数理解析研究所講究録
第1973巻 2015年 64-75

SL(2, $\mathbf{C}$) 上の Shintani 関数と Heun の微分方程式

大阪大学大学院理学研究科　源嶋 孝太* (Kohta Gejima)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE,
OSAKA UNIVERSITY

(局所) 新谷関数は, ある種の Rankin-Selberg 型の局所 Zeta 積分の被積分関数として現れる特殊関数であり, Murase-Sugano [Mu-S1], [Mu-S2] により導入された. $GL(n)$ の新谷関数に対する重複度1定理と明示公式は, 不分岐有限素点においては Murase-Sugano [Mu-S2], 無限素点においては Hirano [H1],[H2] により研究されている. 特に, Hirano [H2] は自明な極小 U(2)-タイプをもつ GL(2, $\mathbf{C}$) の非ユニタリ主系列表現に付随する新谷関数の明示公式を得た. しかし, 非自明な極小 $U(2)$-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現に付随する新谷関数の明示公式については一般には未解明である.

このノートでは $SL(2,\mathbf{C})$ の, 2次元または3次元極小 $SU(2)$-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現に付随する新谷関数の明示公式についての結果を紹介する (詳細は [G1]). 3次元極小 $SU(2)$-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現の場合には新谷関数のみたす微分方程式系から Heun の微分方程式の興味深い例が得られるので, そのことについても言及したい. 2014年9月に行われた「第9回福岡数論研究集会」における報告集の原稿 [G2] と内容が重複していますが, ご了承願います.

1 Preliminaries

$\mathbf{N}$ を正の整数の全体とし, $\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\cup\{0\}$ とする.

1.1 Lie groups and Lie algebras

$G=\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ とする. このとき G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ は

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(2,\mathbf{C})=\{X\in\mathrm{M}(2,\mathbf{C})\mid \mathrm{Tr}(X)=0\}$$

で与えられる. $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ を Lie 環 $\mathfrak{g}$ の複素化とする. 複素 Lie 環 $\mathfrak{l}$ に対して, $\mathfrak{l}$ の普遍展開環とその中心をそれぞれ $U(\mathfrak{l}), Z(\mathfrak{l})$ と書く. よく知られているように $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ は複素 Lie 環として $\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g}$ と同型である. また, $U(\mathfrak{g}\oplus\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbf{C}}U(\mathfrak{g})$ と $\mathbf{C}$-代数として自然に同一視される. これらの同型から $\mathbf{C}$-代数としての同型

$$Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})\simeq Z(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbf{C}}Z(\mathfrak{g}) \tag{1.1}$$

を得る. 普遍展開環 $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})$ の生成元については次のことがよく知られている:

補題 1.1.1

$$Z(\mathfrak{g})=\mathbf{C}[\Omega_{\mathfrak{g}}].$$

ここで $\Omega_{\mathfrak{g}}$ は $\mathfrak{g}$ の Casimir 元である.

したがって $\Omega_1,\Omega_2\in Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ をそれぞれ同型 (1.1) により $\Omega_{\mathfrak{g}}\otimes 1, 1\otimes\Omega_{\mathfrak{g}}\in Z(\mathfrak{g})\otimes_{\mathbf{C}}Z(\mathfrak{g})$ に対応する元とすると, $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ は Ω_1,Ω_2 により生成されることがわかる: $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})=\mathbf{C}[\Omega_1,\Omega_2]$. 生成元 Ω_1,Ω_2 は同型 (1.1) を通して具体的に書き下すことができることに注意する.

*k-gejima@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

1.2 Irreducible representations of SU(2)

G の極大コンパクト部分群 $K = \mathrm{SU}(2)$ の有限次元既約表現について復習する (例えば [K, Chapter II] 参照). 各 $n \in \mathbf{N}_0$ に対して, $V_n \subset \mathbf{C}[z_1, z_2]$ を n 次同次多項式全体のなす $\mathbf{C}[z_1, z_2]$ の部分空間とする. G の V_n への作用を次で定義する:

$$[\tau_n(g)f](z_1, z_2) = f(az_1 + bz_2, cz_1 + dz_2), \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G.$$

K の有限次元既約表現は (τ_n, V_n) $(n \in \mathbf{N}_0)$ により尽くされることがよく知られている. $f_j^{(n)} = z_1^j z_2^{n-j} (0 \leq j \leq n)$ とおくと, $\{f_j^{(n)}\}_{0 \leq j \leq n}$ は V_n の基底をなす. $\{f_j^{(n)}\}_{0 \leq j \leq n}$ を V_n の標準基底と呼ぶ.

1.3 Non-unitary principal series representations

このサブセクションでは G の非ユニタリ主系列表現 $(\pi_{[\nu,m]}, V_{[\nu,m]})$ について復習する. $B = N \rtimes L$ を G の上三角行列全体からなる Borel 部分群 B の Levi 分解とする. ここで N は B のベキ単根基であり,

$$L = \{l(w) := \mathrm{diag}(w, w^{-1}) \mid w \in \mathbf{C}^\times\}$$

である. 各 $\nu \in \mathbf{C}, m \in \mathbf{Z}$ に対し, L の指標 $\xi_{[\nu,m]} : L \to \mathbf{C}^\times$ を $\xi_{[\nu,m]}(l(w)) = w^m |w|^{\nu-m}$ により定める. L の指標 $\xi_{[\nu,m]}$ は自然に B の指標 $\xi_{[\nu,m]} : B \to N\backslash B \to \mathbf{C}^\times$ に拡張される. このとき誘導表現 $\pi_{[\nu,m]} = \mathrm{Ind}_B^G(\xi_{[\nu,m]})$ を G の非ユニタリ主系列表現と呼ぶ. $\pi_{[\nu,m]}$ の表現空間 $V_{[\nu,m]}$ は次の pre-Hilbert 空間

$$\left\{ f \in C^\infty(G) \mid f(bx) = \xi_{[\nu,m]}(b) f(x), \forall b \in B, x \in G \right\}$$

の, 内積

$$(f_1, f_2) = \int_K f_1(k) \overline{f_2(k)} dk$$

による完備化として与えられる. ここで dk は K の正規化された Haar 測度である. G は右移動により $V_{[\nu,m]}$ に作用する. 各 $m \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\Lambda(m) = \{n \in \mathbf{N}_0 | \ |m| \leq n, n \equiv m (\mathrm{mod}\ 2)\},$$

とおくと, $\pi_{[\nu,m]}$ は K-加群として次のように分解する:

$$\pi_{[\nu,m]} = \widehat{\bigoplus_{n \in \Lambda(m)}} \tau_n.$$

よく知られているように普遍展開環の中心 $Z(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ は $V_{[\nu,m]}$ にスカラー倍で作用する. 生成元の作用は次で与えられる (例えば [J-L, Lemma 6.1] 参照):

命題 1.3.1 各 $f \in V_{[\nu,m]}$ に対して,

i) $16\pi_{[\nu,m]}(\Omega_1 + \Omega_2) f = (\nu^2 + m^2 - 4) f$;

ii) $8\pi_{[\nu,m]}(\Omega_1 - \Omega_2) f = \nu m f$.

2 Shintani functions

このセクションでは $\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})$ 上の新谷関数を導入し, その明示公式を得るために必要な微分作用素 (Casimir 作用素) を導出する. また, Zuckerman テンソルを用いて, 新谷関数のパラメータを動かす線形写像を構成する.

2.1 The Space of Shintani functions

G の対合 $\rho: G \to G$ を $g \mapsto JgJ^{-1}$ で定める. ここで $J = \mathrm{diag}(1,-1)$ である. このとき ρ によって固定される G の部分群 H は $\mathrm{GL}(1,\mathbf{C})$ と同型である, すなわち

$$H = \left\{ g \in G \mid \rho(g) = g \right\} = \left\{ \mathrm{diag}(w, w^{-1}) \mid w \in \mathbf{C}^\times \right\} \simeq \mathrm{GL}(1,\mathbf{C}).$$

$\eta: H \to \mathbf{C}^\times$ を H の指標とする. C^∞-誘導表現 $C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_H^G(\eta)$ を考える. この表現の表現空間は

$$C_\eta^\infty(H\backslash G) = \{\varphi \in C^\infty(G) |\ \varphi(hg) = \eta(h)\varphi(g),\ \forall(h,g) \in H \times G\}.$$

で与えられ, G は右移動により $C_\eta^\infty(H\backslash G)$ に作用する. G の許容表現 π と H の指標 η に対して, 絡作用素の空間 $\mathcal{I}_{\pi,\eta}$ を

$$\mathcal{I}_{\pi,\eta} = \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi, C_\eta^\infty(H\backslash G)).$$

で定義する. このとき, タイプ (π,η) の新谷関数の空間 $S(\pi,\eta)$ を

$$S(\pi,\eta) = \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{T(f) |\ f \in \pi,\ T \in \mathcal{I}_{\pi,\eta}\}.$$

により定め, その元をタイプ (π,η) の新谷関数と呼ぶ. H の指標 η と K の有限次元表現 (τ, V_τ) に対して, G 上の $V_\tau^\vee$-値関数の空間 $C_{\eta,\tau}^\infty(H\backslash G/K)$ を

$$\left\{ \phi : G \overset{C^\infty}{\to} V_\tau^\vee \mid \phi(hgk) = \eta(h)\tau^\vee(k)^{-1}\phi(g),\ \forall(h,g,k) \in H \times G \times K \right\}.$$

により定義する. ここで $(\tau^\vee, V_\tau^\vee)$ は (τ, V_τ) の反傾表現である. 各 $\phi \in C_{\eta,\tau}^\infty(H\backslash G/K)$ に対して,

$$[R(X)\phi](g) := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi(g \cdot \exp(tX)) \quad (g \in G, X \in \mathfrak{g})$$

とおく. τ を G の許容表現 π の K-タイプとする. K-準同型写像 $\imath \in \mathrm{Hom}_K(\tau,\pi)$ に対して, 線形写像 $\imath^*: \mathcal{I}_{\pi,\eta} \to \mathrm{Hom}_K(\tau, C_\eta^\infty(H\backslash G)) \simeq C_{\eta,\tau}^\infty(H\backslash G/K)$ を $\imath$ による引き戻しとして定義する. 固定された $\imath \in \mathrm{Hom}_K(\tau,\pi)$ に対して, タイプ $(\pi,\eta;\tau)$ の新谷関数の空間 $S(\pi,\eta;\tau)$ を

$$S(\pi,\eta;\tau) = \mathrm{span}_{\mathbf{C}}\{\imath^*(T) |\ T \in \mathcal{I}_{\pi,\eta}\} \hookrightarrow C_{\eta,\tau}^\infty(H\backslash G/K).$$

と定め, その元をタイプ $(\pi,\eta;\tau)$ の新谷関数と呼ぶ. Hirano [H2] により, G の既約非ユニタリ主系列表現 $\pi_{[\nu,m]}$ と H の指標 η に対する新谷関数の一意性が示されている. よく知られているように普遍展開環の中心 $Z(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ が主系列表現 $\pi_{[\nu,m]}$ にスカラー倍で作用することから, 新谷関数の空間 $S(\pi_{[\nu,m]},\eta;\tau_{|m|})$ は次のような関数の空間の部分空間とみなされる:

$$\left\{ \phi \in C_{\eta,\tau}^\infty(H\backslash G/K) \;\middle|\; \begin{array}{ll} \text{(S1)} & 32[R(\Omega_1)\phi] = \{(\nu+m)^2 - 4\}\phi \\ \text{(S2)} & 32[R(\Omega_2)\phi] = \{(\nu-m)^2 - 4\}\phi \end{array} \right\}.$$

ここで $\tau = \tau_{|m|}$ である.

2.2 Generalized Cartan decomposition

G の部分集合 $\overline{A_+}$ を

$$\overline{A_+} = \left\{ \alpha(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \middle| \; t \geq 0 \right\}.$$

により定めると, 一般 Cartan 分解 $G = H\overline{A_+}K$ が成り立つ (例えば [He-Sc] 参照). したがって $\phi \in C^\infty_{\eta,\tau}(H\backslash G/K)$ はその $\overline{A_+}$ への制限 $\phi|_{\overline{A_+}}$ により決まる. 制限 $\phi|_{\overline{A_+}}$ を ϕ の動径成分と呼ぶ. 各 $\ell \in \mathbf{Z}, \mu \in \mathbf{C}$ に対して, H の指標 $\eta^\ell_\mu : H \to \mathbf{C}^\times$ を

$$\eta^\ell_\mu(\mathrm{diag}(w, w^{-1})) = |w|^\mu (w/|w|)^\ell, \quad w \in \mathbf{C}^\times.$$

により定める. 関数 $\phi \in C^\infty_{\eta,\tau}(H\backslash G/K), \eta = \eta^\ell_\mu, \tau = \tau_n$ に対し, 組 (G, H) の Weyl 群の作用を調べることで次を得る:

命題 2.2.1 $\eta = \eta^\ell_\mu, \tau = \tau_n$ とする. このとき $\phi \in C^\infty_{\eta,\tau}(H\backslash G/K), \phi(g) = \sum_{k=0}^n \phi_k(g) f_k^{(n)\vee}$ は次のような性質をもつ:

i) $\phi|_{A^+} \neq 0 \Rightarrow n \equiv \ell (\mathrm{mod} 2)$;

ii) $k \equiv \dfrac{n-\ell}{2} (\mathrm{mod} 2) \Rightarrow \phi_k$ は偶関数である;
$k \equiv \dfrac{n-\ell}{2} + 1 (\mathrm{mod} 2) \Rightarrow \phi_k$ は奇関数である;

iii) $(n - \ell - 2k)\phi_k(1_2) = 0, \quad 0 \leq k \leq n.$

2.3 Casimir operators

$C^\infty_{\eta,\tau}(H\backslash G/K)$ への $Z(\mathfrak{g}_\mathbf{C})$ の作用を具体的に書き下すことで, 次のような微分方程式系を得ることができる ([H2, Proposition 6.2.] を参照):

命題 2.3.1 タイプ $(\pi_{[\nu,m]}, \eta^\ell_\mu; \tau_{|m|})$ の新谷関数 $\phi(g) = \displaystyle\sum_{j=0}^{|m|} \phi_j(g) f_j^{(|m|)\vee}$ は次の二つの微分方程式系 $(\mathrm{D}\text{-}1)_{\nu,m}, (\mathrm{D}\text{-}2)_{\nu,m}$ をみたす:

$(\mathrm{D}\text{-}1)_{\nu,m}$:

$$\begin{aligned}
&j(j-1)\tanh^2(2t)\phi_{j-2}(\alpha(t)) + \frac{2\mu j \tanh(2t)}{\cosh(2t)}\phi_{j-1}(\alpha(t)) \\
&+ \left\{ \frac{d^2}{dt^2} + 2\left(\tanh(2t) + \frac{1}{\tanh(2t)} \right)\frac{d}{dt} + \frac{\mu^2 - 2j^2 + |m|(2j+1)}{\cosh^2(2t)} \right. \\
&\left. - \frac{\ell^2 + (|m| - 2j)^2}{\sinh^2(2t)} + \frac{2\ell(|m| - 2j)}{\tanh(2t)\sinh(2t)} - 2j^2 + |m|(2j+1) - \nu^2 - m^2 + 4 \right\}\phi_j(\alpha(t)) \\
&- \frac{2\mu(|m| - j)\tanh(2t)}{\cosh(2t)}\phi_{j+1}(\alpha(t)) + (|m| - j)(|m| - j - 1)\tanh^2(2t)\phi_{j+2}(\alpha(t)) = 0,
\end{aligned}$$

$(\mathrm{D}\text{-}2)_{\nu,m}$:

$$\begin{aligned}
&- j\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{2}{\tanh(2t)} - (|m| - 2j)\left(\tanh(2t) - \frac{1}{\tanh(2t)} \right) - \frac{\ell}{\sinh(2t)} \right\}\phi_{j-1}(\alpha(t)) \\
&+ \left\{ \frac{\mu(|m| - 2j)}{\cosh(2t)} - \nu m \right\}\phi_j(\alpha(t)) - (|m| - j)\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{2}{\tanh(2t)} \right. \\
&\left. + (|m| - 2j)\left(\tanh(2t) - \frac{1}{\tanh(2t)} \right) + \frac{\ell}{\sinh(2t)} \right\}\phi_{j+1}(\alpha(t)) = 0.
\end{aligned}$$

注意 2.3.2 上の微分方程式系 $(\text{D-1})_{\nu,m}, (\text{D-2})_{\nu,m}$ はパラメータ (ν, m) を $(-\nu, -m)$ に変えても不変である. したがって $m \geq 0$ としても一般性を失わない.

2.4 Translation of Shintani functions

タイプ $(\pi_{[\nu,m]}, \eta_\mu^\ell; \tau_{|m|})$ の新谷関数の明示公式を得るには§2.3で得られた微分方程式系 $(\text{D-1})_{\nu,m}, (\text{D-2})_{\nu,m}$ を実際に解く必要があるが, それらは非常に複雑で, 直接解くことは難しいように思える. これらの微分方程式系をうまく解くために, このサブセクションでは非ユニタリ主系列表現のパラメータを動かす Zuckerman テンソル ([Zu], または [K, Chapter X] 参照) を用いて, 絡作用素の空間の間の線形写像

$$Z_n : \mathrm{Hom}_G(\pi_{[\nu,m]}, C_\eta^\infty(H\backslash G)) \to \mathrm{Hom}_G(\pi_{[\nu+n,m+n]}, C_{\widehat{\eta}}^\infty(H\backslash G))$$

を構成する. ここで $\eta_n := \eta_n^n, \widehat{\eta} = \widehat{\eta}_n := \eta\eta_n$ である. 絡作用素 $Z_n(T)$ はいくつかの絡作用素の合成として定義される.

まず非負整数 $n \in \mathbf{N}_0$ に対し, 絡作用素

$$\varphi_n : \tau_n \to C_{\eta_n}^\infty(H\backslash G), \ f \mapsto \varphi_n(f)$$

を

$$\varphi_n(f)(g) = \langle f_0^{(n)\vee}, \tau_n(g)f \rangle, \quad f \in V_n$$

により定める. 各 $T \in \mathrm{Hom}_G(\pi_{[\nu,m]}, C_\eta^\infty(H\backslash G))$ に対して, 双線型形式

$$\pi_{[\nu,m]} \times \tau_n \to C_\eta^\infty(H\backslash G) \times C_{\eta_n}^\infty(H\backslash G), \quad (F, f) \mapsto (T(F), \varphi_n(f))$$

は, 絡作用素 $T \otimes \varphi_n : \pi_{[\nu,m]} \otimes \tau_n \to C_\eta^\infty(H\backslash G) \otimes C_{\eta_n}^\infty(H\backslash G)$ を引き起こす. $T \in \mathrm{Hom}_G(\pi_{[\nu,m]}, C_\eta^\infty(H\backslash G))$ に対し, $Z_n(T) : \pi_{[\nu+n,m+n]} \to C_{\widehat{\eta}}^\infty(H\backslash G)$ を次のような絡作用素の合成により定義する:

$$\begin{aligned}
\pi_{[\nu+n,m+n]} &\hookrightarrow \mathrm{Ind}_P^G(\xi_{[\nu,m]} \otimes \tau_n|_P) \\
&\to \pi_{[\nu,m]} \otimes \tau_n \\
&\overset{T\otimes\varphi_n}{\to} C_\eta^\infty(H\backslash G) \otimes C_{\eta_n}^\infty(H\backslash G) \\
&\to C_{\widehat{\eta}}^\infty(H\backslash G).
\end{aligned}$$

ここで, 絡作用素 $T \in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi_{[\nu,m]}, C_\eta^\infty(H\backslash G))$ と $F \in V_{[\nu+n,m+n]}$ に対して, $Z_n(T)(F)$ はタイプ $(\pi_{[\nu+n,m+n]}, \eta_{\mu+n}^{\ell+n})$ の新谷関数であることに注意する.

注意 2.4.1 パラメータの取り方によって Z_n の像が消えてしまう場合があるので, §3.2 で個別に調べる.

3 Explicit formulas of Shintani functions

このセクションでは2次元または3次元極小 K-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現に付随する新谷関数の明示公式についての結果を述べる (詳細は [G1]). 新谷関数 $\phi : G \to V_n^\vee$ に対して, その動径成分 $\phi|_A(\alpha(t))$ を単に $\phi(t)$ と書くことにする. また, V_n の標準基底 $\{f_j^{(n)}\}_j$ の双対基底により, V_n の双対空間 $V_n^\vee$ を $\mathbf{C}^{n+1}$ と同一視する. 各 $\mu, \nu \in \mathbf{C}$ 及び $\ell \in 2\mathbf{Z}$ に対し,

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \left(\frac{\mu + \nu + |\ell| + 2}{4}, -\frac{\mu - \nu - |\ell| - 2}{4}, \frac{|\ell|}{2} + 1 \right)$$

とおく.

3.1 Case of trivial minimal SU(2)-type

自明な極小 K-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現 $\pi_{[\nu,0]}$ に付随する新谷関数の明示公式については次の結果が知られている:

定理 3.1.1 (Hirano [H2, Theorem 6.6.]) 各 $\mu,\nu\in\mathbf{C}$ 及び $\ell\in 2\mathbf{Z}$ に対し, タイプ $(\pi_{[\nu,0]},\eta_\mu^\ell;\tau_0)$ の新谷関数の動径成分はスカラー倍を除いて

$$(\cosh(2t))^{(-\nu-2)/2}(\tanh(2t))^{|\ell|/2}{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\gamma;\tanh^2(2t)\right).$$

で与えられる. ここで ${}_2F_1(\alpha,\beta;\gamma;z)$ は Gauss の超幾何関数である.

注意 3.1.2 命題 2.2.1 (i) より, $\ell\in 2\mathbf{Z}$ としてよい.

3.2 Case of two-dimensional minimal SU(2)-type

このサブセクションでは 2 次元極小 K-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現 $\pi_{[\nu,1]}$ に付随する新谷関数の明示公式についての結果を述べる. $x=x(t)=1/\cosh(2t)$ とする.

定理 3.2.1 $\mu,\nu\in\mathbf{C},\ell\in 2\mathbf{Z}$ とする. また, $\mu+\nu+\ell+2\neq 0$ かつ $(\mu,\nu)\neq(-1,-1)$ と仮定する. このとき, タイプ $(\pi_{[\nu+1,1]},\eta_{\mu+1}^{\ell+1},\tau_1)$ の新谷関数 ϕ の動径成分は, スカラー倍を除いて次で与えられる:

$$\phi(\alpha(t))=\begin{pmatrix} -x^{(\nu+1)/2+1}(1-x^2)^{|\ell|/4}\sqrt{1+x}^{-1}\Delta_0^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x)\\ x^{(\nu+1)/2+1}(1-x^2)^{(|\ell|-2)/4}\sqrt{1+x}\Delta_1^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x)\end{pmatrix}$$
$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+|\ell|+2}{4},\frac{-\mu+\nu+|\ell|+2}{4};\frac{|\ell|}{2}+1;1-x^2\right).$$

ここで $\Delta_j^{(1)}(j=0,1)$ は次のように定義される微分作用素である:

$$\begin{aligned} x\Delta_0^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x)&=-x^2\left(2\delta_x+\mu+\nu+|\ell|+2\right)-x(\mu+\nu+\ell+2)+2\delta_x,\\ x\Delta_1^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x)&=-x^2\left(2\delta_x+\mu+\nu+|\ell|+2\right)+x(\mu+\nu+\ell+2)+2\delta_x.\end{aligned}$$

注意 3.2.2 命題 2.2.1 (i) より $\ell\in 2\mathbf{Z}$ のとしてよい.

まずタイプ $(\pi_{[\nu,1]},\eta_\mu^\ell;\tau_1)$ の新谷関数のみたす微分方程式を導出する. $t>0$ とする. 二つの微分作用素 $D_{\mu,\ell}^{(1)}(t),D_\ell^{(1)}(t)$ を

$$\begin{aligned} D_{\mu,\ell}^{(1)}(t)&=\frac{d^2}{dt^2}+2\left(\tanh(2t)+\frac{1}{\tanh(2t)}\right)\frac{d}{dt}+\frac{\mu^2+1}{\cosh^2(2t)}-\frac{\ell^2+1}{\sinh^2(2t)}+\frac{2\ell}{\tanh(2t)\sinh(2t)}+1,\\ D_\ell^{(1)}(t)&=\frac{d}{dt}+\tanh(2t)+\frac{1}{\tanh(2t)}+\frac{\ell}{\sinh(2t)}\end{aligned}$$

により定め, 微分作用素成分の行列 $A_+^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t),A_-^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t)$ を

$$A_+^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t)=\begin{pmatrix} D_{\mu,\ell}^{(1)}(t)-\nu^2+3 & -2\mu\dfrac{\tanh(2t)}{\cosh(2t)}\\ 2\mu\dfrac{\tanh(2t)}{\cosh(2t)} & D_{-\mu,-\ell}^{(1)}(t)-\nu^2+3\end{pmatrix},$$

$$A_-^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t) = \begin{pmatrix} \dfrac{-\mu}{\cosh(2t)}+\nu & D_\ell^{(1)}(t) \\ D_{-\ell}^{(1)}(t) & \dfrac{\mu}{\cosh(2t)}+\nu \end{pmatrix}$$

により定める. 命題 1.3.1 と命題 2.3.1 により, タイプ $(\pi_{[\nu,1]},\eta_\mu^\ell;\tau_1)$ の新谷関数の動径成分 $\phi(t) = {}^t(\phi_0(t),\phi_1(t))$ は

$$A_\pm^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t)\begin{pmatrix}\phi_0(t)\\ \phi_1(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

をみたすことがわかる.

注意 3.2.3 ある微分作用素成分の行列 $B(t)$ が存在して

$$A_+^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t) = B(t)A_-^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t)$$

が成り立つことが容易に確かめられる. したがって, 方程式 $A_-^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t)=0$ だけ考えれば十分である.

絡作用素 $T\in \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi_{[\nu,m]},C_\eta^\infty(H\backslash G))$ に対し, §3.4 で Zuckerman テンソルにより得られた $Z_1(T)$ を $\tau_1(\hookrightarrow \pi_{[\nu+1,1]})$ の基底に対して具体的に書き下すことにより, 次の微分作用素の交換関係式を得る. ここで $\mu+\nu+\ell+2\neq 0$ かつ $(\mu,\nu)\neq(-1,-1)$ のとき, $Z_1\not\equiv 0$ であることに注意する.

命題 3.2.4 $x=1/\cosh(2t)$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} A_-^{(1)}(\mu+1,\nu+1,\ell+1;x) &\begin{pmatrix} -x^{(\nu+3)/2}(1-x^2)^{|\ell|/4}\sqrt{1+x}^{\,-1}\Delta_0^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x) \\ x^{(\nu+3)/2}(1-x^2)^{(|\ell|-2)/4}\sqrt{1+x}\,\Delta_1^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^{(\nu+3)/2}(1-x^2)^{|\ell|/4}\sqrt{1+x} \\ -x^{(\nu+3)/2}(1-x^2)^{(|\ell|+2)/4}\sqrt{1+x}^{\,-1} \end{pmatrix} G\left(x,\frac{d}{dx}\right). \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} G\left(x,\frac{d}{dx}\right) &:= 4x(1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}+4\{\nu+1-(\nu+|\ell|+3)x^2\}\frac{d}{dx} \\ &\quad -\{\nu^2+2(|\ell|+2)\nu-\mu^2+4|\ell|+\ell^2+4\}x \qquad (3.1) \end{aligned}$$

である.

注意 3.2.5 微分方程式 $A_-^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x)=0$ は適当な操作により 5 点に特異点をもつ 2 階の Fuchs 型方程式に帰着する (§3.3 を参照). また, [Ma-Mo] は微分作用素の交換関係式を用いて, 5 点に特異点をもつ 2 階の Fuchs 型方程式を解き, $SL(2,\mathbf{R})$ のウェイト 1 の Maass 形式に付随する新谷関数の明示公式を証明している.

(定理 3.2.1 の証明) 微分作用素 $G\left(x,\dfrac{d}{dx}\right)$ は Gauss の超幾何微分作用素であることに注意する. Gauss の超幾何微分方程式の解空間は 2 次元であるが, いま $\ell\in 2\mathbf{Z}$ であることから, 特異点 $x=1(\Leftrightarrow t=0)$ における解で log を含むものが存在する. いまの場合, そのような解は不適である. したがって, 超幾何微分方程式の解として log を含まないものを選べば, 命題 3.2.4 から定理 3.2.1 を得る. □

残念ながら (μ,ν,l) の取り方次第では Z_1 の像が消えてしまう場合がある. 例えば, $\ell\geq 0$ かつ $\mu+\nu+\ell+2=0$ であるとき, 任意の $T\in\mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K)}(\pi_{[\nu,m]},C_\eta^\infty(H\backslash G))$ に対して

$$Z_1(T)(f_j^{(1)})=0 \quad (j=0,1)$$

となる. そのような場合には, 命題 3.2.4 からは, 方程式 $A_-^{(1)}(\mu,\nu,\ell;t)\phi(t)=0$ の解で $t=0$ まで延長可能なものは得られない. しかし, Z_1 の像が消えてしまう場合にも個別に方程式を調べることによって, すべての (μ,ν,ℓ) に対して新谷関数の明示公式を得ることができる.

定理 3.2.6 $\mu,\nu\in\mathbf{C},\ell\in 1+2\mathbf{Z}$ とする. また, $\mu+\nu+\ell-1=0$ または $(\mu,\nu)\neq(0,0)$ と仮定する. このとき, タイプ $(\pi_{[\nu,1]},\eta_\mu^\ell,\tau_1)$ の新谷関数 ϕ の動径成分はスカラー倍を除いて次で与えられる:

i) $\mu+\nu+\ell-1=0,\ell\geq 1$ かつ $(\mu,\nu)\neq(0,0)$ とする. このとき,

$$\phi(\alpha(t))=\begin{pmatrix} -x^{1-\nu/2}(1-x)^{-(\ell-1)/4}(1+x)^{-(\ell+1)/4}\psi^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x) \\ x^{1-\nu/2}(1-x)^{-(\ell+1)/4}(1+x)^{-(\ell-1)/4}\{\psi^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x)+2x^\nu(1-x^2)^{(\ell-1)/2}\} \end{pmatrix}.$$

ここで $\psi^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x)$ は

$$\psi^{(1)}(\mu,\nu,\ell;x):=\int_x^1 x^{\nu-1}(1-x)^{(\ell-3)/2}(1+x)^{(\ell-1)/2}(\mu x+\nu)dx.$$

ii) $\mu+\nu+\ell-1=0,\ell<1$ かつ $(\mu,\nu)\neq(0,0)$ とする. このとき,

$$\phi(\alpha(t))=\begin{pmatrix} x^{1-\nu/2}(1-x)^{-(\ell-1)/4}(1+x)^{-(\ell+1)/4} \\ -x^{1-\nu/2}(1-x)^{-(\ell+1)/4}(1+x)^{-(\ell-1)/4} \end{pmatrix}.$$

iii) $\ell\geq 1$ かつ $(\mu,\nu)=(0,0)$ とする. このとき,

$$\phi(\alpha(t))=\begin{pmatrix} x(1-x)^{(\ell-1)/4}(1+x)^{-(\ell+1)/4} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

iv) $\ell<1$ かつ $(\mu,\nu)=(0,0)$ とする. このとき,

$$\phi(\alpha(t))=\begin{pmatrix} 0 \\ x(1-x)^{-(\ell+1)/4}(1+x)^{(\ell-1)/4} \end{pmatrix}.$$

注意 3.2.7 命題 2.2.1 (i) より $\ell\in 1+2\mathbf{Z}$ のときを考えれば十分である.

3.3 Case of three dimensional minimal K-type

3 次元極小 K-タイプをもつ非ユニタリ主系列表現の場合にも, 定理 3.2.1 と同様に微分作用素の交換関係式を用いて新谷関数の明示公式が得られる: $x=x(t)=1/\cosh(2t)$ とする.

定理 3.3.1 $\mu,\nu\in\mathbf{C},\ell\in 2\mathbf{Z}$ として次の条件をみたすものを考える:

- $\mu+\nu+\ell+2\neq 0$;
- $(\mu+\nu+\ell+6)(\mu+\nu+|\ell|+2)\neq 0$ または $(|\ell|-\ell)(\nu+\mu+4)\neq 0$.

このとき, タイプ $(\pi_{[\nu+2,2]},\eta_{\mu+2}^{\ell+2},\tau_2)$ の新谷関数 ϕ の動径成分はスカラー倍を除いて次で与えられる:

$$\phi(\alpha(t))=\begin{pmatrix} x^{\nu/2+1}(1-x^2)^{|\ell|/4}(1+x)^{-1}E_0^{(2)}(\mu,\nu,\ell;x) \\ -x^{\nu/2+1}(1-x^2)^{(|\ell|-2)/4}E_1^{(2)}(\mu,\nu,\ell;x) \\ x^{\nu/2+1}(1-x^2)^{|\ell|/4}(1+x)E_2^{(2)}(\mu,\nu,\ell;x) \end{pmatrix}$$

$$\times {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu+|\ell|+2}{4}, \frac{-\mu+\nu+|\ell|+2}{4}, \frac{|\ell|}{2}+1; 1-x^2\right).$$

ここで $\delta_x = x\dfrac{d}{dx}$ であり, $E_j^{(2)}(\mu,\nu,\ell;x)$ $(j=0,1,2)$ は

$$\begin{aligned}
xE_0^{(2)}&(\mu,\nu,\ell;x) = \\
&3x^4(\mu+2)(2\delta_x+\mu+\nu+|\ell|+2) \\
&\quad + 3x^3(\mu+\nu+\ell+6)(2\delta_x+\mu+\nu+|\ell|+2) \\
&\qquad + 3x^2\{2(\nu-\mu)\delta_x+\nu^2+(\mu+|\ell|+\ell+6)\nu \\
&\qquad\qquad + (\ell+4)\mu+\ell^2+2|\ell|+4\ell+8\} \\
&\qquad\qquad\quad - 6x(\mu+\nu+\ell+6)\delta_x - 6(\nu+2)\delta_x, \\
xE_1^{(2)}&(\mu,\nu,\ell;x) = \\
&3x^4(\mu+2)(2\delta_x+\mu+\nu+|\ell|+2) \\
&\quad + 3x^2\{2(\nu-\mu)\delta_x-(\mu-|\ell|+\ell+2)\nu \\
&\qquad - \mu^2-(\ell+4)\mu+2|\ell|-4\ell-4\} - 6(\nu+2)\delta_x, \\
xE_2^{(2)}&(\mu,\nu,\ell;x) = \\
&3x^4(\mu+2)(2\delta_x+\mu+\nu+|\ell|+2) \\
&\quad - 3x^3(\mu+\nu+\ell+6)(2\delta_x+\mu+\nu+|\ell|+2) \\
&\qquad + 3x^2\{2(\nu-\mu)\delta_x+\nu^2+(\mu+|\ell|+\ell+6)\nu \\
&\qquad\qquad + (\ell+4)\mu+\ell^2+2|\ell|+4\ell+8\} \\
&\qquad\qquad\quad + 6x(\mu+\nu+\ell+6)\delta_x - 6(\nu+2)\delta_x
\end{aligned}$$

で定義される.

注意 3.3.2 命題 2.2.1 (i) から $\ell \in 2\mathbf{Z}$ としてよい.

(μ,ν,ℓ) が定理 3.3.1 の仮定を満たさない場合, Z_1 の像が消えてしまう可能性があるため微分作用素の交換関係式を使うことができない. しかし, 定理 3.2.6 と同様に, 個別に方程式を調べることにより, すべての (μ,ν,ℓ) に対して新谷関数の明示公式を得ることができる.

定理 3.3.3 $\mu,\nu \in \mathbf{C}, \ell \in 2\mathbf{Z}$ とする. このとき, タイプ $(\pi_{[\nu,2]}, \eta_\mu^\ell, \tau_2)$ の新谷関数 ϕ の動径成分はスカラー倍を除いて次で与えられる：

i) $\ell \geq 0, \mu+\nu+\ell-4=0$ かつ $(\mu,\nu) \neq (0,0)$ のとき

$$\phi(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} (\mu x-\nu)^{-1}D_\ell^{(2)}(x) \\ 1 \\ -(\mu x+\nu)^{-1}D_{-\ell}^{(2)}(x) \end{pmatrix} x^{1-\nu/2}(1-x^2)^{-\ell/4}(\mu x^2+\nu)\psi_1^{(2)}(\mu,\nu,\ell;x).$$

ここで $\psi_1^{(2)}(\mu,\nu,\ell;x)$ と $D_\ell^{(2)}(x)$ は

$$\psi_1^{(2)}(\mu,\nu,\ell;x) := \int_x^1 \frac{x^{\nu-1}(1-x^2)^{\ell/2}(\mu^2x^2-\nu^2)}{\mu^2x^6+\mu(2\nu-\mu)x^4+\nu(\nu-2\mu)x^2-\nu^2}dx,$$

$$D_\ell^{(2)}(x) := -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left\{2x(1-x^2)\frac{d}{dx}+2x^2-\ell x-2\right\}.$$

ii) $\ell < 0$ かつ $\mu+\nu+\ell-4=0$ のとき

$$\phi(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} x^{1-\nu/2}(1-x)^{-(\ell-2)/4}(1+x)^{-(\ell+2)/4}(\mu x^2+4x+\nu) \\ -x^{1-\nu/2}(1-x^2)^{-\ell/4}(\mu x^2+\nu) \\ x^{1-\nu/2}(1-x)^{-(\ell+2)/4}(1+x)^{-(\ell-2)/4}(\mu x^2-4x+\nu) \end{pmatrix}.$$

iii) $\ell \geq 0, \mu+\nu+\ell=0$ かつ $(\mu,\nu)\neq(0,0)$ のとき

$$\phi(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} (\mu x-\nu)^{-1}D_\ell^{(2)}(x) \\ 1 \\ -(\mu x+\nu)^{-1}D_{-\ell}^{(2)}(x) \end{pmatrix} x^{1-\nu/2}(1-x^2)^{-\ell/4}\psi_2^{(2)}(\mu,\nu,\ell;x).$$

ここで

$$\psi_2^{(2)}(\mu,\nu,\ell;x) := \int_x^1 x^{\nu-1}(1-x^2)^{\ell/2-1}(\mu^2x^2-\nu^2)dx.$$

iv) $\ell < 0$ かつ $\mu+\nu+\ell=0$ のとき

$$\phi(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} -x^{1-\nu/2}(1-x^2)^{(2-\ell)/4}(1+x)^{-1} \\ x^{1-\nu/2}(1-x^2)^{-\ell/4} \\ -x^{1-\nu/2}(1-x^2)^{(2-\ell)/4}(1-x)^{-1} \end{pmatrix}.$$

v) $\ell \geq 2, \mu+\nu=0$ かつ $\nu\neq 0$ のとき

$$\phi(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} -\nu^{-1}(1+x)^{-1}D_\ell^{(2)}(x) \\ 1 \\ -\nu^{-1}(1-x)^{-1}D_{-\ell}^{(2)}(x) \end{pmatrix} (1-x^2)^{\ell/2}{}_2F_1\left(\frac{\ell}{4},\frac{\ell-2\nu}{4},\frac{\ell}{2};1-x^2\right).$$

vi) $\ell < 2, \mu+\nu=0$ かつ $\nu\neq 0$ のとき

$$\phi(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} -\nu^{-1}(1+x)^{-1}D_\ell^{(2)}(x) \\ 1 \\ -\nu^{-1}(1-x)^{-1}D_{-\ell}^{(2)}(x) \end{pmatrix} (1-x^2){}_2F_1\left(1-\frac{\ell}{4},1-\frac{\ell+2\nu}{4},2-\frac{\ell}{2};1-x^2\right)$$

vii) $(\mu,\nu,\ell)=(0,0,4)$ のとき

$$\phi(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} x(1-x)^{-1/2}(1+x)^{-3/2}(1-x^2-2x\log x) \\ 0 \\ x(1-x)^{-3/2}(1+x)^{-1/2}(1-x^2+2x\log x) \end{pmatrix}.$$

viii) $(\mu,\nu,\ell)=(0,0,0)$ のとき

$$\phi(\alpha(t)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\cosh(2t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

注意 3.3.4 命題 2.2.1 (i) から $\ell \in 2\mathbf{Z}$ としてよい.

命題 2.3.1 から, タイプ $(\pi_{[\nu,2]},\eta_\mu^\ell;\tau_2)$ の新谷関数 $\phi(g)={}^t(\phi_0(g),\phi_1(g),\phi_2(g))$ の動径成分 $\phi(\alpha(t))=\phi(t)$ は微分方程式 $A_-^{(2)}(\mu,\nu,\ell;t)\phi(t)=0$ をみたす. ここで $A_-^{(2)}(\mu,\nu,\ell;t)$ は微分方程式 (D-2)$_{\nu,2}$ から得られる, 成分に高々1階の微分作用素をもつ 3×3 行列である. $y=1/\cosh^2(2t)$ と変数変換すると, 微分

方程式 $A_-^{(2)}(\mu,\nu,\ell;y)\phi(y)=0$ は ϕ の第 2 成分 ϕ_1 に関する 4 点 (以下) に特異点をもつ 2 階 Fuchs 型方程式 (Heun の微分方程式) に帰着する. 簡単のために $\mu,\nu\neq 0,\mu^2\neq\nu^2$ と仮定する. このとき, ある微分作用素成分の横ベクトル $B(\mu,\nu,\ell;y)$ が存在して

$$B(\mu,\nu,\ell;y)A_-^{(2)}(\mu,\nu,\ell;y)=\left(\ 0\ ,\frac{2\nu}{(1-y)(\mu^2y-\nu^2)}P^{(2)}_{\mu,\nu,\ell}\left(y,\frac{d}{dy}\right),\ 0\ \right).$$

が成り立つ. ここで $P^{(2)}_{\mu,\nu,\ell}\left(y,\frac{d}{dy}\right)$ は Heun の微分作用素である. 微分方程式

$$P^{(2)}_{\mu,\nu,\ell}\left(y,\frac{d}{dy}\right)\phi_1(y)=0 \tag{3.2}$$

の Riemann 図式は次で与えられる:

$$\left\{\begin{matrix} y=0 & 1 & \dfrac{\nu^2}{\mu^2} & \infty \\ \dfrac{\nu+2}{4} & \dfrac{|\ell|}{4} & 0 & \dfrac{\mu-2}{4} \\ -\dfrac{\nu-2}{4} & -\dfrac{|\ell|}{4} & 2 & \dfrac{-\mu-2}{4} \end{matrix}\right\}.$$

微分作用素の行列 $A_-^{(2)}(\mu,\nu,\ell;y)$ に関する交換関係式から, Heun の微分作用素 $P^{(2)}_{\mu,\nu,\ell}\left(y,\frac{d}{dy}\right)$ に関する交換関係式を得る:

命題 3.3.5

$$P^{(2)}_{\mu+2,\nu+2,\ell+2}\left(y,\frac{d}{dy}\right)Q^{(2)}\left(y,\frac{d}{dy}\right)=R^{(2)}\left(y,\frac{d}{dy}\right)G\left(y,\frac{d}{dy}\right).$$

ここで $Q^{(2)}\left(y,\frac{d}{dy}\right)$, $R^{(2)}\left(y,\frac{d}{dy}\right)$ はある具体的に書き下すことのできる 1 階の微分作用素であり, $G\left(y,\frac{d}{dy}\right)$ は微分作用素 (3.1)(を $y=x^2$ と変数変換したもの) である.

謝辞

講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの成田宏秋先生, 林田秀一先生に, この場を借りて心より感謝申し上げます.

参考文献

[G1] K. Gejima, *Shintani functions on* SL$(2,\mathbf{C})$ *and Heun's differential equations*, (2015), submitted.

[G2] ———, 「$SL(2,\mathbf{C})$ 上の新谷関数と *Heun* の微分方程式」, 第 9 回福岡数論研究集会報告集 (2014), 81-90.

[He-Sc] G. Heckman, H. Schlichtkrull, *Harmonic analysis and special functions on symmetric spaces*, Perspect. Math. **16**, Academic Press (1994).

[H1] M. Hirano, *Shintani functions on* GL$(2,\mathbf{R})$, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 1709-1721.

[H2] ———, *Shintani functions on* GL$(2,\mathbf{C})$, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 1535-1550.

[J-L] H. Jacquet, R. P. Langlands, *Automorphic forms on* GL(2), Lecture Notes in Math., vol.114, Springer-Verlag (1970).

[K] A. W. Knapp, *Representation theory of semisimple groups*, Princeton Univ. Press, Princeton (1986).

[Ma-Mo] M. Maeda, T. Moriyama, *The Hyperbolic Fourier Expansion of Maass Forms and Zuckerman's Tensoring*, preprint (2015).

[Mu-S1] A. Murase, T. Sugano, *Shintani function and its application to automorphic L-functions for classical groups: I, The orthogonal group case*, Math. Ann. **299** (1994), 17-56.

[Mu-S2] ———, *Shintani functions and automorphic L-functions for* GL(n), Tohoku Math. J. **48** (1996), 165-202.

[Zu] G. Zuckerman, *Tensor products of finite and infinite dimensional representations of semisimple Lie groups*, Ann. of Math. **106** (1977), 295-308.