数理解析研究所講究録
第 1968 巻 2015 年 81-90

グラフの彩色数の変種とグラフから定まる複体の位相

大阪大学大学院理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Graduate school of Sience, Osaka University

1 序

グラフの彩色数は 4 色問題とも関連し, よく知られた概念である. Kneser グラフの彩色数は, Lovász により近傍複体および Borsuk-Ulam の定理を用いることにより調べられた ([8]). グラフと Borsuk-Ulam の定理を関係づける研究は, その後, 箱複体などを用いて整理されていて, Matoušek による解説などがある ([9]).

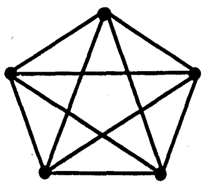
彩色数については, 多重彩色や条件をつけた彩色などのいくつかの変種が考えられており, それらについての研究も多い. 本稿では, その中で分数彩色数 (fractional chromatic number) と円彩色数 (circular chromatic number) を紹介する. 特に, 円彩色数について, 箱複体を用いた考察をする. Kneser グラフ $KG_{n,k}$ の円彩色数 $\chi_c(KG_{n,k})$ については, Johnson, Holroyd, Stahl が [6] において $\chi_c(KG_{n,k}) = \chi(KG_{n,k})$ を予想し, Chen が [3] で証明したが (その後 [2] で少しやさしい証明がされた), それに至るまで Borsuk-Ulam の定理に関係する定理を用いた手法では n が偶数の場合しか証明できなかった. 4 節で n が偶数のとき $\chi_c(KG_{n,k}) = \chi(KG_{n,k})$ の箱複体を用いた証明を与え, n が奇数の場合に同様にはできないことを見る.

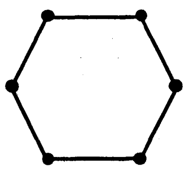
2 グラフの彩色数と Borsuk-Ulam の定理

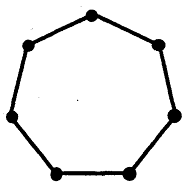
2.1 グラフと彩色数

以下では, 頂点集合 V と辺集合 E からなる $G = (V, E)$ をグラフと呼ぶ. ここで, V は空でない有限集合であり, E は V の異なる 2 点からなる集合を要素として持つようなものである. これは通常, 多重辺とループがない単純グラフと呼ばれるものである. グラフ G の頂点集合を $V(G)$ と書き, 辺集合を $E(G)$ と書くこともある. また, n を自然数とするとき, $[n]$ により n 以下の自然数全体の集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ を表すことにする. グラフ $G = (V, E)$ に対して, $c\colon V \to [n]$ が $\{u, v\} \in E$ ならば $c(u) \neq c(v)$ を満たすとき, c を**彩色** (coloring) という. また, 彩色 $c\colon V \to [n]$ が存在するような最小の n を**彩色数** (chromatic number) といい, $\chi(G)$ により表すことにする.

どの 2 つの頂点も隣接している（辺で結ばれている）グラフを**完全グラフ**とよび, 頂点の個数が n 個の完全グラフを K_n で表すことにする. 容易にわかるように $\chi(K_n) = n$ である. また, 頂点が n 個でどの頂点も次数（その頂点に接続している編の個数）が 2 であるような連結グラフを**閉路グラフ**と呼び C_n と書くことにする.


K_5


C_6


C_7

C_n の彩色数は, n が偶数のときは 2 であり, n が奇数のときは 3 である.

2.2 グラフの箱複体と近傍複体

以下では $G = (V, E)$ は 2 つ以上の頂点がある連結なグラフとし, その彩色数と関係する箱複体について述べよう. $A_1, A_2 \subset V$ に対して, $V \times \{1,2\}$ の部分集合 $A_1 \uplus A_2$ を

$$A_1 \uplus A_2 = A_1 \times \{1\} \cup A_2 \times \{2\}$$

により定義する. また, V の部分集合 A に対して, V の部分集合 $CN(A)$ を

$$CN(A) := \{v \mid \{v, a\} \in E \text{ for } \forall a \in A\} \, (\subset V)$$

により定義する. $V \times \{1,2\}$ の部分集合族からなる単体複体 $B(G)$ を

$$\begin{aligned} B(G) := \{A_1 \uplus A_2 \mid\ & A_1, A_2 \subset V,\ A_1 \cap A_2 = \emptyset, \\ & \{u, v\} \in E \text{ for } \forall u \in A_1, \forall v \in A_2, \\ & CN(A_1) \neq \emptyset,\ CN(A_2) \neq \emptyset \quad \} \end{aligned}$$

により定義する. ここで, $CN(A_1) \neq \emptyset$, $CN(A_2) \neq \emptyset$ は $A_1 = \emptyset$ または $A_2 = \emptyset$ のときのための条件である. $T \colon B(G) \to B(G)$ を $A_1 \uplus A_2 \mapsto A_2 \uplus A_1$ により定義すると, $T^2 = \mathrm{id}$ であり, T が不動点を持たないことは容易にわかる.

例 (K_n の箱複体)**.** $B(K_n)$ の頂点集合は $\{1\} \uplus \emptyset, \{2\} \uplus \emptyset, \ldots, \{n\} \uplus \emptyset, \emptyset \uplus \{1\}, \ldots, \emptyset \uplus \{n\}$ であり, 極大な単体は, $A \cup B = [n]$, $A \cap B = \emptyset$, $A \neq [n]$, $B \neq [n]$ であるような $[n]$ の部分集合 A, B を用いて $A \uplus B$ と書かれるものである.

頂点 $\{i\} \uplus \emptyset$ に対して $\boldsymbol{R}^n$ の $(0, \ldots, 0, \overset{i\,\text{番目}}{1}, 0, \ldots, 0)$ を対応させ, $\emptyset \uplus \{i\}$ に対して $\boldsymbol{R}^n$ の $(0, \ldots, 0, \overset{i\,\text{番目}}{-1}, 0, \ldots, 0)$ を対応させることにより, $|B(K_n)|$ は n 次元 cross polytope の境界部分から 2 つの面 $[n] \uplus \emptyset$, $\emptyset \uplus [n]$ を取り除いたものになる. このことから $|B(K_n)|$ は S^{n-2} に $\boldsymbol{Z}_2$ ホモトピー同値であることがわかる.

次に, グラフ準同型とそれから得られる箱複体の間の写像について説明する. G, H を単純グラフとするとき, $f \colon V(G) \to V(H)$ が $\{u, v\} \in E(G)$ であれば常に $\{f(u), f(v)\} \in E(H)$ を満たすとき, f を G から H への**グラフ準同型**という. グラフ準同型を $f \colon G \to H$ とも書く. グラフ準同型 $f \colon G \to H$ は, 単体写像

$$B(f) \colon B(G) \to B(H),\ A_1 \uplus A_2 \mapsto f(A_1) \uplus f(A_2)$$

を導く. また, この単体写像は $\boldsymbol{Z}_2$ 写像になっている.

$\chi(G) = n$ であることは, G から K_n へのグラフ準同型が存在し, G から K_{n-1} へのグラフ準同型が存在しないということに他ならない. したがって, $\chi(G) = n$ であるとき, 彩色に対応するグラフ準同型 $G \to K_n$ より $|B(G)|$ から $|B(K_n)|$ への $\boldsymbol{Z}_2$ 写像が誘導され, $|B(K_n)|$ は S^{n-2} に $\boldsymbol{Z}_2$ ホモトピー同値である.

$\boldsymbol{Z}_2$-空間 X に対して, $\boldsymbol{Z}_2$-index $\mathrm{Ind}_{\boldsymbol{Z}_2} X$ を

$$\mathrm{Ind}_{\boldsymbol{Z}_2} X = \min\{n \in \boldsymbol{N} \mid \boldsymbol{Z}_2\text{-写像 } X \to S^n \text{ が存在する}\}$$

と定義すると, 上の考察より次のことがわかる.

定理 2.1. $\chi(G) \geqq \mathrm{Ind}_{\boldsymbol{Z}_2}|B(G)| + 2.$

以下では $\mathrm{Ind}_{\boldsymbol{Z}_2}|B(G)|$ を $\mathrm{Ind}_{\boldsymbol{Z}_2}B(G)$ と書くことにする. G の彩色数と関係する $\boldsymbol{Z}_2$-index 以外の位相幾何的な道具についても以下で紹介しておこう.

$\boldsymbol{Z}_2$ が自由に作用するような位相空間 X で, $X/\boldsymbol{Z}_2$ が弧状連結であるようなものに対して, 被覆 $X \to X/\boldsymbol{Z}_2$ の Stiefel-Whitney 類 $w(X)$ を用いて Stiefel-Whitney height $h(X)$ を

$$h(X) := \max\{n \mid w(X)^n \neq 0\}$$

により定義する. ただし, X が弧状連結でないときには, $h(X) = 0$ と定義することにする. また, $\boldsymbol{Z}_2$-coindex を

$$\mathrm{coind}_{\boldsymbol{Z}_2}X = \max\{n \mid \exists\ \boldsymbol{Z}_2\text{-map } f\colon S^n \to X\}$$

により定義する. $\boldsymbol{Z}_2$-index, $\boldsymbol{Z}_2$-coindex, Stiefel-Whitney height $h(X)$ については, [5] にもその性質を書いているが, 以下で本稿に必要な性質を述べておこう. まず, これらの不変量について,

$$\mathrm{coind}_{\boldsymbol{Z}_2}X \leqq h(X) \leqq \mathrm{Ind}_{\boldsymbol{Z}_2}X$$

が成り立つ. したがって, 彩色数について $\chi(G) \geqq h(X) + 2$, $\chi(G) \geqq \mathrm{coind}_{\boldsymbol{Z}_2}X + 2$ も成り立つ. Stiefel-Whitney height について Kozlov は次のことを証明している.

命題 2.2([7]). X が弧状連結で $\boldsymbol{Z}_2$ が自由に作用するような位相空間であるとき, $H^{h(X)}(X; \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}) \neq 0.$

証明は [11] で用いた Gysin-Smiti 完全系列を用いてできる. 特に, 命題 2.2 の状況のもとで, $H_k(X; \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z})$ が $1 \leqq k \leqq n$ で消えているとき, $h(X) \geqq n + 1$ なので, $\boldsymbol{Z}_2$-index について次のことがわかる.

命題 2.3([11]). X が自由な $\boldsymbol{Z}_2$ 作用がある弧状連結な位相空間で, $1 \leqq k \leqq n$ に対して $H^k(X; \boldsymbol{Z}/2\boldsymbol{Z}) = 0$ をみたすものとする. このとき, $\mathrm{Ind}_{\boldsymbol{Z}_2}X \geqq n + 1.$

上で見たように, $\chi(G)$ を調べるのに $|B(G)|$ の位相を調べることが有効であるが, $B(G)$ は単体の数が多く複雑になる. そこで, もう少し簡単な近傍複体を定義しておこう. V の部分集合族 $N(G)$ を

$$N(G) := \{A \subset V \mid CN(A) \neq \emptyset, A \neq \emptyset\}$$

により定義する. CN の定義より, $B \subset A$ ならば $CN(B) \supset CN(A)$ が成り立つので, $A \in N(G)$ かつ $B \subset A\,(B \neq \emptyset)$ ならば, $B \in N(G)$ であり, $N(G)$ は単体複体（抽象複体）となり, 頂点集合は V と同一視できる.

$N(G)$ と $B(G)$ について次の命題が成り立つ.

命題 2.4([4]). $|N(G)|$ と $|B(G)|$ はホモトピー同値である.

以上でわかるように, グラフ G の彩色数を知るのに箱複体 $B(G)$ の $\boldsymbol{Z}_2$-index を知ることが有効であり, そのために $|N(G)|$ の位相を知ることが有効である.

彩色数の研究における近傍複体の利用は, Lovász([8]) による Kneser グラフの彩色数の研究が最初と思われる. その結果を紹介するために Kneser グラフについて定義しておこう.

$\binom{[n]}{k}$ により [n] の部分集合で要素が k 個であるものの全体の集合を表すことにする. Kneser グラフ $KG_{n,k}$ は頂点集合 $V(KG_{n,k})$ が $\binom{[n]}{k}$ であり, $u, v \in V(KG_{n,k})$ について, $\{u,v\} \in E(KG_{n,k})$ となるのは $u \cap v = \emptyset$ を満たすものとする ($u \cap v$ は $[n]$ の部分集合として考えている). Kneser グラフの彩色数について, $\chi(KG_{n,k}) \leqq n-2k+2$ はすぐわかる ($(n-2k+2)$-彩色が具体的に構成できる). Lovász は $|N(KG_{n,k})|$ が $(n-2k-1)$-連結であることを証明することにより $\chi(KG_{n,k}) = n-2k+2$ を示した. 本稿の手法においては, $|N(KG_{n,k})|$ が $(n-2k-1)$-連結であれば, 命題 2.3, 2.4 から $\mathrm{Ind}_{\boldsymbol{Z}_2} B(KG_{n,k}) \geqq n-2k$ がわかり, 定理 2.1 から $\chi(KG_{n,k}) \geqq n-2k+2$ を示すことができる.

3 彩色数の変種

この節では, 彩色数の変種として, 分数彩色数 (fractional chromatic number) と円彩色数 (circular chromatic number) について説明する.

3.1 分数彩色数

以下, $G=(V,E)$ を単純グラフとする. $\binom{[n]}{k}$ を [n] の部分集合で要素が k 個であるもの全体の集合を表す. k **重彩色** $c\colon V \to \binom{[n]}{k}$ を $\{u,v\} \in E$ ならば $c(u) \cap c(v) = \emptyset$ を満たすものとする. また, k 重彩色 $c\colon V \to \binom{[n]}{k}$ が存在するような最小の n を k **重彩色数**といい, $\chi_k(G)$ により表すことにする. もちろん $\chi_1(G) = \chi(G)$ である.

分数彩色数 (fractional chromatic number) $\chi_f(G)$ を

$$\chi_f(G) = \inf_{k \in \boldsymbol{N}} \frac{\chi_k(G)}{k}$$

により定義する. 実は, $\chi_{k+l}(G) \leqq \chi_k(G) + \chi_l(G)$ が成り立ち, このことから, $\chi_f(G) = \lim_{k\to\infty} \dfrac{\chi_k(G)}{k}$ がいえる (このことについては [12] を参照せよ).

彩色数は完全グラフへのグラフ準同型と関係していたが, 分数彩色数は Kneser グラフへの準同型と関係し,

$$\chi_f(G) = \inf\left\{ \frac{n}{k} \mid \text{グラフ準同型 } c\colon G \to GK_{n,k} \text{ が存在する} \right\}$$

である.

彩色数と分数彩色数の間には, 容易にわかるように, $\chi_f(G) \leqq \chi(G)$ という関係がある. $\chi_f(G) \neq \chi(G)$ となるようなグラフの例としては, 頂点の個数が奇数の閉路グラフ C_{2m+1} がある.

m 重彩色 $c\colon V(C_{2m+1}) \to \binom{[2m+1]}{m}$ を $c(i) = \{i, \overline{i+2}, \ldots, \overline{i+2m-2}\}$ ($\overline{i+2k}$ は $i+2k$ が $2m+1$ 以下なら $i+2k$, $i+2k$ が $2m+1$ を越えるなら $i+2k-2m-1$ を表す) により定義できるので, $\chi_c(C_{2m+1}) \leqq 2+(1/m)$ である. 実際には, $\chi_c(C_{2m+1}) = 2+(1/m)$ が成り立つ. これを示すために, 以下で少し準備をしよう.

グラフ G の頂点の集合 $V(G)$ の部分集合 S で, S のどの 2 点も隣接していないとき (つまり, $u, v \in S$ ならば $\{u,v\} \notin E(G)$ のとき), S を G の**独立集合**という. G のすべての独立集合のうち, 要素の個数が最大になるものを考え, その要素の個数を G の**独立数**といい, $\alpha(G)$ と書くことにする. 彩色数については, $\chi(G) \geqq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ であることが知られているが, 分数彩色数についても同様に次が成り立つ.

命題 3.1. $\chi_f(G) \geqq \dfrac{|V(G)|}{\alpha(G)}$

証明. $c\colon V \to \binom{[n]}{k}$ を k 重彩色とするとき, $A_i = \{v \in V(G) \mid i \in c(v)\}$ により A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を定義すると, k 重彩色の定義より, A_i は独立集合である. したがって, $|A_i| \leqq \alpha(G)$ である. 一方, 各 $v \in V(G)$ に対して, $c(v)$ は要素が k 個の $[n]$ の部分集合であることから, $|A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| = k|V(G)|$ が成り立つ. これらより, $n\alpha(G) \geqq k|V(G)|$ が成り立つ. $\frac{n}{k} \geqq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ が k 重彩色に対して常に成り立つので, $\chi_f(G) \geqq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ である. ∎

C_{2m+1} の独立数は m なので, 命題 3.1 より $\chi_f(C_{2m+1}) \geqq \frac{2m+1}{m} = 2+(1/m)$. 一方, 上で $\chi_c(C_{2m+1}) \leqq 2+(1/m)$ を証明したので, $\chi_f(C_{2m+1}) = 2+(1/m)$ がいえる.

その他, 分数彩色数の性質については [12] に詳しい解説がある.

3.2 円彩色数の定義について

次に円彩色数について説明しよう. p, q を自然数で, $p \geqq 2q$ を満たすものとする. グラフ $G = (V, E)$ に対して, G の (p,q)-**彩色** ((p,q)-coloring)$c\colon V \to \{0, 1, \ldots, p-1\}$ を彩色であり,

$$\{x,y\} \in E \text{ のとき, } q \leqq |c(x) - c(y)| \leqq p - q$$

を満たすものとする (あとの説明のために, $[p]$ でなく $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ を用いる). G の**円彩色数** (circular chromatic number) を

$$\chi_c(G) = \inf\{\frac{p}{q} \mid G \text{ の } (p,q)\text{-彩色が存在する}\}$$

により定義する.

円彩色数には別の定義の仕方もあるので, それについても紹介しておこう.

C を周の長さが l の円とする. グラフ G の l-**円彩色** c を各 $x \in V(G)$ に C の長さ 1 の開いた (両端の点のない) 弧 $c(x)$ を対応させるもので, $\{x,y\} \in E(G)$ のとき $c(x) \cap c(y) = \emptyset$ を満たすものとする. G の l-円彩色が存在するとき, G は l-**円彩色可能**といい,

$$\chi'_c(G) = \inf\{l \mid G \text{ は } l\text{-円彩色可能}\}$$

により $\chi'_c(G)$ を定義する. このとき, $\chi'_c(G)$ が上で定義した円彩色数と一致することを以下で証明しよう.

円 C の代わりに $\boldsymbol{R}$ の半開区間 $[0,l)$ を考え, $c' \colon V(G) \to [0,l)$ が

$$(*) \qquad \{x,y\} \in E(G) \text{ のとき } 1 \leqq |c'(x) - c'(y)| \leqq l-1$$

をみたすものとする. $c'(x) \in [0,l)$ に C の対応する点を始点として反時計まわりの長さ 1 の開いた弧を考え, それを $c(x)$ とすることにより l-円彩色 c が与えられる. 逆に, l-円彩色 c から $c' \colon V(G) \to [0,l)$ で条件 $(*)$ を満たすものを与えることができるので, 条件 $(*)$ をみたす $V(G)$ から $[0,l)$ への写像が l-円彩色と 1 対 1 に対応する.

さて, (p,q)-彩色 $c \colon V \to \{0,1,\ldots,p-1\}$ が存在するとき, $c'(x) = c(x)/q$ とおく. これより $(\frac{p}{q})$-円彩色に対応する $c' \colon V \to [0, \frac{p}{q})$ を得ることができる. 一方, 条件 $(*)$ を満たす $c' \colon V(G) \to [0, \frac{p}{q})$ が存在するとき, $c(x) = \lfloor c'(x)q \rfloor$ とおく. ここで, $\lfloor c'(x)q \rfloor$ は $c'(x)q$ を超えない最大の整数である. これにより (p,q)-彩色 c を得ることができる.

以上のようにして, $(\frac{p}{q})$-円彩色と (p,q)-彩色が対応し, 有理数が実数の中で稠密であることを考えると, 円周の長さを用いて定義した $\chi'_c(G)$ は最初に定義した円彩色数 $\chi_c(G)$ と一致することがわかる.

3.3 円彩色数の性質

ここでは, 円彩色数の基本的な性質について以下で述べよう. まず, [1] に書かれている次の二つの命題を紹介しておこう.

命題 3.2([1]). グラフ G が (p,q)-彩色をもち, 自然数 p', q' が $\frac{p}{q} \leqq \frac{p'}{q'}$ を満たすとき, G には (p',q')-彩色が存在する.

命題 3.3([1]). グラフ G の頂点の数が n 個で, $\gcd(p,q) = 1$, $p > n$ を満たすような G の (p,q)-彩色が存在するとき, $p' < p$, $\frac{p'}{q'} < \frac{p}{q}$ をみたすような (p',q')-彩色が存在する.

ここでは, 上の二つの命題の証明は省略するが, いずれも実際に (p',q')-彩色を構成することにより証明することができる.

命題 3.3 からグラフ G の (p,q)-彩色に対し, p が G の頂点の数より大きければ, $\frac{p'}{q'} \leqq \frac{p}{q}$, $p' < p$ をみたすような (p',q')-彩色が存在するので, 結局, 円彩色数の定義において, (p,q)-彩色は p が G の頂点の数以下の場合のみ考えればよい. つまり, 有限個の (p,q)-彩色を考えればよいので, 実際には

$$\chi_c(G) = \min\{\frac{p}{q} \mid G \text{ の } (p,q)\text{-彩色が存在する. ただし, } p \leqq |V(G)|.\}$$

となる. また, 通常の彩色数 $\chi(G)$ と円彩色数の間には次の関係がある.

命題 3.4([1],[14]). $\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leqq \chi(G)$.

証明. $(n,1)$-彩色が通常の彩色であることから, $\chi_c(G) \leqq \chi(G)$ が成り立つことがわかる.

また, グラフ G が (p,q)-彩色をもつとき, $\frac{p}{q} \leqq \chi(G) - 1$ が成り立つと仮定すると, 命題 3.2 から $(\chi(G)-1, 1)$-彩色が存在することになる. これは, 彩色 $c \colon V(G) \to [\chi(G)-1]$ が存

在することに他ならず, 彩色数の定義に矛盾する. したがって, $\frac{p}{q} > \chi(G) - 1$ でなければならない. つまり, G の彩色数と円彩色数の間には $\chi(G) - 1 < \chi_c(G) \leqq \chi(G)$ という関係があることがわかる. ∎

また, グラフ G が (p,q)-彩色 $c\colon V(G) \to \{0,1,\ldots,p-1\}$ を持つとき, $c'\colon V(G) \to \binom{[p]}{q}$ を $c'(v) = \{c(v)+1, \overline{c(v)+1}+1, \ldots, \overline{c(v)+q-1}+1\}$ により定義すると q 重彩色が得られる (ここで, $\overline{c(v)+i}$ は $c(v)+i$ を p で割った余りを表す). このことから, 分数彩色数と円彩色数の間には $\chi_f(G) \leqq \chi_c(G)$ が成り立つことがわかる.

4 箱複体を用いた円彩色数についての考察

グラフ準同型 $G \to K_n$ から箱複体の間の $\boldsymbol{Z}_2$-写像 $B(G) \to B(K_n)$ が導かれることから, (一般化された)Borsuk-Ulam の定理を用いて彩色数について考察することができることを 2 節で見た.

分数彩色数については, k 重彩色 $c\colon V \to \binom{[n]}{k}$ が存在することは, Kneser グラフへのグラフ準同型 $f\colon G \to KG_{n,k}$ が存在することと同値である. したがって, 彩色数を箱複体を用いて調べるには $|B(KG_{n,k})|$ の位相を知る必要があるが, すでに, Kneser グラフの彩色数を調べるときに $\mathrm{Ind}_{\boldsymbol{Z}_2} B(KG_{n,k}) = n - 2k$ であることを見ている.

この節で, 円彩色数について同様のことを考えよう.

以下, p, q を自然数で $p > 2q$ をみたすものとする. $G_{p,q}$(p,q は自然数) を頂点集合が $\{0,1,\ldots,p-1\}$ で, $\{i,j\} \in E(G)$ となるのが $p \leqq |i-j| \leqq p-q$ を満たすときであるものとする. このとき, (p,q)-彩色 $c\colon V(G) \to \{0,1,\ldots,p-1\}$ が存在するということは, グラフ準同型 $f\colon G \to G_{p,q}$ が存在することと同値である. したがって, $|B(G_{p,q})|$ の位相を調べることによりグラフの円彩色数に関する結果を得ることが期待できる. $B(G_{p,q})$ のホモロジー群は次のようになる.

命題 4.1. $p > 2q$ とすると,
$2q \nmid p$ のとき,

$$H_k(B(G_{p,q}); \boldsymbol{Z}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = 0 \text{ または } k = 2\lfloor \frac{p}{2q} \rfloor - 1)) \\ 0 & (k \neq 0, \lfloor \frac{p}{2q} \rfloor - 1) \end{cases}$$

$2q \mid p$ のとき,

$$H_k(B(G_{p,q}); \boldsymbol{Z}) \cong \begin{cases} \boldsymbol{Z} & (k = 0) \\ \boldsymbol{Z}^{2q-1} & (k = \frac{p}{q} - 2) \\ 0 & (k \neq 0, \frac{p}{q} - 2) \end{cases}$$

証明の概略. 箱複体 $B(G)$ は近傍複体 $N(G)$ とホモトピー同値なので, $N(G)$ のホモロジー群を求めればよい. 縮約することで簡単な空間とホモトピー同値になることを見る.

$G_{p,q}$ の頂点を $0,1,\ldots,p-1$ とする $2q<p<4q$ のときには, $CN(p-q)=\{0,1,2,\ldots,p-2q\}$ である. 以下, 単体は $[0,1,\ldots,p-2q]$ のように表す. $[0,1,\ldots,p-2q]$ の辺単体で, 0 と 1 を両方含むものと, 0 を含み 1 を含まないものの数は等しく, 単体, $[0,1,a_1,\ldots,a_k]$ と $[0,a_1,\ldots,a_k]$ を組にする. 同様のことを, $CN(p-q+1),\ldots,CN(p-1),CN(0),\ldots,CN(p-q-1)$ に対して考えていき, それらの組により $N(G)$ の縮約を考えると, 頂点と $[0,1],[1,2],\ldots,[p-1,0]$ のみからできる単体複体が得られる. つまり, $|N(G)|$ は S^1 とホモトピー同値である.

$p=4q$ のとき, 上と同じ方法だと $[0,1,2q]$ と $[2q,2q+1,0]$ が同じ単体 $[0,2q]$ を組として取る必要があり, これは縮約で消える単体にはならない.

$$[0,2q],[0,1,2q],[1,2q],[1,2,2q],[2,2q],\ldots,[2q-2,2q],[2q-2,2q-1,2q],$$
$$[2q,2q+1,0],[2q+1,0],[2q+1,2q+2,0]\ldots,[p-2,p-1,0]$$

のような単体からなる図形は D^2 で, 境界は頂点と $[0,1],[1,2],\ldots,[p-1,0]$ からできる S^1 である. 同様に $[1,2q+1],\ldots,[2q-1,p-1]$ も消えない単体で, それぞれについて,

$$[i,2q+i],[0,1+i,2q+i],[1+i,2q+i],[1+i,2+i,2q+i],[2q-2+i,2q-1+i,2q+i],$$
$$[2q+i,\overline{2q+1+i},i],[\overline{2q+1+i},i],[\overline{2q+1+i},\overline{2q+2+i},i]\ldots,[\overline{p-2+i},\overline{p-1+i},i]$$

を考えると (ここで, $\overline{\cdot}$ は p で割った余り), D^2 で, 境界は上と同じ S^1 である. つまり, $p=4q$ のときは, $2q$ 個の D^2 がその境界でついていると考えることができて, これは $\vee_{2q-1}S^2$ とホモトピー同値である. したがって, 定理のようなホモロジー群になる.

$4q<p<6q$ のときにも, $[i,a_1,\ldots,a_k]$ と $[i,\overline{i+1},a_1,\ldots,a_k]$ を組にして縮約することを考える (ここで, $a_0=\overline{i+1}$ とおくと, $a_0,\ldots,a_k$ はすべて異なり, $a_j>a_{j+1}$ をみたす j は高々 1 つで, $a_j>a_{j+1}$ を満たすならば $a_{j+1}<a_{j+1}<\cdots<a_k\leqq i-2q$ をみたすものとする). $4q<p<6q$ のときには, 上のようなものすべてを考えると, 2 度出てくる単体があり, 縮約できなくなるので以下のようにしていくつかの組を上に挙げたものから取り除くことにする. $0\leqq j\leqq 2q-1$ のときは, $a_k=p-2q+j$, $a_{k-1}\leqq p-4q+j$ となるものの組は考えない. $2q\leqq j\leqq p-2q-1$ のときは, $0\leqq a_j\leqq 2q-1$, $2q\leqq|a_j-a_{j-1}|\leqq p-2q$ となる a_j が存在するような組は考えない. $j\geqq p-2q$ のときは $2q\leqq|a_j-a_{j-1}|\leqq p-2q$ となる a_j が存在する組を除く. また, $[i,\overline{i+1},\overline{j},\overline{j+1}]$ の形の 3-単体とその辺単体も考えない. ($[i,\overline{i+1},\overline{j},\overline{j+1}]$ の形の 3-単体を考えると, 3-単体と 2-単体の縮約を考える組 $\{\sigma_1,\tau_1\},\ldots\{\sigma_n,\tau_n\}$ で, τ_1 が σ_2 の辺単体, τ_2 が σ_3 の辺単体,$\ldots,\tau_n$ が σ_1 の辺単体, という組ができ, 縮約できなくなるからである.)

以上のような組を考えることにより, $4q<p<6q$ のとき, $[i,\overline{i+1},\overline{j},\overline{j+1}]$ の形の 3-単体とその辺単体全体からなる複体に $N(G)$ が縮約できることがわかる. これは, $p=2q$ のときに考えたのと同様にしてできる $2q$ 個の D^2 を境界でつけた複体の D^2 と D^2 の間 ($2q$ 個ある) を可縮な 3 次元の空間で埋めてできるものになる. これより 3 次ホモロジー群が $H_3(N(G))\cong \boldsymbol{Z}$ で 3 次と 0 次以外のホモロジー群が消えることがわかる.

$p=6q$ のとき, $4q<p<6q$ のときと同様に考えると, 例えば $[0,2q,4q]$ という単体が問題になる. このときは, $[i,\overline{i+1},\overline{j},\overline{j+1},\overline{k}]$ $(k-4q\leqq i<j-1, k-2q\leqq j+1<k)$ の形の 4-単体全部とその辺単体全体からなる複体に $N(G)$ は縮約できる. $0\leqq l\leqq 2q-1$ とすると, k が $l,l+2,l+4q$ である上の形の 4-単体とその辺単体全体でできる複体 X_k を考えると, 可縮でその境界が $4q<p<6q$ のときに考えた $[i,\overline{i+1},\overline{j},\overline{j+1}]$ の形の 3-単体とその辺単体全体からなる複体になる. したがって, $H_4(X_k,\partial X_k)\cong \boldsymbol{Z}$, $H_k(X_k,\partial X_k)\cong 0(k\neq 4)$ となる図

形 $X_l(l=0,1,\ldots,2q-1)$ を同じ境界 ∂X_l でつけたもので，このことから $H_4(X)\cong \boldsymbol{Z}^{2q-1}$，$H_k(X)\cong 0(k\neq 0,4)$ がわかる．

以下同様に，$6q<p<8q$ のとき，$[i,\overline{i+1},\overline{j},\overline{j+1},\overline{k},\overline{k+1}]$ の形の単体全体とその辺単体全体からできる複体に $N(G)$ がホモトピー同値であり，これは $p=6q$ のときと同様にしてできる $X_0\cup X_1, X_1\cup X_2,\ldots,X_{2q-1}\cup X_0$ の中を埋めていく複体で，$H_5(X,\partial X)\cong \boldsymbol{Z}$，$H_k(X_a,\partial X_a)\cong 0(k\neq 0,5)$．

以上のようにして，$2nq<p<2(n+1)q$ のとき，$H_{2n-1}(B(G))\cong \boldsymbol{Z}$，$H_k(B(G))\cong 0(k\neq 0,2n-1)$，$p=2nq$ のとき，$H_{2n-2}(B(G))\cong \boldsymbol{Z}^{2q-1}$，$H_k(B(G))\cong 0(k\neq 0,2n-2)$ がわかる．∎

命題 4.1 と命題 2.2 から $B(G_{p,q})$ の Stiefel-Whitney height　$h(B(G_{p,q}))$ は次のようになる．

系 4.2. $p>2q$ とすると，
$2q\nmid p$ のとき，$h(B(G_{p,q}))=2\lfloor \frac{p}{2q}\rfloor-1$
$2k\mid n$ のとき，$h(B(G_{p,q}))=\frac{p}{q}-2$

Kneser グラフ $KG_{n,k}$ の円彩色数 $\chi_c(KG_{n,k})$ について，Johnson, Holroyd, Stahl が [6] で $\chi_c(KG_{n,k})=\chi(KG_{n,k})$ を予想した．これについては，n が偶数の場合は比較的早期に Simonyi と Tardos および Meunier がそれぞれ独立に証明したが ([10],[13])，n が奇数の場合は，偶数の場合より後に Chen が [3] で証明した．n が偶数のときは彩色数が偶数のときであるが，これについて系 4.2 から次のことがいえる．

命題 4.3. G を $\chi(G)$ が偶数のグラフとし，$\chi(G)=h(B(G))+2$ を満たすものとする．このとき，$\chi_c(G)=\chi(G)$．

証明. $\chi(G)=k$(k は偶数) とする．$\chi(G)=h(B(G))+2$ より，$h(B(G))=k-2$ である．自由な $\boldsymbol{Z}_2$-空間 X,Y について，X から Y への $\boldsymbol{Z}_2$-写像が存在するならば，$h(X)\leqq h(Y)$ という関係がある．したがって，G から $G_{p.q}$ へのグラフ準同型が存在すると仮定すると，$h(B(G_{p,q}))\geqq h(B(G))=k-2$ である．このとき，$2q\mid p$ ならば $\frac{p}{q}-2\geqq k-2$ より，$\frac{p}{q}\geqq k$．$2q\nmid p$ ならば $2\lfloor\frac{p}{2q}\rfloor-1\geqq k-2$ より，$2\lfloor\frac{p}{2q}\rfloor\geqq k-1$．$k$ が偶数であることから，$2\lfloor\frac{p}{2q}\rfloor\geqq k$．よって，$\frac{p}{2q}>\lfloor\frac{p}{2q}\rfloor\geqq\frac{k}{2}$．つまり $\frac{p}{q}>k$ がいえる．

以上で，命題 4.3 の仮定を満たすとき，$\chi_c(G)\geqq\chi(G)$ が成り立つことがわかり，$\chi_c(G)\leqq\chi(G)$ は常に成り立つので $\chi_c(G)=\chi(G)$ である．∎

注意. [13] では別の方法で，$\chi(G)$ が偶数で $\chi(G)=\mathrm{coind}_{\boldsymbol{Z}_2}B(G)+2$ のとき $\chi_c(G)=\chi(G)$ を証明している．$h(B(G))\geqq\mathrm{coind}_{\boldsymbol{Z}_2}B(G)$ が成り立つので，上の結果はそれを改良したものになっている．

n 偶数のとき，$\chi(KG_{n,k})=h(B(GK_{n,k}))+2=n-2k+2$ で，これが偶数であり，命題 4.3 から，$\chi_c(GK_{n,k})=\chi(GK_{n,k})$ が証明できる．

一方，n が奇数のときには，同様の方法では $\chi_c(GK_{n,k})=\chi(GK_{n,k})$ が証明できない．$\chi(G)=h(B(G))+2$ で $\chi(G)$ が奇数のときには，命題 4.3 の証明と同様にすると，$2\lfloor\frac{p}{2q}\rfloor\geqq k-1$ で，$k-1$ が偶数であることから $\frac{p}{2q}>\lfloor\frac{p}{2q}\rfloor\geqq\frac{k-1}{2}$ しかわからない．実際，$\chi(C_{2m+1})=$

$h(B(C_{2m+1}))+2=3$ であるが, $\chi_c(C_{2m+1})=2+(1/m)$ なので, 命題 4.3 は $\chi(G)$ が奇数のときには成り立たない.

References

[1] J. A. Bondy and P. Hell, A note on the star chromatic number. J. Graph Theory **14** (1990), 479–482.

[2] G. J. Chang, D. F. Liu and X. Zhu, A short proof for Chen's alternative Kneser coloring lemma. (English summary) J. Combin. Theory Ser. A 120 (2013), no. 1, 159–163.

[3] P-A. Chen, A new coloring theorem of Kneser graphs., J. Combin. Theory Ser. A 118 (2011), 1062–1071.

[4] P. Csorba, On the simple $\mathbf{Z}_2$-homotopy types of graph complexes and their simple $\mathbf{Z}_2$-universality, Canad. Math. Bull. 51 (2008), 535–544.

[5] 原靖浩, 冨田優次, グラフから定まる単体複体の位相について, 京大数理解析研究所講究録 2015 年,

[6] A. Johnson, F.C. Holroyd and S. Stahl, Multichromatic numbers, star chromatic numbers and Kneser graphs, J. Graph Theory 26 (3) (1997) 137–145.

[7] D. N. Kozlov, Homology tests for graph colorings, in: Algebraic and Geometric Combinatorics, Contemp. Math., 423, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2006), 221–234.

[8] L. Lovász, Kneser's conjecture, chromatic number, and homotopy, J. Combin. Theory Ser. A 25 (1978) 319–324.

[9] J. Matoušek, Using the Borsuk-Ulam theorem, Springer, Berlin(2003).

[10] F. Meunier, A topological lower bound for the circular chromatic number of Schrijver graphs, J. Graph Theory 49(4) (2005), 257–261.

[11] 長崎生光, 川上智博, 原靖浩, 牛瀧文宏, The Smith homology and a generalized Borsuk-Ulam theorem, 京大数理解析研究所講究録 1670 換群論の新たな展開　2009 年, 34–39.

[12] E. R. Scheinerman.and D. H. Ullman, Fractional graph theory, A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1997.

[13] G. Simonyi and G. Tardos, Local chromatic number, Ky Fan's theorem and circular colorings. Combinatorica 26 (2006), no. 5, 587–626.

[14] X. Zhu, Circular chromatic number: a survey, Combinatorics, graph theory, algorithms and applications. Discrete Math. 229 (2001), 371–410.