数理解析研究所講究録
第 1968 巻 2015 年 41-45

一般のリー型のピーターソン多様体の同変コホモロジー環

マクマスター大学　原田　芽ぐみ
Megumi Harada
McMaster University
大阪市立大学大学院理学研究科・日本学術振興会特別研究員 DC　堀口　達也
Tatsuya Horiguchi
Osaka City University and JSPS Research Fellow
大阪市立大学　枡田　幹也
Mikiya Masuda
Osaka City University

1　序文

本稿では, [3] の主結果とその証明の概略について述べる. ピーターソン多様体は旗多様体の部分多様体 (特異点をもつ) で, 旗多様体の量子コホモロジーと関係がありよく研究されている (cf. [5], [6]). これらのトポロジーを研究することは自然なことである. 我々の結果はある 1 次元トーラスの作用に関するピーターソン多様体の同変コホモロジー環の簡明な表示を与えることである. A 型 の場合は, 表示がすでに [2] で与えられているが, 我々の表示は [2] の表示を含むようなものであり, さらにその表示はカルタン行列を用いたリー型によらない一様な表示である. 以下, コホモロジーの係数はすべて $\mathbb{Q}$ とする.

2　A 型ピーターソン多様体とその同変コホモロジー環

A 型ピーターソン多様体は A 型旗多様体

$$Flags(\mathbb{C}^n) := \{V_\bullet = (0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset V_n = \mathbb{C}^n) \mid \dim_{\mathbb{C}} V_i = i, \quad 1 \leq i \leq n\}$$

の部分多様体で次のように定義される. (以下, A 型を省略する.)

定義 2.1 (A 型ピーターソン多様体)
冪零行列でジョルダンブロックを 1 つもつジョルダン標準形 N に対し, ピーターソン多様体 Pet は

$$Pet := \{V_\bullet \in Flags(\mathbb{C}^n) \mid NV_i \subseteq V_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq n-1\}$$

で定義される.

次の n 次元トーラス T を考える.

$$T := \left\{ \begin{pmatrix} g_1 & & & \\ & g_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_n \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \forall g_i \in \mathbb{C}^* \right\}$$

このとき, T は旗多様体 $Flags(\mathbb{C}^n)$ の上に自然な作用があるが, 一般に Pet を保たない. そこで, [4] で導入された Pet を保つような 1 次元部分トーラス $S \subseteq T$ を考える.

$$S := \left\{ \begin{pmatrix} g & & & \\ & g^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & g^n \end{pmatrix} \in T \mid g \in \mathbb{C}^* \right\}$$

定理 2.1 ([2]) $H^*(BS)$-代数として次の同型が成立.

$$H_S^*(Pet;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_{n-1},t]/I.$$

ここに $H^*(BS) = \mathbb{Q}[t]$ と同一視し, I は次のような元で生成されるイデアル:

$$x_i(x_i - \frac{1}{2}x_{i-1} - \frac{1}{2}x_{i+1} - t) \quad (1 \leq i \leq n-1).$$

ただし, $x_0 = x_n = 0$ と約束する.

I の生成元 (厳密には 2 倍したもの) を考察する. それらは次のようにカルタン整数を用いて書ける:

$$x_i(2x_i - x_{i-1} - x_{i+1} - 2t) = \sum_{j=1}^{n-1} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle x_i x_j - 2tx_i$$

ここに $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ はカルタン整数を表す. すなわち, 次の A_{n-1} 型カルタン行列の (i,j) 成分である.

$$A_{n-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

したがって, 定理 2.1 は次のように書き直せる.

$$H_S^*(Pet;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_{n-1},t]/I$$

ここに I は次のような元で生成されるイデアル:

$$\sum_{j=1}^{n-1} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle x_i x_j - 2tx_i \quad (1 \leq i \leq n-1). \tag{2.1}$$

この現象が一般のリー型に対しても正しい, すなわち一般のリー型に対するピーターソン多様体 Pet の同変コホモロジー環が (2.1) の表示で与えられるというのが我々の主結果である.

3 一般のリー型のピーターソン多様体とその同変コホモロジー環

G を階数が n の複素半単純線形代数群とし，G のボレル部分群 B と極大トーラス $T \subseteq B \subseteq G$ を1つ固定する．このとき次が定まる．

- リー環 $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$
- root α に対する root spaces $\mathfrak{g}_\alpha$
- simple roots $\Delta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$
- ワイル群 W

定義 3.1 E_α を the root space $\mathfrak{g}_\alpha$ の基底とし，$N_0 = \sum_{\alpha \in \Delta} E_\alpha$ とする． このとき，

$$Pet := \{gB \in G/B \mid Ad(g^{-1})(N_0) \in \mathfrak{b} \oplus \bigoplus_{\alpha \in -\Delta} \mathfrak{g}_\alpha\}$$

を（$\mathfrak{g}$ に付随する）**ピーターソン多様体** という．

極大トーラス T は旗多様体 G/B に自然に作用するが，一般にピーターソン多様体 Pet を保たない．しかし，$\phi : T \to (\mathbb{C}^*)^n$ を $t \mapsto (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t))$ によって定義された準同型写像とし，1 次元トーラス S を

$$\phi^{-1}(\{(c, c, \ldots, c) \mid c \in \mathbb{C}^*\})$$

の中の単位元を含む連結成分と定めると，G/B 上の T 作用を S に制限したものは Pet を保つ ([4])． この S 作用に関するピーターソン多様体 Pet の同変コホモロジーの簡明な表示を与えることが主定理である．

定理 3.1 ([3]) $H^*(BS)$-代数として次の同型が成立．

$$H_S^*(Pet) \cong \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n, t]/I$$

ここに，$H^*(BS) = \mathbb{Q}[t]$ と同一視し，I は半単純リー環 $\mathfrak{g}$ のカルタン行列 $(\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle)_{1 \le i,j \le n}$ を用いたもので生成されるイデアルである:

$$I := \Big(\sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle x_i x_j - 2t x_i \mid 1 \le i \le n\Big)$$

ピーターソン多様体 Pet の奇数次コホモロジーは消えているので，次の系を得る．

系 3.1 ([3]) $\mathbb{Q}$-代数として次の同型が成立．

$$H^*(Pet) \cong \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]/J$$

ここに，

$$J := \Big(\sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle x_i x_j \mid 1 \le i \le n\Big)$$

4 証明の概略

ピーターソン多様体から旗多様体への包含写像と S から T への包含写像が導く同変コホモロジー環の間の射影

$$\rho : H_T^*(G/B) \to H_S^*(Pet) \tag{4.1}$$

を考える. ワイル群 W の各元に対してシューベルト類と呼ばれる旗多様体の同変コホモロジー環の元 $\sigma_w \in H_T^*(G/B)$ が定まる.

事実 4.1 旗多様体のシューベルト類 $\{\sigma_w\}_{w \in W}$ は $H^*(BT)$-加群として $H_T^*(G/B)$ の基底をなす.

注意 4.1 事実 4.1 は $\mathbb{Z}$ 係数でも成立.

(4.1) の ρ による旗多様体のシューベルト類 σ_w の像を p_w と表し, ピーターソンシューベルト類と呼ぶことにする. $[n] := \{1, 2, ..., n\}$ の部分集合 $K = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ $(1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k \leq n)$ に対して, $v_K \in W$ を

$$v_K = s_{a_1} s_{a_2} \ldots s_{a_k}$$

と定義する. ここに, s_i は simple root α_i に関する simple reflection を表す.

定理 4.1 ([1]) ピーターソンシューベルト類 $\{p_{v_K}\}_{K \subseteq [n]}$ は $H^*(BS)$-加群として $H_S^*(Pet)$ の基底をなす.

事実 4.1 と定理 4.1 から (4.1) の ρ の全射性が分かる.

事実 4.2 旗多様体のシューベルト類 $\{\sigma_{s_i}\}_{i=1}^n$ は $H^*(BT)$-代数として $H_T^*(G/B)$ を生成する.

(4.1) の ρ の全射性と事実 4.2 から次を得る.

系 4.1 ([1]) ピーターソンシューベルト類 $\{p_{s_i}\}_{i=1}^n$ は $H^*(BS)$-代数として $H_S^*(Pet)$ を生成する.

定理 4.1 と系 4.1 より

$$p_{v_K} \cdot p_{s_i} = \sum_{J \subseteq [n]} c_J p_{v_J} \quad (c_J \in \mathbb{Q}[t]) \tag{4.2}$$

$$p_{v_J} = f(p_{s_1}, \ldots, p_{s_n}) \qquad (f(z_1, \ldots, z_n) \in (\mathbb{Q}[t])[z_1, \ldots, z_n]) \tag{4.3}$$

と書けることが分かる. (4.2) と (4.3) の右辺の明示的な式が [1] で与えられている. それらをそれぞれピーターソン多様体に対する Monk formula, Gianbelli formula という. これらを用いて我々は

$$p_{s_i}^2 = tp_{v_{\{i\}}} - \sum_{j \neq i} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle p_{v_{\{i,j\}}} = tp_{s_i} - \sum_{j \neq i} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \frac{1}{2} p_{s_i} p_{s_j}$$

を得る. ここで, 最初の等号は Monk formula を用い, 最後の等号は Gianbelli formula を用いた. $\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle = 2$ であるので, 我々は次の関係式を得る.

$$\sum_{j=1}^{n} \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle p_{s_i} p_{s_j} - 2tp_{s_i} = 0$$

したがって, x_i を p_i に送ることで $\mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n,t]/I$ から $H_S^*(Pet)$ への全射 $\mathbb{Q}[t]$-代数準同型写像

$$\varphi : \mathbb{Q}[x_1,\ldots,x_n,t]/I \to H_S^*(Pet)$$

が得られる. 最後に, 両辺の Hilbert 級数が一致することを示し, φ が同型であることを得る.

参考文献

[1] E. Drellich, *Monk's rule and Giambelli's formula for Peterson varieties of all Lie types*, Algebraic Combin. 41 (2015), no. 2, 539-575.

[2] Y. Fukukawa, M. Harada and M. Masuda, *The equivariant cohomology rings of Peterson varieties*, J. Math. Soc. of Japan (to appear), arXiv:1310.8643.

[3] M. Harada, T. Horiguchi and M. Masuda, *The equivariant cohomology rings of Peterson varieties in all Lie types*, Canad. Math. Bull. 58 (2015), no. 1, 80-90.

[4] M. Harada and J. Tymoczko, *Poset pinball, GKM-compatible subspaces, and Hessenberg varieties*, arXiv:1007.2750.

[5] B. Kostant, *Flag manifold quantum cohomology, the Toda lattice, and the representation with highest weight ρ*, Selecta Math. (N.S.) 2 (1996), no. 1, 43–91.

[6] K. Rietsch, *Totally positive Toeplitz matrices and quantum cohomology of partial flag varieties*, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), no. 2, 363–392 (electronic).