi \in \mathrm{Irr}_0(B)} \mathrm{Ker}(\chi)$$

を定義し次を示した.

定理 8 $\mathrm{Ker}(B) \leq \mathrm{Ker}_0(B) \leq \text{mod-Ker}(B)$.

2.2

[7] Normal subgroups and heights of characters, 1996
[8] Blocks of factor groups and heights of characters, 1998

直既約 $\mathfrak{o}G$-加群 V は N への制限 $V\downarrow_N$ が直既約であるとする. G のブロック B は $\bar{G}$ のブロック $\bar{B}$ に属するある $\mathfrak{o}G$-加群 X に対して $V\otimes_{\mathfrak{o}}\mathrm{Inf}(X)$ が B に属するとき, $\bar{B}$ を V-支配するという. V が自明な加群ならば V-支配は通常のブロックの支配である. 村井氏は [7], [8] において V-支配の研究と応用を行った.

定理 9 上記の直既約加群 V は, $V\downarrow_N$ が N のブロック b に属するとする. 次が成り立つ.
(i) B が $\bar{G}$ のブロックを V-支配するための必要十分条件は B が b を被覆することである.
(ii) $\bar{G}$ の任意のブロックは G の唯一のブロックに V-支配される. このとき $\bar{B}$ に属する任意の $\mathfrak{o}\bar{G}$-加群 W に対し, $V\otimes_{\mathfrak{o}}\mathrm{Inf}(W)$ は B に属する.

定理 10 上の定理の仮定の下, G のブロック B は N のブロック b を被覆するとする.
(i) $\bar{B}$ によって V-支配される $\bar{G}$ のブロックのある不足群は DN/N に含まれる.
(ii) $\bar{B}$ によって V-支配される $\bar{G}$ のブロックの中に不足群が DN/N となるものが存在する.

次は定理 7 の後半部分の拡張である.

定理 11
(i) $\chi\in\mathrm{Irr}(B)$ とする. $\chi\downarrow_N$ の既約成分 ξ に対して, $\mathrm{ht}(\xi)\le\mathrm{ht}(\chi)$.
(ii) $\phi\in\mathrm{IBr}(B)$ とする. $\phi\downarrow_N$ の既約成分 ψ に対して, $\mathrm{ht}(\psi)\le\mathrm{ht}(\phi)$.

Robinson [R1] は次を予想した:

$$p^{\mathrm{ht}(\chi)}\le|D:Z(D)|\quad(\forall\chi\in\mathrm{Irr}(B)),$$

但し, 等号が成り立つのは D がアーベル群のときのみである. Robinson 予想は Fong [F] と Watanabe [W] より p-可解群に対して正しい. 次は [8] において V-支配等の応用として得られた.

定理 12 すべての準単純群のすべてのブロックに対して Robinson 予想が正しいならば, すべての有限群に対して Robinson 予想は正しい.

2.3

Murai [14], On extensions of projective indecomposable modules, 2005

次を仮定する: $\bar{G}$ は p-群である. N のブロック b は G-不変で, b の不足群 Q は $N=QC_N(Q)$ を満たすとする. V を b に属する主直既約 $\mathfrak{o}N$-加群 (同型を度外視し一意的に存在する) とする.

[14] では, この仮定の下に, V の G への拡張 U で, U のヴァーテックス P が N と自明に交わるものの存在について考察された. $\bar{G}$ が巡回群ならばそのような U が存在する (定理 14). (なお氏の他の文献によれば, 上の仮定の下に, V の G への拡張は存在する)

定理 13 上の仮定の下に, V の G への拡張 U が存在するとする. P を U のヴァーテックス, W を U の P-ソースとする. 次は同値である.
(i) $P\cap N=1$.
(ii) $U\downarrow_P$ は endo-permutation $\mathfrak{o}P$-加群である.
(iii) W は endo-permutation $\mathfrak{o}P$-加群である.

定理 14 上の仮定の下に, B は b を被覆するとする. さらに $D=QP$ (従って $G=NP$) を満たす N の G における補群 P が存在するとする. このとき, $\bar{G}$ が巡回群ならば V の G への拡張 U で, U のヴァーテックスが P のものが存在する.

3 ブロックと部分群

[9] On subsections of blocks and Brauer pairs, 2000

H を G の部分群, b を H のブロックとする. $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ に対して

$$\sigma(B,b)=\frac{|G:H|\chi_b(1)}{\chi(1)}$$

とおく. $\sigma(B,b)\in\mathcal{O}$ であり, p を法として, χ に依らない. 一方 ω_B を $\mathcal{O}GB$ の中心 $Z(\mathcal{O}GB)$ の一次指標とする. また $d(B)$ を B の不足数, $\mathcal{P}$ を $\mathcal{O}$ の極大イデアルとする.

定理 15 $d(B)\geq d(b)$ と仮定する. 任意の $\chi\in\mathrm{Irr}(B)$ に対して,

$$\frac{|G:H|\chi(a)}{\chi(1)}\equiv\sigma(B,b)\omega_b(a)\pmod{\mathcal{P}}\quad(\forall a\in Z(\mathcal{O}Hb)).$$

さらに, 次は同値である.
(i) $\sigma(B,b)\not\equiv 0 \bmod p$.
(ii) B と b は linked で, B と b は共通の不足群をもつ.

Brauer [B2], II, Isaacs-Scott [IS], Broué [Br], Okuyama [O1] における主要な定理が上の定理から導かれる.

G の p-部分群 P と, 不足群が P で $b_P^G=B$ を満たす $PC_G(P)$ のブロック b_P の対 (P,b_P) を B-部分対とよぶ (2 節における B-部分対とは定義が異なる). B-部分対 (Q,b_Q) に対し $Q\lhd P$ かつ $b_Q^{PC_G(Q)}=b_P^{PC_G(Q)}$ ならば $(Q,b_Q)\lhd(P,b_P)$ と書く. θ_P を b_P の標準指標とする, つまり P 上自明な b_P の既約指標とする.

$$n(P,b_P)=\frac{|PC_G(P)|}{|P|\theta_P(1)}$$

とおく. θ_p は $PC_G(P)/P$ の 不足数 0 の既約指標であるから, $n(P,b_P)$ は p と素な整数である. 次の定理は Brauer [B2], I, (6D) における $(Q,b_Q)\lhd(P,b_P)$ であるための必要条件の改良である.

定理 16 B-部分対 (Q,b_Q), (P,b_P) $(Q\lhd P)$ に対し, $(Q,b_Q)\lhd(P,b_P)$ ならば,

$$(\theta_Q,\theta_P)_{C_G(P)}\equiv\frac{n(P,b_P)}{n(Q,b_Q)}\equiv\pm1 \mod p.$$

上の合同式において左辺は $C_G(P)$ における内積を表す.

4 Brauer の高さ 0 予想と Alperin-McKay 予想

Brauer の高さ 0 予想と Alperin-McKay 予想も大きな予想問題であるがこれらは最近「単純群に対する問題」へ帰着された. これらの研究に村井氏の大きな貢献があった (4.3 参照).

Brauer の高さ 0 予想 ([B1]) : D を不足群とする有限群のブロック B に対して
(AHZ) : D がアーベル群ならば $\mathrm{Irr}(B)=\mathrm{Irr}_0(B)$,

(HZA) : $\mathrm{Irr}(B) = \mathrm{Irr}_0(B)$ ならば D はアーベル群である.

Brauer の高さ 0 予想 は p-可解群に対しては正しい : (AHZ) は Fong [F] により, 一方 (HZA) は Gluck-Wolf [GW] により証明された. (AHZ) は Berger-Knörr [BK] により準単純群へ帰着され, 最近 Kessar-Malle [KM1] により証明は完成した. 村井氏は [5] において [BK] の別証明を与えた. [GW] では次の命題 (GW) が証明され (G/N が p-可解のとき) これから (HZA) が示された.

(GW) : N を 有限群 G の正規部分群, θ を G-不変な N の既約指標とする. θ 上の 任意の G の既約指標 χ について $p \nmid (\chi(1)/\theta(1))$ ならば, G/N の Sylow p-部分群はアーベルである.

Alperin-McKay 予想 (AM) ([A1]) : 有限群のブロック B と, B の Brauer 対応子 B_0 に対して $|\mathrm{Irr}_0(B)| = |\mathrm{Irr}_0(B_0)|$.

(AM) は p-可解群に対しては正しい (Okuyama-Wajima [OW], Dade [D2]).

4.1

[6] A remark on Brauer's height zero conjecture, 1995
[16] On Brauer's height zero conjecture, 2012

[6], [16] の主な結果を挙げる.

定理 17 (AM) がすべての有限群の主ブロックに対して正しく, (HZA) がすべての有限単純群の主ブロックに対して正しいならばすべての有限群の主ブロックに対して (HZA) は正しい.

(HZA) の証明に (AM) が仮定されていることは目をひく所である.

定理 18 次を仮定する : (i) Dade-射影予想は正しい, (ii) (GW) は正しい, (iii) (HZA) は $Z(G)$ が巡回 p'-群である準単純群に対して正しい. このとき (HZA) は正しい.

上の (i) では Dade-射影予想のすべてを必要とするのではなく, Dade-射影予想から導かれる Robinson [R2], 定理 3 のみを必要とする. 一方 (ii) は Navarro-Tiep [NT] より正しい (Navarro より知らされて (ii) は正しいと追記されている). 条件 (iii) も Kessar-Malle [KM2] より正しいことが分かっている. 従って (HZA) の証明には Robinson の定理の検証のみが残ったことになる.

4.2

[13] A remark on the Alperin-McKay conjecture, 2004
[15] On a minimal counterexample to the Alperin-McKay conjecture, 2011

N を G の正規部分群とする. $\chi \in \mathrm{Irr}(B)$ に対して χ の N-高さ $\mathrm{ht}_N(\chi)$ を $\mathrm{ht}_N(\chi) = \mathrm{ht}(\chi) - \mathrm{ht}(\xi)$ で定義する, ξ は $\chi\downarrow_N$ の既約成分である. 定理 11 より $\mathrm{ht}_N(\chi) \geq 0$. $k_0(B,N) = |\{\chi \in \mathrm{Irr}(B) \mid \mathrm{ht}_N(\chi) = 0\}|$ とおく. また任意の整数 $h \geq 0$ に対して $k_0(B,N,h) = |\{\chi \in \mathrm{Irr}(B) \mid \mathrm{ht}_N(\chi) = 0,\ \mathrm{ht}(\chi) = h\}|$ とおく. $N = 1$ ならば $k_0(B,N) = |\mathrm{Irr}_0(B)|$.

定理 19 $\tilde{B}$ を B の $N_G(D)N$ における Brauer 対応子とする. G/N の任意の部分群の任意の中心拡大のブロックに対して (AM) は正しいと仮定する. このとき任意の整数 $h \geq 0$ に対して, $k_0(B,N,h) = k_0(\tilde{B},N,h)$. 特に $k_0(B,N) = k_0(\tilde{B},N)$.

[OW] から, 上の定理は p-可解群に対する (AM) の一般化である. (AM) が, $|H : Z(H)| < |G : Z(G)|$ を満たす G の任意の部分群 H の任意のブロックに対して正しいが, G のブロック B に対しては正しくないとき, (G, B) を (AM) の極小反例 と言う. 定理 19 を用いて次が得られる.

定理 20 (G, B) を (AM) の極小反例とする. このとき,
(i) G の $Z(G)$ に含まれない正規部分群 K に対し, $G = N_G(D)K$.
(ii) G の任意の正規部分群 K に対し, B は G-不変な K のブロックを被覆する.
(iii) $G = N_G(D)F^*(G)$, $F^*(G)$ は G の一般化された Fitting 部分群を表す.

定理 21 (G, B) を (AM) の極小反例とする. このとき,
(i) $O_p(G)$ と $O_{p'}(G)$ は $Z(G)$ に含まれる.
(ii) G の成分の共役類は唯一つである.

4.3

(AM) は Späth [Sp] において単純群へ帰着された : すべての非可換単純群が「帰納的 AM -条件」([Sp], p.176, 定義 7.2 参照) を満たすならば (AM) は正しい. 定理 20, 21 は [Sp] において重要な役割を果たした.

Brauer の高さ 0 予想についても, Navarro-Späth [NS] において, すべての非可換単純群が「帰納的 AM - 条件」を満たすならば (HZA) が正しいことが, 定理 18 を用いて証明された.

5 Alperin の重さ予想

[19] On Alperin's weight conjecture for p-blocks of p-solvable groups, 2013

Q を G の p-部分群, S を $k(N_G(Q)/Q)$-加群として射影的な既約 $kN_G(Q)$- 加群とする. S が $N_G(Q)$ のブロック C に属し, $B = C^G$ ならば (Q, S) を B-重さとよぶ.

Alperin の重さ予想 ((AWC)) ([A2]) : 有限群 G の任意のブロック B に対して, $l(B)$ は B-重さの G-共役類の個数に等しい.

Okuyama [O3] 又は Isaacs-Navarro [IN] より, p-可解群に対して (AWC) は正しい. 実際 [O3] は (AWC) が提起されるより前に得られていた. [O3] ではヴァーテックスを用いて (AWC) より強いことが言えている. Barker [Ba] は Green 対応を用いて [O3] を精密化した. [19] では [Ba] の相対版が得られた.

定理 22 (Barker [Ba] の相対版) N を G の正規部分群, Q を G の p-部分群, b を $N_G(Q)N$ のブロックとする. G/N は p-可解であると仮定する. このとき, ヴァーテックス Q を持ち $(G, Q, N_G(Q)N)$ に関する Green 対応子が b に属する既約 kG-加群の個数は, ヴァーテックス Q を持ち b に属する既約 $kN_G(Q)N$-加群の個数に等しい.

6 Dade のブロック拡張 (block extension)

Dade [D1] はブロックの被覆に関する大変重要な論文である. その中で Dade は所謂 Clifford 拡張 (Clifford extension) の理論をブロックに対して展開したが, 一般的設定で議論されしかも長いため分かりづらい. 村井氏は [D1] において群環の部分が指標論的に解釈できることを示した.

この節では N を有限群 G の正規部分群とし, $\bar{G}=G/N$ とおく. 各 $x \in G$ に対して $\bar{x}=xN$ とおき,

$$\mathfrak{C}_{\bar{x}}=C_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}N)\cap(\mathcal{O}Nx)$$

と定義する, 但し $C_{\mathcal{O}G}(\mathcal{O}N)=\{a\in\mathcal{O}G \mid an=na\ (\forall n\in N)\}$. b を N のブロックとする. b の G における安定部分群を G_b で表し,

$$\bar{G}[b]=\{\bar{x}\in\bar{G} \mid (b\mathfrak{C}_{\bar{x}})(b\mathfrak{C}_{\bar{x}^{-1}})=b\mathfrak{C}_{\bar{1}}\}$$

と定義する. $\bar{G}[b]\lhd G_b/N$ であり, b の被覆は $\bar{G}[b]$ で決まる. b のブロック拡張は k の乗法群 $k^{\times}$ の $\bar{G}[b]$ による中心拡大として定義された. さて Q を b の不足群, φ を Brauer 対応によって b から一意的に決まる $k(QC_N(Q)/Q)$-加群とする. φ を $k(C_N(Q))$-加群と見て, $C_G(Q)\langle\varphi\rangle$ を φ の Clifford 拡張とする. $C_G(Q)\langle\varphi\rangle$ は $k^{\times}$ の $C_G(Q)_{\varphi}/C_N(Q)$ による中心拡大である. $C_G(Q)_{\varphi}$ は φ の $C_G(Q)$ における安定部分群である. $N_N(Q)_{\varphi}$ は共役により $C_G(D)\langle\varphi\rangle$ に作用する. 従って任意の $(\sigma,\tau)\in N_N(Q)_{\varphi}\times\left(C_G(Q)_{\varphi}/C_N(Q)\right)$ 対して $(y_{\tau})^{\sigma}=\omega(\sigma,\tau)y_{\tau}$ となる $\omega(\sigma,\tau)\in k^{\times}$ が存在する. ここで y_{τ} は $C_G(Q)_{\varphi}/C_N(Q)$ における像が τ となる $C_G(Q)\langle\varphi\rangle$ の元である. このようにして得られる双一次形式

$$\omega: N_N(Q)_{\varphi}\times\left(C_G(Q)_{\varphi}/C_N(Q)\right)\to k^{\times}$$

の"右核"を $C_G(Q)_{\omega}/C_N(Q)$ とおく:

$$C_G(Q)_{\omega}/C_N(Q)=\{\tau\in C_G(Q)_{\varphi}/C_N(Q) \mid \omega(\sigma,\tau)=1\ (\forall\sigma\in N_N(Q)_{\varphi})\}.$$

次は [D1] の主定理の一つで $\bar{G}[b]$ の具体的な計算において有用である.

定理 23 (Dade [D1]) 上記の記号の下に, $\bar{G}[b]=C_G(Q)_{\omega}N/N$.

6.1

[20] On blocks of normal subgroups of finite groups, 2013

一般に G の元 x に対し, $\widehat{x^G}$ を x を含む共役類の $\mathcal{O}G$ における類和とする. 以下のように村井氏は $\bar{G}[b]$ の指標論的再定義を与えた.

定理 24 $x\in G$ とする. 上記の記号の下, $b^{(x)}$ を b を被覆する $\langle x,N\rangle$ のブロックとする. このとき, $\bar{x}\in\bar{G}[b]$ となるための必要十分条件は $\omega_{b^{(x)}}(\widehat{y^{\langle x,N\rangle}})\not\equiv 0 \pmod{\mathcal{P}}$ となる $y\in\bar{x}$ が存在することである.

なお Hida-Koshitani [HK] に $\bar{G}[b]$ の加群論的再定義が与えられている. 村井氏は $C_G(Q)_{\omega}$ の再定義も与え, 定理 24 を用いて定理 23 の証明を著しく簡易化した.

6.2

[21] Blocks of normal subgroups, automorphisms of groups and the Alperin-McKay conjecture, 2014

[21] は [20] の続編と言えるものでこちらでは応用に主眼が置かれている. ((AM) が正しいとして) (AM) の興味深い応用などが得られている. N, b は上述のものとする. [21] において次が定義された.

$$S_G^0(b):=\bigcap_{\zeta\in\mathrm{Irr}_0(b)}G_{\zeta}.$$

$\bar{G}[b]$ の G における逆像を $G[b]$ で表す．任意の $\zeta \in \mathrm{Irr}(b)$ に対して $G[b] \subset G_\zeta$, 従って $G[b] \subset S_G^0(b)$ である．b_0 を $N_N(Q)$ における b の Brauer 対応子とする．定理 23 より $G[b] = N_G(Q)[b_0]$.

定理 25 (AM) は正しいと仮定する．上の記号の下 $H = N_G(Q)$ とおくとき，次が成り立つ．

(i) $S_G^0(b) = S_H^0(b_0)N$, $S_G^0(b) \cap H = S_H^0(b_0)$.

(ii) $S_G^0(b)/G[b] \cong S_H^0(b_0)/H[b_0]$.

定理 26 (AM) は正しいと仮定する．このとき，$S_G^0(b)/G[b]$ の Sylow p-部分群は正規部分群である．

半直積群 $G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$ の主ブロックに上の定理を応用して G の自己同型群についての結果が得られている．$\mathrm{Aut}_c(G)$ は G のすべての共役類を不変にする G の自己同型全体がなす群とし $\mathrm{Out}_c(G) = \mathrm{Aut}_c(G)/\mathrm{Inn}(G)$ とおく．

定理 27 (AM) は正しいと仮定する．任意の群 G と任意の素数 p に対して $\mathrm{Out}_c(G)$ の p-length は高々 1 である．

なお Sah [Sa] により $\mathrm{Out}_c(G)$ は可解群である (熊本大学千吉良直紀氏に教えて頂いた).

7 弱 P-radical 加群と P-radical ブロック

[22] On a class of indecomposable modues with trivial source, 2012, preprint

Motose-Ninomiya [MN] で導入された p-radical 群さらに Tsushima [T] で定義された p-radical ブロックの概念は [22] において加群へ一般化された．P を G の p-部分群とする．直既約 kG-加群 U に対し $n_{U,P}$ を $U\downarrow_P$ の直既約成分の個数（重複度も数えて）とする．U のヴァーテックスを $\mathrm{vx}(U)$ で表す．

補題 U を P-射影的直既約 kG-加群とする．次は同値である．

(i) $n_{U,P} = \frac{(\dim U)|\mathrm{vx}(U)|}{|P|}$.

(ii) $U\downarrow_P$ は $U\downarrow_P = \oplus_A (1_A)\uparrow^P$ と表される，但し A は P に含まれる U の ヴァーテックスである．

定義 1 P-射影的直既約 kG-加群 U が上の補題の条件をみたすとき 弱 P-radical であると言う．

定義 2 P を G の p-部分群とする．既約 kG-加群 S は $(1_P)\uparrow^G \simeq mS \oplus V$ と書けるとき，但し m は正の整数で S は V の組成因子でない，P-radical であると言う．

P-radical 既約 kG-加群 S は弱 P-radical であることが示される．

定理 28 P を G の p-部分群，B を G のブロックとする．B のすべての既約加群 S が P-radical であることと，B のすべての既約加群 S が弱 P-radical であることは同値である．

定義 3 G のブロック B が上の定理の条件を満たすとき P-radical であると言う．

定義から B が P-radical であることと，$B((1_P)\uparrow^G)$ が半単純 kG-加群であることは同値である．故に P が G の Sylow p-部分群ならば，B が P-radical であることと，p-radical であることは同値である．Okuyama [O2] より，G の主ブロックが p-radical ならば G は p-可解である．このことが次の定理の証明に使われる．次の定理は Hida-Koshitani [HK], 定理 1.1 の改良である．

定理 29 B を不足群 D の G のブロック, P を D を含む G の Sylow p-部分群とする. 次は同値である.

(i) B は D-radical である.

(ii) 以下を満たす G の p-可解正規部分群 N が存在する : B は N の主ブロック $B_0(N)$ を被覆する, D は N の Sylow p-部分群である, $B_0(N)$ は p-radical である. このとき, $G = N_G(D)N$.

(iii) B は p-radical で, D は G に関して P に強閉である.

(iv) B は p-radical で, D は G に関して P に弱閉である.

(v) B は p-radical で, B に属するある既約 kG-加群 S に対して $D \subset \mathrm{Ker}(S)$.

(vi) B は p-radical で, D は G のある正規部分群 N の Sylow p-部分群である.

参考文献

[A1] J.L. Alperin, The main problem of block theory, Proc. Conf. Finite Groups, (Park City 1975), (1976), 341-356.

[A2] J. L. Alperin, Weights for finite groups, Proc. Arcata Conf., Proc. Symp. Pure. Math., **47**(1987), 369-379.

[Ba] L. Barker, On p-soluble groups and the number of simple modules associated with a given Brauer pair, Quat. J. Math. Oxford (2) **48**(1997), 133-160.

[BK] T. R. Berger and R. Knörr, On Brauer's height 0 conjecture, Nagoya Math. J., **109**(1988), 109-116.

[B1] R. Brauer, Number theoretical investigations on groups of finite order, Proc. Int. Symp. Alg. Number Theory, Tokyo and Nikko, 1955, 55-62, Science Council of Japan, 1956.

[B2] R. Brauer, On blocks and sections in finite groups, I, Amer. J. Math., **89**(1967),1115-1136 ; II, Amer. J. Math., **90**(1968), 895-925.

[BF] R. Brauer and W. Feit, On the number of irreducible characters of finite groups in a given block, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **45**(1959), 361-365.

[Br] M. Broué, Remarks on blocks and subgroups, J. Algebra, **51**(1978), 228-232.

[D1] E. C. Dade, Block extensions, Illinois J.Math., **17**(1973), 198-273.

[D2] E. C. Dade, A correspondence of characters, Proc. Symp. Pure Math., **37**(1980), 401-404.

[F] P. Fong, On the characters of p-solvable groups, Trans. Amer. Math. Soc., **98**(1961), 263-284.

[GMRS] D. Gluck, K. Magaard, U. Riese and P. Schmid, The solution of the $k(GV)$-problem, J. Algebra, **279**(2004), 694-719.

[GW] D. Gluck and T. Wolf, Brauer's height conjecture for p-solvable groups, Trans. A.M.S., **282**(1984), 137-152.

[HK] A. Hida and S. Koshitani, Morita equivalent blocks in non-normal subgroups and p-radical blocks in finite group, J. London Math. Soc., (2) **59**(1999), 541-556.

[IN] I. M. Isaacs and G. Navarro, Weights and vertices for characters of π-separable groups, J. Algebra, **177**(1995), 339-366.

[IS] I. M. Isaacs and L. Scott, Blocks and subgroups, J. Algebra, **20**(1972), 630-636.

[IY] N. Iiyori and H. Yamaki, On a conjecture of Frobenius, Bull. Amer. Math. Soc., **25**(1991), 413-416.

[KM1] R. Kessar and G. Malle, Quasi-isolated blocks and Brauer's height zero conjecture, Ann. Math., **178**(2013), 321-384.

[KM2] R. Kessar and G. Malle, Brauer's height zero conjecture for universal covering groups of simple groups.

[MN] K. Motose and Y. Ninomiya, On the subgroups H of a group G such that $J(KH)KG \supset J(KG)$, Math. J. Okayama, **17**(1975), 171-176.

[N] H. Nagao, On a conjecture of Brauer for p-solvable groups, J. Math. Osaka City Univ., **13**(1962), 35-38.

[NS] G. Navarro and B. Späth, On Brauer's height zero conjecture, J. Europ. Math. Soc. **16**(2014), 695-747.

[NT] G. Navarro and P. H. Tiep, Characters of relative p'-degree over a normal subgroups, Ann. Math., **178**(2013), 1135-1171.

[O1] T. Okuyama, On blocks and subgroups, Hokkaido Math. J., **10**(1981), 555-563.

[O2] T. Okuyama, p-radical groups are p-solvable, Osaka J. Math., **23**(1986), 467-469.

[O3] T. Okuyama, Vertices and irreducible modules of p-solvable groups.

[OW] T. Okuyama and M. Wajima, Character correspondence for p-blocks of p-solvable groups, Osaka J. Math., **17** (1980), 801-806.

[R1] G. R. Robinson, Local structure, vertices and Alperin's conjecture, Proc. London Math. Soc. (3) **72**(1996), 312-330.

[R2] G. R. Robinson, Cancellation theorems related to conjectures of Alperin and Dade, J. Algebra, **249**(2002), 196-219.

[Sa] C. H. Sah, Automorphisms of finite groups, J. Algebra **10**(1968), 47-68 ; Addendum, J. Algebra, **44**(1977), 573-575.

[Sp] B. Späth, A reduction theorem for the Alperin-McKay conjecture, J. reine angew Math., **680**(2013), 153-189.

[T] Y. Tsushima, On p-radical groups, J. Algebra, **103**(1986), 80-86.

[W] A. Watanabe, On Fong's reductions, Kumamoto J. Sci. (Math.), **13**(1979), 48-54.

List of Publications by Masafumi Murai

1. Masafumi Murai, On the Frobenius conjecture, (Japanese) Sûgaku **35** (1983), no.1, 82–84.
2. Masafumi Murai, A note on the number of irreducible characters in a p-block with normal defect group, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **59** (1983), no.10, 488–489.
3. Masafumi Murai, A note on the number of irreducible characters in a p-block of a finite group, Osaka J. Math. **21** (1984), no.2, 387–398.
4. Masafumi Murai, Characterizations of p-nilpotent groups, Osaka J. Math. **31** (1994), no.1, 1–8.
5. Masafumi Murai, Block induction, normal subgroups and characters of height zero, Osaka J. Math. **31** (1994), no.1, 9–25.
6. Masafumi Murai, A remark on Brauer's height zero conjecture, J. Math. Kyoto Univ. **35** (1995), no.4, 607–610.
7. Masafumi Murai, Normal subgroups and heights of characters, J. Math. Kyoto Univ. **36** (1996), no.1, 31–43.
8. Masafumi Murai, Blocks of factor groups and heights of characters, Osaka J. Math. **35** (1998), no.4, 835–854.
9. Masafumi Murai, On subsections of blocks and Brauer pairs, Osaka J. Math. **37** (2000), no.3, 719–733.
10. Masao Kiyota, Masafumi Murai, Tomoyuki Wada, Rationality of eigenvalues of Cartan matrices in finite groups, J. Algebra **249** (2002), no.1, 110–119.
11. Masafumi Murai, On the number of p-subgroups of a finite group, J. Math. Kyoto Univ. **42** (2002), no.1, 161–174.
12. Masafumi Murai, Yugen Takegahara, Hall's relations in finite groups, J. Algebra **271** (2004), no.1, 312–326.
13. Masafumi Murai, A remark on the Alperin-Mckay conjecture, J. Math. Kyoto Univ. **44** (2004), no.2, 245–254.
14. Masafumi Murai, On extensions of projective indecomposable modules, J. Math. Kyoto Univ. **45** (2005), no.2, 221–242.
15. Masafumi Murai, On a minimal counterexample to the Alperin-McKay conjecture, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **87** (2011), no.10, 192–193.
16. Masafumi Murai, On Brauer's height zero conjecture, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **88** (2012), no.3, 38–40.
17. Masafumi Murai, Defect zero characters and relative defect zero characters, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **88** (2012), no.9, 149–151.

18. Masafumi Murai, Simple proofs of some theorems in block theory of finite groups, Osaka J. Math. **49** (2012), no.4, 869–873.

19. Masafumi Murai, On Alperin's weight conjecture for p-blocks of p-solvable groups, J. Math. Soc. Japan, **65** (2013), no.4, 1037–1054.

20. Masafumi Murai, On blocks of normal subgroups of finite groups, Osaka J. Math., **50** (2013), no.4, 1007–1020.

21. Masafumi Murai, Blocks of normal subgroups, automorphisms of groups and the Alperin-McKay conjecture, Kyoto J. Math., **54** (2014), no.1, 199–238.

22. Masafumi Murai, On a class of indecomposable modules with trivial source, April 25, 2012, preprint.

23. Masafumi Murai, An invariant of Frobenius type associated with blocks of finite groups, July 11, 2012, personal communication.

Addendum

大阪大学 全学教育推進機構　宇野勝博
Center for Education in Liberal Arts and Sciences, Osaka University　Katsuhiro Uno

Mr. Masafumi Murai passed away at the age of 62 on the 21st of July, 2012, due to a tragic fire at his home. He graduated from Kyoto University, but never belonged to any university or institute. He did not even enter a graduate school but studied by himself receiving encouragement from some professors at Kyoto University, and published more than twenty academic papers on modular representation theory of finite groups. As far as I know, he never gave a talk or a lecture. Most of us thus never met him, but many mathematicians across the world are interested in his results and some are inspired by them because of his unique and original approaches and results.

Our colleagues thought that we should have an opportunity to look at Murai's works, and asked Professor Atumi Watanabe to give a talk on them at this conference. The organizers kindly accepted our offer and placed her talk as the final lecture of the conference. We expect that our sincere condolences to him and gratitude to his contribution are expressed through her talk and the materials prepared by her, which are found in the proceedings.

We would also like to draw attention to the fact that two of his manuscripts, listed below, have been circulated among us but have never been published.

22. On a class of indecomposable modules with trivial source, April 25, 2012.
23. An invariant of Frobenius type associated with blocks of finite groups, July 11, 2012.

In his manuscripts, the dates of the completion are usually recorded, and he updates them often. So, we never know whether he considered the above manuscripts as final versions. We then carefully read them, compared them with his previous papers, and finally concluded that [22] is probably the pre-final version with sufficiently high quality for publication, but [23] is most likely to have been planned to be further revised. We propose that [22] should be included in the proceedings of the conference. The organizers and The Research Institute of Mathematical Sciences Kyoto University agree with our proposal and thus [22] can be found in this volume. We would like to thank them for their kind considerations. [23] is available only with some of our colleagues. It may be the case that Mr. Murai had more manuscripts in his lost PC, but now nobody knows.

Here I would like to express my heartfelt gratitude to Professors Atumi Watanabe, Masao Kiyota and Tomoyuki Wada for long and profound discussions on the plan, and to Professor Emeritus at Kyoto University Takeshi Hirai for his kind suggestions during the preparation and a comment given after the talk of Professor Watanabe in the conference, which described the days during which he and Mr. Murai communicated by letters and e-mails, and finally and most sincerely to Ms. Tamaki Murai, the younger sister of Mr. Murai, for her kind correspondences to us even on those days when she is in deep grief.

村井正文さんは, 2012 年 7 月 21 日, ご自宅の火災によって 62 歳で他界されました. 村井さんは京都大学理学部ご出身ですが, 大学や研究所には所属されず, 大学院も修了されていません. しかし, 京都大学の先生方の激励のもと独学で勉強され有限群のモジュラー表現論の分野で 20 編を越える学術論文を出版されました. 私の記憶の範囲では, 村井さんは講演を一切されていません. 従って, 村井さんに会った人はほぼいないと言えるでしょう. しかし, 村井さんの論文は類い稀な独創性に満ち, 世界中のこの分野の研究者が注目していました. また, 村井さんの結果に触発された研究者も多いと思

います.

私たちは, 村井さんの結果をまとまった形で見る機会をもつべきであると考え, 渡辺アツミ先生に村井さんの業績についての講演をお願いしました. この研究集会代表者の皆さんは, 私たちの提案を受け入れてくださり, 研究集会の最後の講演が渡辺先生のご講演となりました. 渡辺先生のご講演とこの講究録の記事を心に刻むことで村井さんの死を悼み, これまでのこの分野へのご貢献に感謝したいと思います.

一方, 私たちが共有している村井さんの論文原稿のうち, 2 編 ([22] [23]) は出版されていません. 村井さんの原稿は必ず日付が明記されていて, 村井さんは頻繁に原稿を改訂されていました. 従って, 私たちの手元にある原稿が村井さんにとって最終版であったのかどうかは分かりません. そこで, 私たちは, この原稿を以前の原稿と比較しながら読み, [22] は最終版と考えてよい位に完成しているが [23] はまだ改訂されるおつもりだったのであろうと結論付けました. 研究集会代表者の皆さんと京都大学数理解析研究所には [22] をこの講究録に収録することに同意していただき, [22] は講究録に収録された原稿を読むことができます. 私たちの要望をお聞き入れくださった研究集会代表者の皆さんと京都大学数理解析研究所に感謝致します. [23] については原稿をお持ちの方までお問い合わせください. 村井さんのパソコンには [22] [23] 以外の原稿があったのかも知れませんが, パソコンが焼失した今, 誰にもそれは分かりません.

この計画にあたり繰り返し議論を重ねていただいた渡辺アツミ先生, 清田正夫先生, 和田倶幸先生, 様々な段階でご示唆いただき, また, 研究集会でも村井さんとの交流の様子をお話しいただいた京都大学名誉教授でいらっしゃる平井武先生, さらに最後になりますが, 悲しみのなかにもかかわらず, 私たちからの問い合わせ等に幾度もご丁寧に対応していただいた村井正文さんの妹様である村井たまき様に心より感謝申し上げます.