数理解析研究所講究録
第 1968 巻 2015 年 98-103

弱順序極小構造上での定義可能な関数について

近畿大学・工学部　田中 広志
Hiroshi Tanaka
Faculty of Engineering, Kinki University

概要

アーベル群の順序極小構造拡張において，definable で有界かつ閉な集合の definable 連続写像での像は，また definable で有界かつ閉であることが知られている。このノートでは，この結果の弱順序極小構造版について，いくつかの得られた結果について記述する。

1　はじめに

まず，数理論理学を展開していく上で必要ないくつかの言葉，記号を定義していくが，正確な定義については [6] または [3] に譲る。

論理記号 $\wedge, \vee, \rightarrow, \neg$（でない），$\forall, \exists$，等号記号 $=$，変数記号 $x, y, \ldots$，定数記号，関数記号，関係記号の集合を**言語**という。通常，論理記号，等号記号，変数記号は明示せず $L = \{0, +, <\}$ などと書く。

言語 L の有限記号列の中で意味のあるものを L-**論理式**という。例えば，言語 $L = \{\cdot\}$ で「$\forall z(x \cdot z = y \cdot z \rightarrow x = y)$」は L-論理式で，「$x \rightarrow \vee \wedge y \wedge$」は L-論理式ではない。また L-論理式の中で，特に自由変数を含まないものを L-**閉論理式**という。L-論理式を表す記号として通常 $\varphi, \psi, \varphi(x), \psi(x)$ などを使う（x は自由変数の列)。

集合 M が，言語 L の定数記号 c に対して M の特定の元 c^M，m 変数関数記号 F には m 変数関数 $F^M : M^m \rightarrow M$，n 変数関係記号 R には $R^M \subseteq M^n$ が定まっているとき，M は L-**構造**であるという。c^M を定数記号 c の M における**解釈**とよぶ。同様に，F^M は関数記号 F の M における解釈，R^M は関係記号 R の M における解釈とよぶ。

M を L-構造とする。L-閉論理式 φ において，φ が M において成り立つとき $M \models \varphi$ と書き，逆に成り立たないとき $M \not\models \varphi$ と書く。また，T を L-閉論理式の集合とする。T のすべての L-閉論理式が M で成り立つとき，M は T のモデルであるといい，$M \models T$

2000 *Mathematics Subject Classification.* 03C64.
Key Words and Phrases. Weakly o-minimal, cell decomposition and strongly continuous.

と書く。このとき，次の定理が知られている。

定理 1 (Gödel の完全性定理 [5]). L は言語とし，T を L-閉論理式の集合とする。このとき次は同値である。

1. T は無矛盾である。
2. T はモデルを持つ。

A を L-構造 M の部分集合とする。言語 L に A の元を定数記号として付け加えた言語を $L(A)$ と書く。$X \subseteq M^n$ がある $L(A)$-論理式の解集合になっているとき，**definable** であるという。

以後，言語 L は特には明示せず，単に構造，論理式，閉論理式と書くことにする。

2 弱順序極小構造

構造 $\mathcal{M} = (M, <, \ldots)$ を端点を持たない全順序構造とする。

M の部分集合 A が, 任意の $a, b \in A$ に対して, $(a,\ b) \subseteq A$ をみたすとき, A は M の**凸集合**であるという。さらに $\sup A, \inf A \in M \cup \{-\infty, +\infty\}$ のとき, A は M の**区間**であるという。構造 $\mathcal{M}$ の任意の definable 集合 $D \subseteq M$ が, 区間 (または凸集合) の有限和で表せるとき, $\mathcal{M}$ は**順序極小構造** (または**弱順序極小構造**) であるとよぶ。理論 T の任意のモデルが順序極小 (または弱順序極小) になるとき, T は**順序極小理論** (または**弱順序極小理論**) とよぶ。順序極小構造の理論は，順序極小理論になることが知られている。しかしながら，弱順序極小構造の理論は，必ずしも弱順序極小理論になるとは限らないことが知られている ([4])。順序極小構造と弱順序極小構造に関する文献としては，[1], [2], または [7] などがある。

このノートでは，以後の構造 $\mathcal{M}$ はすべて弱順序極小構造とする。

3 セル分解を許す弱順序極小構造

$C, D \subseteq M$ とする。任意の $c \in C$, $d \in D$ に対して $c < d$ のとき, $C < D$ と書く。空でない集合の対 $\langle C, D \rangle$ が, $C < D$ かつ $C \cup D = M$ でさらに D が最小元を持たないとき, M の**切断**であるという。特に C, D が definable のとき，**definable 切断**という。$\mathcal{M}$ の definable 切断全体を $\overline{M}$ によって表す。任意の $a \in M$ に対して, definable 切断 $\langle (-\infty, a], (a, +\infty) \rangle$ を考えることにより, $M \subseteq \overline{M}$ とみなす。さらに $\langle C_1, D_1 \rangle < \langle C_2, D_2 \rangle$ を $C_1 \subsetneq C_2$ と定義することにより, $(M, <)$ を $(\overline{M}, <)$ の部分構造とみなす。

M (または $\overline{M}$) 上に, M (または $\overline{M}$) の開区間を基本開集合として位相を入れる。また

M^n (または $\overline{M}^n$) にはその積位相を入れる。$A \subseteq M^n$ に対して，その位相空間論の意味での閉包を $\mathrm{cl}(A)$ と表す。同様に $A \subseteq \overline{M}^n$ に対して，その位相空間論の意味での閉包を $\mathrm{CL}(A)$ と表す。

n を自然数とし，$A \subseteq M^n$ を definable とする。写像 $f : A \to \overline{M}$ において，集合 $\{\langle x, y\rangle \in A \times M : y < f(x)\}$ が definable になるとき，f は **definable** であるという。写像 $f : A \to \overline{M} \cup \{-\infty, \infty\}$ が **definable** とは，f が A から $\overline{M}$ への definable 写像であるか，任意の $x \in A$ に対し $f(x) = \infty$ であるか，または任意の $x \in A$ に対し $f(x) = -\infty$ になるときをいう。

[8] に弱順序極小構造上でのセルの定義がある。

定義 2. 弱順序極小構造 $\mathcal{M} = (M, <, \ldots)$ に対して，セルとその完備化を帰納的に定義する:

1. M の 1 点集合は **0-セル**とする。$C \subseteq M$ が 0-セルのとき，その完備化を $\overline{C} := C$ と定める。
2. M の空でない definable 凸開集合は **1-セル**とする。$C \subseteq M$ が 1-セルのとき，その完備化を $\overline{C} := \{x \in \overline{M} : \exists a, b \in C, a < x < b\}$ と定める。
3. $C \subseteq M^m$ が k-セルで $f : C \to M$ が definable で連続，さらに連続な拡張 $\overline{f} : \overline{C} \to \overline{M}$ をもつとき，グラフ $\Gamma(f)$ は **k-セル**とし，その完備化を $\overline{\Gamma(f)} := \Gamma(\overline{f})$ と定める。
4. $C \subseteq M^m$ が k-セルで $g, h : C \to \overline{M} \cup \{-\infty, \infty\}$ が definable で連続かつ連続な拡張 $\overline{g}, \overline{h} : \overline{C} \to \overline{M} \cup \{-\infty, \infty\}$ をもつとする。各 g, h は M, $\overline{M} \setminus M$, $\{\infty\}$, $\{-\infty\}$ のいずれかにすべての値を持つとする。任意の $x \in \overline{C}$ に対して $\overline{g}(x) < \overline{h}(x)$ とする。このとき，
$$(g, h)_C := \{\langle a, b\rangle \in C \times M : g(a) < b < h(a)\}$$
は **$(k+1)$-セル**とし，その完備化を
$$\overline{(g, h)_C} := \{\langle a, b\rangle \in \overline{C} \times \overline{M} : \overline{g}(a) < b < \overline{h}(a)\}$$
と定める。
5. ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して，$C \subseteq M^m$ が k-セルとなるとき，C は**セル**とよぶ。

C を M^n のセルとする。definable 写像 $f : C \to \overline{M}$ が連続な拡張 $\overline{f} : \overline{C} \to \overline{M}$ をもつとき，f は**強連続**であるという。

定義 3. $\mathcal{M} = (M, <, \ldots)$ を弱順序極小構造，$m \in \mathbb{N}$，$X \subseteq M^m$ を空でない definable 集合とする。以下で，X の**セル分解**を m に関して帰納的に定義する。

1. X を M の空でない definable 部分集合で, $\mathcal{D} = \{C_0, \ldots, C_k\}$ をセルによる X の分割とする。このとき, $\mathcal{D}$ は X の**セル分解**であるという。
2. X を M^{m+1} の空でない definable 部分集合で, $\mathcal{D} = \{C_0, \ldots, C_k\}$ をセルによる X の分割とし, $\pi : M^{m+1} \to M^m$ を最後の座標を除く射影とする。このとき, $\{\pi(C_0), \ldots, \pi(C_k)\}$ が $\pi(X)$ のセル分解になるとき, $\mathcal{D}$ は X の**セル分解**であるという。

定義 4. $\mathcal{M} = (M, <, \ldots)$ を弱順序極小構造, $m \in \mathbb{N}$, $X, Y \subseteq M^m$ を definable 集合, $X \neq \emptyset$ とする。また $\mathcal{D}$ を X のセル分解とする。このとき, 任意の $C \in \mathcal{D}$ に対して, $C \subseteq Y$ または $C \cap Y = \emptyset$ となるとき, $\mathcal{D}$ は Y を**分割する**という。

定義 5. $\mathcal{M} = (M, <, \ldots)$ を弱順序極小構造とする。任意の $m, k \in \mathbb{N}$ と definable 集合 $X_1, \ldots, X_k \subseteq M^m$ に対して, $X_1, \ldots, X_k$ のすべてを分割するような M^m のセル分解が存在するとき, $\mathcal{M}$ は**セル分解を許す**という。

事実 6 ([7, Fact 2.5])**.** $\mathcal{M}$ をセル分解を許す弱順序極小構造とする。$X \subseteq M^n$ は definable, $f : X \to \overline{M}$ は definable とする。このとき, X を分割する M^n のセル分解 $\mathcal{D}$ が存在して, 任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して

1. $f|_D$ は M, $\overline{M} \setminus M$ のいずれかにすべての値を持つ。
2. $f|_D$ は強連続である。

$\mathcal{M} = (M, <, +, \ldots)$ を順序アーベル群 $(M, <, +)$ の弱順序極小拡張とする。$\mathcal{M}$ の任意の definable 切断 $\langle C, D \rangle$ に対して $\inf\{d - c : c \in C,\ d \in D\} = 0$ となるとき, $\mathcal{M}$ は非付値的であるという。このとき, 次が成り立つ。

事実 7 ([7, Corollary 2.16])**.** $\mathcal{M} = (M, <, +, \ldots)$ を順序アーベル群 $(M, <, +)$ の弱順序極小拡張とする。このとき, 次は同値である。

1. $\mathcal{M}$ は非付値的である。
2. $\mathcal{M}$ はセル分解を許す。

$\mathcal{M}$ をセル分解を許す弱順序極小構造とする。任意のセル $C \subseteq M^m$ に対して, $\overline{M}$ で $\overline{C}$ を定義する m-関係記号 $\overline{R}_C$ を導入する。すなわち $a \in \overline{M}^m$ ならば $\overline{M} \models \overline{R}_C(a) \iff a \in \overline{C}$ とする。$\overline{\mathcal{M}} := (\overline{M}, <, (\overline{R}_C : C \text{ はセル}))$ と定義する。このとき, 次が成り立つ。

事実 8 ([7])**.** $\mathcal{M}$ をセル分解を許す弱順序極小構造とする。このとき, $\overline{\mathcal{M}}$ は順序極小構造である。さらに $\overline{\mathcal{M}}$ の任意の定義可能な集合 $X \subseteq \overline{M}^m$ は, M^m のセルの完備化の有限ブール和で表せる。

次が得られた結果である。

命題 9. $\mathcal{M} = (M, <, +, \ldots)$ を順序アーベル群 $(M, <, +)$ の弱順序極小拡張でセル分解を許すとする。$X \subseteq M^n$ は definable，$f : X \to \overline{M}$ は definable とする。X を分割する M^n のセル分解 $\mathcal{D}$ が存在して，任意の $D \in \mathcal{D}$ に対して

1. $f|_D$ は M, $\overline{M} \setminus M$ のいずれかにすべての値を持つ，
2. $f|_D$ は強連続である，
3. $\overline{f|_D}(\overline{D})$ は有界である

とする。このとき，f の連続な拡張 $\overline{f} : \mathrm{CL}(X) \to \overline{M}$ が存在する。

系 10. $\mathcal{M} = (M, <, +, \ldots)$ を順序アーベル群 $(M, <, +)$ の弱順序極小拡張でセル分解を許すとする。$C \subseteq M^n$ をセルとし，$f : C \to M$ または $f : C \to \overline{M} \setminus M$ とする。f は definable かつ強連続，$\overline{f}(\overline{C})$ は有界とする。このとき，任意のセル $D \subseteq C$ に対して，$f|_D$ は強連続である。

系 10 は次のことより明らかではない。

注意 11. $\mathcal{M}$ をセル分解を許す弱順序極小構造とする。このとき次が成り立つ。

1. $C = D_1 \cup D_2$ かつ $\overline{C} \neq \overline{D}_1 \cup \overline{D}_2$ となるセル C, D_1, D_2 が存在する。
2. $C \subseteq D$ かつ $\overline{C} \not\subseteq \overline{D}$ となるセル C, D が存在する。

参考文献

[1] M. Coste, An introduction to o-minimal geometry, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).

[2] L. van den Dries, Tame topology and o-minimal structures, Lecture notes series 248, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[3] 田中一之 [編]，ゲーデルと 20 世紀の論理学 2 完全性定理とモデル理論，東京大学出版会，2006.

[4] D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 12, 5435–5483.

[5] D. Marker, Model theory: An introduction, Graduate Texts in Mathematics, 217, Springer-Verlag, 2002.

[6] 坪井明人，モデルの理論，河合出版，1997.

[7] R. Wencel, Weakly o-minimal non-valuational structures, Ann. Pure Appl. Logic

154 (2008), no. 3, 139–162.

[8] On the strong cell decomposition property for weakly o-minimal structures, MLQ Math. Log. Q. 59 (2013), no. 6, 452–470.