

# 多様体上の相対ハーディ型不等式とシュレーディンガー作用素の離散固有値

芥川 和雄\*

平成 27 年 3 月 12 日

## 1 序.

本稿は、久村裕憲氏 (静岡大・理) との共同研究「[AK], Geometric relative Hardy inequalities and the discrete spectrum of Schrödinger operators on manifolds, Calc. Var. Partial Differential Equations 48 (2013), 67–88.」の研究動機および結果の簡潔な解説である。

量子力学における 2 体問題で、一つの粒子は十分に重くて動かない場合を考えると、もう一つの粒子に対する振る舞いはシュレーディンガー作用素  $-\Delta + V(x)$  ( $x \in \mathbb{R}^n$ ) (特にそのスペクトル) の数学的解析により理解される。その離散固有値は束縛状態にある粒子のエネルギーに対応し、(絶対) 連続スペクトルは粒子の散乱状態に深く関係する (cf. [7, 10, 15, 20, 21, 22])。本稿では、束縛状態の粒子が異なる無限個のエネルギーレベルを持つかどうか、すなわち離散固有値の取る値が無限個あるかどうかを与えられたポテンシャル  $V(x)$  の減衰オーダーで判定することを話題にする。また以下、背景の空間の次元は  $n \geq 2$  とする。

先ず次の決定的な結果から紹介する。

**定理 RSK** (Reed-Simon [22], Kirsch-Simon [11]). ポテンシャルを  $V \in C^0(\mathbb{R}^n)$  とする  $L^2(\mathbb{R}^n)$  上のシュレーディンガー作用素  $-\Delta + V(x)$  を考える。  $(-\Delta + V(x))|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}$  は本質的に自己共役で、その本質的スペクトルは  $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta + V(x)) = [0, \infty)$  を満たしているとする。

(i) ある  $R_0 > 0$  が存在して  $V(x)$  が

$$V(x) \geq -\frac{(n-2)^2}{4r^2} \quad \text{for } r := |x| \geq R_0$$

を満たしているとする。離散固有値の集合  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta + V(x))$  は有限集合である。

(ii) ある  $\delta > 0$  と  $R_1 > 0$  が存在して  $V(x)$  が

$$V(x) \leq -(1+\delta)\frac{(n-2)^2}{4r^2} \quad \text{for } r \geq R_1$$

---

\*Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, Tokyo 152-8551, Japan  
e-mail: akutagawa@math.titech.ac.jp  
supported in part by the Grant-in-Aid for Challenging Exploratory Research, Japan Society for the Promotion of Science, No. 24654009.

を満たしているとする、 $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta + V(x))$  は無限集合である。

ここで次の二つの基本的な事実を述べておく。一つは、 $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta) = [0, \infty)$ 。もう一つは、 $V(x) \in C^0(\mathbb{R}^n)$  で  $V(x) \rightarrow 0$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) であるならば、 $(-\Delta + V(x))|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^n)}$  は本質的に自己共役で  $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta + V) = [0, \infty)$  となる (cf. [7])。よって無限遠における  $V(x)$  の漸近挙動で  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta + V(x))$  は有限か無限かを判定することのみ興味を持つならば、上記の定理 RSK の  $V(x)$  に関する仮定は理にかなったものである。(  $V(x)$  が非動径的な減衰をする場合や  $n = 2$  の場合には、文献 [9], [19] などがある。 )

集合  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta + V(x))$  が有限か無限かを判定する  $V(x)$  のボーダーラインの減衰を知るためには、次のハーディの不等式 (不確定性原理の補題とも呼ばれる cf. [21, 7]) が必須である。

ハーディの不等式.

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 dx \geq \frac{(n-2)^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^2}{r^2} dx \quad \text{for } u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n).$$

以上の話は、背景空間が平坦で重力を考慮していない。重力を考慮すると、集合  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta + V(x))$  の有限性・無限性は重力からどのように影響を受けるか、このことに興味を持って考えたのが本稿の内容 (i.e., 久村氏との共同研究) である。

## 2 幾何的相対ハーディ不等式とその応用.

宇宙レベルで考えると量子力学における 2 体問題は短時間の現象を扱っているので、背景の  $(n+1)$  次元時空は静的 (あるいはそれに十分近い) と仮定することは理にかなっており、その時間スライスである非コンパクトな  $n$  次元完備リーマン多様体  $(M^n, g = (g_{ij}))$  上でシュレーディンガー作用素  $-\Delta_g + V(x)$  を考えることになる。ここで  $-\Delta_g$  は  $(M, g)$  上のラプラス・ベルトラミ作用素

$$-\Delta_g u(x) := -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_{x^i} \left( \sqrt{|g|} g^{ij} \partial_{x^j} u(x) \right), \quad |g| := \det(g_{ij})$$

を表す。もちろんユークリッド空間  $\mathbb{R}^n$  上では  $\Delta_g = \Delta$  である。古典的な (量子重力ではないという意味) 重力は弱いがロングレンジでの力であり、他方量子力学における 2 体問題で扱う背景場は強いがショートレンジの力である。このようなものを同時に扱うことにはいかに物理的意味があるのか躊躇するところであるが、ここでは純粋に数学の問題として考えることにする。ハーディの不等式の証明には、物理的 (i.e., 作用素論的) な証明と数学的な証明の二つがある。後者の証明は、次の 1 次元の古典的ハーディの不等式 [8, Theorem 327] を使うものである。

$$\int_0^\infty |f'(t)|^2 dt \geq \int_0^\infty \frac{f(t)^2}{4t^2} dt \quad \text{for all } f \in C_c^1(0, \infty).$$

この不等式を使うと、背景空間がユークリッド空間  $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, g_E)$  から極を持つリーマン多様体へと自然に拡張できる。ただし  $(M, g)$  が極  $p_0 \in M$  を持つリーマン多様体であるとは、 $p_0$  における指数写像  $\exp_{p_0} : T_{p_0} M \rightarrow M$  が微分同相写像になるときにいう。このとき  $M$  は指数写像  $\exp_{p_0}$  により  $\mathbb{R}^n$  と微分同相になり、それによる極座標  $x = (r, \theta) \in [0, \infty) \times S^{n-1}(1) \cong \mathbb{R}^n$  を使うと

$g(x) = dr^2 + r^2 \cdot h(r, \theta)$ ,  $h(r, \theta) := g|_{S^{n-1}(r)}$  と表される.

**幾何的ハーディ不等式.**  $(M, g)$  を極  $p_0 \in M$  を持つリーマン多様体とし,  $r(x) := \text{dist}_g(x, p_0)$ ,  $x \in M$  とおく. このとき任意の  $u \in C_c^\infty(M)$  に対して, 次が成立する.

$$(2) \quad \int_M |\nabla u|^2 d\mu_g \geq \int_M \left\{ \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{4}(\Delta_g r)^2 - \frac{1}{2}|\nabla dr|^2 - \frac{1}{2}\text{Ric}_g(\nabla r, \nabla r) \right\} u^2 d\mu_g.$$

ここで  $d\mu_g$ ,  $\text{Ric}_g$  は, それぞれ  $g$  のリーマン体積測度およびリッチ曲率を表す.

上記の被積分関数の各項の幾何的意味に関しては, この後の幾何的相対ハーディ不等式のところで解説する. また上で '自然に拡張できる' と述べたが, 微分幾何におけるポホナー公式を非自明に使う箇所があり, そこがこの不等式の証明のキーポイントである.

**注意.**  $(M, g) = \mathbb{R}^n$  の場合は,

$$\Delta r = \frac{n-1}{r}, \quad |\nabla dr|^2 = \frac{n-1}{r^2}, \quad \text{Ric}_{g_E}(\nabla r, \nabla r) = 0$$

となり, 不等式 (2) は不等式 (1) と一致する.

さて重力は空間を歪め, 空間のトポロジーチェンジを引き起こす. 極を持つリーマン多様体は  $\mathbb{R}^n$  と微分同相であるので, このままでは適応できるリーマン多様体の範囲が広いとは言えない. 非常に一般的な設定では Carron [4] による次の結果がある.

**定理 C.**  $(M, g)$  を完備リーマン多様体とする. ある関数  $\rho \in W^{1,2}(M)$  と正定数  $C$  が存在し,  $M$  上で  $\rho \geq 0$ ,  $|\nabla \rho| = 1$ ,  $\Delta_g \rho \geq \frac{C}{\rho}$  が満たされているとする. このとき,

$$(3) \quad \int_{M-\rho^{-1}(0)} |\nabla u|^2 d\mu_g \geq \int_{M-\rho^{-1}(0)} \frac{(C-1)^2}{4\rho^2} u^2 d\mu_g \quad \text{for } u \in C_c^\infty(M-\rho^{-1}(0))$$

が成立する.

**注意.** 特別な状況でない限り, 定理 C 内の関数  $\rho$  としてはある点  $p \in M$  からの距離関数  $r(x) := \text{dist}_g(x, p)$ ,  $x \in M$  を考えることになる.  $(M, g)$  が極を持つリーマン多様体でなくても,  $g$  の断面曲率  $K_g$  が非正  $K_g \leq 0$  であれば不等式  $\Delta_g r \geq \frac{C}{r}$  は成立する. また  $(M, g) = \mathbb{R}^n$  のとき,  $\Delta_g r = \frac{n-1}{r}$  となり不等式 (3) は不等式 (1) と一致する. しかしながら後で述べるように,  $(M, g)$  が例えば双曲空間の場合には不等式 (3) はよい評価を与えない. その他の結果 [12, 13] もあるが状況は同様である.

そこで十分広いクラスのリーマン多様体上で成立し, かつ集合  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_g + V(x))$  の有限性・無限性を判定するための精密な評価を導くハーディ型不等式を考える. 幾何的ハーディ不等式 (2) は, 古典的ハーディの不等式を使う箇所以外, 等式変形で得られる精密な不等式である. したがってこの不等式を十分広いクラスのリーマン多様体上で適応出来るように改良することを試みる.

古典的ハーディの不等式における許容関数  $f$  は  $C_c^\infty(0, \infty)$  で  $f(0) = 0$  となる制限がついている. これが,  $(M, g)$  を極を持つリーマン多様体に制限しなければならない, 技術的な理由である.  $f(0) = 0$  の制限を外すと, 古典的ハーディの不等式は次のようになる.

$$(4) \quad \int_R^\infty |f'(t)|^2 dt \geq \int_R^\infty \frac{f(t)^2}{4t^2} dt - \frac{f(R)^2}{2R} \quad \text{for } f \in C_c^1[0, \infty), R > 0.$$

他方, 集合  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_g + V(x))$  の有限性・無限性の判定のためには, ハーディ型不等式は  $M$  上全体で成立する必要はなく,  $M$  の無限遠を含む部分領域上のみで成立していればよい. つまりハーディ型不等式の相対化が出来ればよいことになる. このことにより  $M$  のトポロジーの自由度が広がる. ただしこの場合でも, ハーディ型不等式で扱う許容関数  $u$  はあくまで  $u \in C_c^\infty(M)$  であり, 考えている部分領域の境界でゼロとなる関数ではない. 不等式 (4) における右辺の項  $-\frac{f(R)^2}{2R}$  は, ハーディ型不等式の相対化の試みにおいてネガティブな効果をもたらし, 相対化は一見不可能にも思える. しかし実は考えている部分領域の境界に対する十分にマイルドな幾何的条件設定の下でこの困難は克服できる. 次が我々が得た幾何的相対ハーディ不等式である.

**幾何的相対ハーディ不等式.**  $(M, g)$  を非コンパクトな  $n$  次元完備リーマン多様体とする.  $M$  の一つのエンド  $E$  はコンパクトで連結な  $C^\infty$  の境界  $W := \partial E$  を持ち, 外向き法写像  $\exp_W : \mathcal{N}^+(W) \rightarrow E$  は微分同相写像であると仮定する (see Fig. 1). ここで

$$\mathcal{N}^+(W) := \{v \in TM|_W \mid v \text{ は } W \text{ に対する外向き法ベクトル}\}$$

である. さらにある正数  $R > 0$  存在して,

$$H_W := \text{trace}(\nabla \nu) \geq \frac{1}{R} \quad \text{on } W$$

となることを仮定する. ここで  $H_W$ ,  $\nabla$ ,  $\nu$  は, それぞれ  $W \subset (M, g)$  の平均曲率,  $g$  に関する共変微分,  $W$  に対する外向き単位法ベクトル場を表す. いま  $\rho(x)$  を

$$\rho(x) := \text{dist}_g(x, W), \quad r(x) := \rho(x) + R \quad \text{for } x \in E$$

とおくと, 任意の  $u \in C_c^\infty(M)$  に対して次の不等式が成立する.

$$\begin{aligned} (5) \quad & \int_E |\nabla u|^2 d\mu_g \\ & \geq \int_E \left\{ \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{4}(\Delta_g r)^2 - \frac{1}{2}|\nabla dr|^2 - \frac{1}{2}\text{Ric}_g(\nabla r, \nabla r) \right\} u^2 d\mu_g + \frac{1}{2} \int_W \left( \Delta_g r - \frac{1}{R} \right) u^2 d\sigma_g \\ & \geq \int_E \left\{ \frac{1}{4r^2} + \frac{1}{4}(\Delta_g r)^2 - \frac{1}{2}|\nabla dr|^2 - \frac{1}{2}\text{Ric}_g(\nabla r, \nabla r) \right\} u^2 d\mu_g. \end{aligned}$$

ただし  $d\sigma_g$  は,  $(n-1)$  次元リーマン多様体  $(W, g|_W)$  のリーマン体積測度を表す. 特に  $(M, g)$  が極  $p_0 \in M$  を持つリーマン多様体のときは,  $E = M$ ,  $r(x) := \text{dist}_g(x, p_0)$  とおくと不等式 (5) は不等式 (2) と一致する.

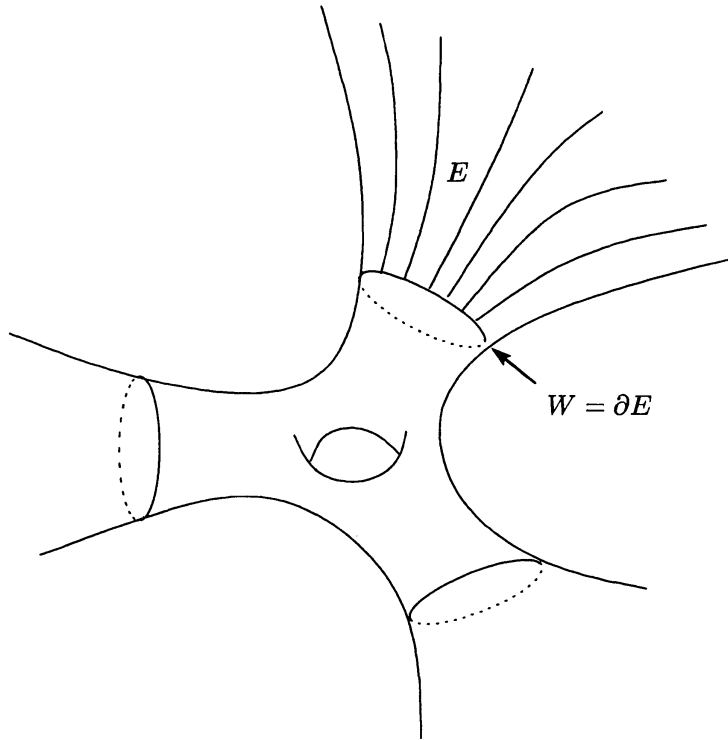


Figure 1

**注意.** (i) 点  $x_0 \in E$  に対して,  $(\nabla dr)(x_0)$ ,  $(\Delta_g r)(x_0)$  はそれぞれ距離関数  $r$  の  $x_0$  におけるレベル超曲面  $r^{-1}(r(x_0)) = \{x \in E \mid r(x) = r(x_0)\}$  の第2基本形式および平均曲率と一致する. したがって幾何的(相対)ハーディ不等式の右辺の被積分関数に現れる項は,  $1/4r^2$  を除けば, すべて  $(M, g)$  およびレベル超曲面  $r^{-1}(r(x_0))$  の曲率にかかわるものである. よって集合  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_g + V(x))$  の有限性・無限性は, ポテンシャル  $V(x)$  および背景空間の重力の効果 による減衰オーダーのみで判定できることとなる.

(ii)  $(M, g)$  を  $n$  次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, g_{\mathbb{E}})$  (resp. 定負曲率  $-\kappa$  の  $n$  次元双曲空間  $\mathbb{H}^n(-\kappa) = (\mathbb{H}^n(-\kappa), g_{\kappa})$ ) とする. 任意の  $R_1 > 0$  に対して,  $\mathbb{R}^n$  内の (resp.  $\mathbb{H}^n(-\kappa)$  内の) 半径  $R_1$  の  $\mathbf{0}$  中心の測地的開球体を  $B_{R_1}(\mathbf{0})$  とおく.  $E_{R_1} := \mathbb{R}^n - B_{R_1}(\mathbf{0})$  (resp.  $E_{R_1} := \mathbb{H}^n(-\kappa) - B_{R_1}(\mathbf{0})$ ) および  $W := \partial B_{R_1}(\mathbf{0})$  とおくと,

$$H_W = \begin{cases} \frac{n-1}{R_1} & \text{if } (M, g) = \mathbb{R}^n, \\ (n-1) \sqrt{\kappa} \coth(\sqrt{\kappa} R_1) & \text{if } (M, g) = \mathbb{H}^n(-\kappa) \end{cases}$$

となる. したがって幾何的相対ハーディ不等式においては,  $E := E_{R_1}$  とおくと, 任意の  $x \in E_{R_1} = \mathbb{R}^n - B_{R_1}(\mathbf{0})$  (resp.  $E_{R_1} = \mathbb{H}^n(-\kappa) - B_{R_1}(\mathbf{0})$ ) に対して,

$$R := \begin{cases} \frac{R_1}{n-1} & \text{if } (M, g) = \mathbb{R}^n, \\ \frac{\tanh(\sqrt{\kappa} R_1)}{(n-1) \sqrt{\kappa}} & \text{if } (M, g) = \mathbb{H}^n(-\kappa) \end{cases}$$

および

$$r(x) := \rho(x) + R = \begin{cases} \operatorname{dist}_g(x, \partial B_{R_1}(\mathbf{0})) + \frac{R_1}{n-1} & \text{if } (M, g) = \mathbb{R}^n, \\ \operatorname{dist}_g(x, \partial B_{R_1}(\mathbf{0})) + \frac{\tanh(\sqrt{\kappa}R_1)}{(n-1)\sqrt{\kappa}} & \text{if } (M, g) = \mathbb{H}^n(-\kappa) \end{cases}$$

とおけばよいことが分かる。このとき項  $(\Delta_g r - \frac{1}{R_1})|_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0})}$  は非負となり、不等式(5)における境界積分は無視できることとなる。ここで挙げた例は全て空間が一様に広がっている例である。平均曲率はあくまで第2基本形式の平均なので、空間のある方向には拡がり残りの方向には縮んでいる例で項  $(\Delta_g r - \frac{1}{R_1})|_{\partial B_{R_1}(\mathbf{0})}$  が非負となるものは多数存在する (cf. [AK, §3]). 要はそれら拡大・縮小の比率の問題である。

(iii) Kombe-Özaydin [12, 13] は、非コンパクト完備リーマン多様体上でハーディ型不等式を得ている。しかし彼らの結果は Fabes-Kenig-Serapioni [5] による (ユークリッド的) ウェイト付きポアンカレおよびソボレフ不等式に強く依存しているので、例えば彼らの得た  $(\mathbb{H}^n(-1), g_1)$  上の標準的ハーディ型不等式は (see Theorem 3.1 in [12] and Theorem 2.4 in [13] for the case  $\alpha = 0, q = 2$ ):

$$\int_{\mathbb{H}^n(-1)} |\nabla u|^2 d\mu_{g_1} \geq \int_{\mathbb{H}^n(-1)} \left\{ \frac{(n-2)^2}{4r^2} + \frac{c}{(1 + \cosh r)^n} \right\} u^2 d\mu_{g_1}$$

となり、以下で述べる  $(\mathbb{H}^n(-1), g_1)$  上の幾何的相対ハーディ不等式ほどよい評価を与えない。また以下の幾何的相対ハーディ不等式で、 $r \nearrow \infty$  とするとき、右辺の被積分関数は  $\sigma_{ess}(-\Delta_{g_1})$  のボトム  $(n-1)^2/4$  に単調収束するのは意味深長である。

幾何的相対ハーディ不等式を  $(\mathbb{H}^n(-\kappa), g_\kappa)$  上で考えると、次が得られる。

$\mathbb{H}^n(-\kappa)$  上の幾何的相対ハーディ不等式. 任意の  $u \in C_c^\infty(\mathbb{H}^n(-\kappa))$  と  $R > 0$  に対して次が成立する。

$$(6) \quad \int_{\mathbb{H}^n(-\kappa) - B_R(\mathbf{0})} |\nabla u|^2 d\mu_{g_\kappa} \geq \int_{\mathbb{H}^n(-\kappa) - B_R(\mathbf{0})} \left\{ \frac{(n-1)^2\kappa}{4} + \frac{1}{4\left(r - R + \frac{\tanh(\sqrt{\kappa}R)}{(n-1)\sqrt{\kappa}}\right)^2} + \frac{(n-1)(n-3)\kappa}{4 \sinh^2(\sqrt{\kappa}r)} \right\} u^2 d\mu_{g_\kappa}.$$

特に、

$$(7) \quad \int_{\mathbb{H}^n(-\kappa)} |\nabla u|^2 d\mu_{g_\kappa} \geq \int_{\mathbb{H}^n(-\kappa)} \left\{ \frac{(n-1)^2\kappa}{4} + \frac{1}{4r^2} + \frac{(n-1)(n-3)\kappa}{4 \sinh^2(\sqrt{\kappa}r)} \right\} u^2 d\mu_{g_\kappa}.$$

ここで、 $r(x) := \operatorname{dist}_{g_\kappa}(x, \mathbf{0})$ .

注意.

$$\lim_{\kappa \searrow 0} \frac{\sinh(\sqrt{\kappa}r)}{\sqrt{\kappa}r} = 1,$$

なので、不等式(7)において  $\kappa \searrow 0$  とすると、 $\mathbb{R}^n$  上のハーディの不等式(1)が再生される。

以下ポテンシャル  $V(x)$  は、 $V(x) \in C^0(M)$  でかつ  $(-\Delta_g + V(x))|_{C_c^\infty(M)}$  は本質的に自己共役とする。上記の結果を使うと次の  $\mathbb{H}^n(-\kappa)$  上の精密な判定が得られる。

**定理 1.**  $L^2(\mathbb{H}^n(-\kappa))$  上のシュレーディンガー作用素  $-\Delta_{g_\kappa} + V(x)$  は,  $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{g_\kappa} + V(x)) = [\frac{(n-1)^2\kappa}{4}, \infty)$  ( $= \sigma_{\text{ess}}(-\Delta_{g_\kappa})$ ) を満たしていると仮定する.

(i) ある  $R_0 > 0$  が存在して,  $V(x)$  は

$$V(x) \geq -\left\{ \frac{1}{4\left(r - R_0 + \frac{\tanh(\sqrt{\kappa}R_0)}{(n-1)\sqrt{\kappa}}\right)^2} + \frac{(n-1)(n-3)\kappa}{4 \sinh^2(\sqrt{\kappa}r)} \right\} \quad \text{for } r \geq R_0$$

を満たしているとする,  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_{g_\kappa} + V(x))$  は有限集合である.

(ii) ある  $\delta > 0$  と  $R_1 > 0$  が存在して,  $V(x)$  は

$$V(x) \leq -(1+\delta)\frac{1}{4r^2} \quad \text{for } r \geq R_1$$

を満たしているとする,  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_{g_\kappa} + V(x))$  は無限集合である.

**注意.** Carron [4] や Kombe-Özaydin [12, 13] 以外にも次が知られている.  $\mathbb{H}^n(-1)$  のポテンシャル  $V(x)$  は,  $0 \geq V \in L^{n/2}(\mathbb{H}^n(-1))$  を満たしているとする. このとき双曲版 Rozenblum-Lieb-Cwikel 不等式 (cf. [22, p. 101]) が Levin-Solomayak [17, Theorem 4.1] により得られている. しかし無限遠の近傍で  $-c_1r^{-2} \leq V(x) \leq -c_2r^{-2}$  (for some  $c_1 \geq c_2 > 0$ ) を満たすポテンシャル  $V(x)$  は決して  $L^{n/2}(\mathbb{H}^n(-1))$  に属さない. したがって定理 1 はこの結果より決して復元できない. 定理 1 の有限性・無限性の判定は真にシャープである.

幾何的相対ハーディ不等式において, 「外向き法写像  $\exp_W : \mathcal{N}^+(W) \rightarrow E$  は微分同相写像」との仮定がある. この条件はデリケートな条件で強い条件と感ずられるかもしれない. しかし幾何的相対ハーディ不等式を近似の意味で使うことにより, このデリケートな条件が除外できるケースがある. つまりその証明において, 距離関数  $r(x)$  のかわりに, 例えば ALE 空間 (漸近的に局所的ユークリッド空間) では無限遠における漸近的座標  $x = (x^1, \dots, x^n)$  を用いた近似的距離関数  $\rho(x) := |x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i)^2}$  を使うのである. 次の二つの結果はそのようなケースの典型である.

**定理 2.**  $(M, g)$  をオーダー  $\tau$  ( $0 < \tau < 1$ ) の ALE 空間とする. ある点  $p_0 \in M$  を取り,  $r(x) := \text{dist}_g(x, p_0)$ ,  $x \in M$  とおく. ポテンシャル  $V(x)$  は  $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_g + V(x)) = [0, \infty)$  を満たしているとする, 次が成立する.

(i) ある  $\delta_0 > 0$  と  $R_0 > 0$  が存在して,  $V(x)$  は

$$V(x) \geq -(1-\delta_0)\frac{(n-2)^2}{4r^2} \quad \text{for } r \geq R_0$$

を満たすとき,  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_g + V(x))$  は有限集合である.

(ii) ある  $\delta_1 > 0$  と  $R_1 > 0$  が存在して,  $V(x)$  は

$$V(x) \leq -(1+\delta_1)\frac{(n-2)^2}{4r^2} \quad \text{for } r \geq R_1$$

を満たすとき,  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_g + V(x))$  は無限集合である.

**注意.** ALE 空間  $(M, g)$  上では  $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_g) = [0, \infty)$  であることが容易に分かる. また  $V(x)$  に関する減衰条件 (ii) は, ある一つのエンドで成立していさえすればよいことも分かる.

**定理 3.**  $(M, g)$  を  $C^2$  クラスの  $n$  次元 AH(漸近的に双曲的) 多様体とし,

$$\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_g + V(x)) = \left[ \frac{(n-1)^2}{4}, \infty \right)$$

を仮定する. ある点  $p_0 \in M$  を取り,  $r(x) := \text{dist}_g(x, p_0)$ ,  $x \in M$  おくと, 次が成立する.

(i) ある  $\delta_0 > 0$  と  $R_0 > 0$  が存在して,  $V(x)$  は

$$V(x) \geq -(1 - \delta_0) \frac{1}{4r^2} \quad \text{for } r \geq R_0$$

を満たすとき,  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_g + V(x))$  は有限集合である.

(ii) ある  $\delta_1 > 0$  と  $R_1 > 0$  が存在して,  $V(x)$  は

$$V(x) \leq -(1 + \delta_1) \frac{1}{4r^2} \quad \text{for } r \geq R_1$$

を満たすとき,  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_g + V(x))$  は有限集合である.

**注意.**  $\overline{M}$  を  $\partial\overline{M} \neq \emptyset$  (連結でなくてもよい) であるコンパクト  $C^\infty$  級  $n$  次元多様体とする. また  $M := \text{Int}(\overline{M})$  とする.  $M$  上のリーマン計量  $g$  は, 次を満たすときクラス  $C^2$  の AH(漸近的に双曲的) 多様体という: 境界  $\partial\overline{M}$  の定義関数  $\lambda \in C^\infty(\overline{M})$  が存在して,  $g$  を共形的にリスケールしたリーマン計量  $\overline{g} := \lambda^2 g$  は  $\overline{M}$  上へ  $C^2$  級拡張され, かつ  $\partial\overline{M}$  上  $|d\lambda|_{\overline{g}}^2 = 1$  となる (cf. [18, 6, 16]). このとき  $(M, g)$  は,  $g$  の断面曲率が  $\partial\overline{M}$  の近傍で一様に  $-1$  に近づく完備多様体となる (cf. [18]). さらに,  $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_g) = \left[ \frac{(n-1)^2}{4}, \infty \right)$  である (cf. [3, 14]).

### 3 追加コメント.

定理 3 に現れる AH 多様体は, 最初から境界付きコンパクトリーマン多様体  $(\overline{M}, \overline{g})$  を与えているので, 無限遠の近傍の構造があらかじめよく分かっていると言える. これと対照的な結果としては, 例えば次のものが得られる. 仮定はやや複雑であるが, 無限遠の近傍に課している条件はマイルドである.

**命題 1.**  $(M, g)$  を非コンパクトな  $n$  次元完備リーマン多様体とする ( $n \geq 2$ ). また滑らかな境界  $\partial U$  (連結とは限らない) を持つ相対コンパクトな開集合  $U$  が存在して, その外向き法写像  $\exp_{\partial U} : \mathcal{N}^+(\partial U) \rightarrow M - U$  は微分同相写像となると仮定する.  $r(x) := \text{dist}_g(x, \partial U)$ ,  $x \in M - U$  とおくと, 条件

$$\nabla dr \geq 0 \quad \text{on } \partial U,$$

$$\text{“radial curvatures”} \leq 0 \quad \text{on } M - U$$

が満たされているとする. さらに正定数  $\kappa, R_0 > 0$  と定数  $\delta_1, \delta_2$  ( $\delta_1 \geq \delta_2$ ) が存在して, 不等式

$$-(\kappa + \delta_1 r^{-2}) \leq \text{“radial curvatures”} \leq -(\kappa + \delta_2 r^{-2}) \quad \text{for } r \geq R_0$$

が満たされているとする. このとき

$$1 - (2n - 5)\delta_1 + (n^2 - 4)\delta_2 > 0$$



ならば,  $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_g) = [\frac{(n-1)^2\kappa}{4}, \infty)$  かつ  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_g)$  は有限集合である.

次にエンドが一つで, ある方向には拡大して残る方向には縮小している多様体で, 幾何的相対ハーディ不等式が適用可能な例を与える. Hopf 束  $\pi : S^3(1) \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$  を考え,  $\xi$  を  $\text{Ker } d\pi = \mathbb{R} \cdot \xi$  なる  $S^3(1)$  上の単位キリング・ベクトル場,  $\omega_\xi$  を標準計量  $g_{S^3(1)}$  に関する双対 1-形式とする. また  $S^3(1)$  上の対称  $(0, 2)$ -テンソル  $g_h$  を  $g_h := g_{S^3(1)} - \omega_\xi \otimes \omega_\xi$  とおく. このとき  $\mathbb{R}^4$  上の対称  $(0, 2)$ -テンソル  $g$  を

$$g := dr^2 + \mu(r)^2 g_h + \nu(r)^2 \omega_\xi \otimes \omega_\xi$$

おく. ただし  $r$  は  $\mathbb{R}^4$  の原点からのユークリッド距離とし,  $\mu, \nu$  は  $[0, \infty)$  上の滑らかな正值関数で, 次を満たしているものとする.

$$\mu(0) = \nu(0) = 0, \quad \mu'(0) = \nu'(0) = 1, \quad \mu > 0, \nu > 0 \text{ on } (0, \infty).$$

このとき,  $g$  は  $\mathbb{R}^4$  上の完備なリーマン計量となる. 特にある  $R_0 > 1$  が存在して,

$$\mu(r) = e^r, \quad \nu(r) = e^{-r} \quad \text{for } r \geq R_0$$

となるように  $\mu, \nu$  をとっておく.

**命題 2.** 上記の設定の下, ポテンシャル  $V$  に関して  $(-\Delta_g + V)|_{C_c^\infty(\mathbb{R}^4)}$  は本質的に自己共役で, かつ  $\sigma_{\text{ess}}(-\Delta_g + V) = [\frac{1}{4}, \infty)$  と仮定する.

(i) ある正定数  $R_1 \geq R_0 (> 1)$  が存在して,

$$V(x) \geq -\frac{1}{4(r(x) + 1 - R_1)^2} \quad \text{for } r(x) \geq R_1$$

を満たしているとする,  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_g + V)$  は有限集合である.

(ii) ある正定数  $\delta > 0$  および  $R_2 \geq R_0 (> 1)$  が存在して,

$$V(x) \leq -(1 + \delta) \frac{1}{4r(x)^2} \quad \text{for } r(x) \geq R_2$$

を満たしているとする,  $\sigma_{\text{disc}}(-\Delta_g + V)$  は無限集合である.

最後に以上の内容とは直接関係しないが, 拙著 [1, 2] を紹介しておく. これらの論文では, 特異空間 (特に iterated edge 空間) 上の山辺の問題の解の存在およびシュレーディンガー型方程式の解の正則性 (ヘルダー連続性など) を議論している.

## 参考文献

- [1] K. Akutagawa, G. Carron and R. Mazzeo, The Yamabe problem on stratified spaces, **Geom. Funct. Anal.** **24** (2014), 1039–1079.
- [2] —, Hölder regularity of solutions for Schrödinger operators on stratified spaces, to appear in **J. Funct. Anal.** (2015), arXiv:1409.0154v1[math.DG].

- [3] L. Andersson, Elliptic systems on manifolds with asymptotically negative curvature, **Indiana Univ. Math. J.** **42** (1993), 1359–1388.
- [4] G. Carron, Inégalités de Hardy sur les variétés riemanniennes non-compactes, **J. Math. Pures Appl.** (9) **76** (1997), 883–891.
- [5] E. Fabes, C. Kenig, and R. Serapioni, The local regularity of solutions of degenerate elliptic equation, **Comm. Partial Differential Equations** **7** (1982), 77–116.
- [6] C. R. Graham and J. M. Lee, Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball, **Advances in Math.** **87** (1991), 186–225.
- [7] S. J. Gustafson and I. M. Sigal, *Mathematical Concepts of Quantum Mechanics*, Universitext, Springer, 2003.
- [8] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Pólya, *Inequalities* (2nd ed.), Cambridge University Press, 1952.
- [9] A. Hassell and S. Marshall, Eigenvalues of Schrödinger operators with potential asymptotically homogeneous of degree  $-2$ , **Trans. Amer. Math. Soc.** **360** (2008), 4145–4167.
- [10] 磯崎 洋, 多体シュレーディンガー方程式, シュプリンガー現代数学シリーズ**13**, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2004.
- [11] W. Kirsch and B. Simon, Corrections to the classical behavior of the number of bound states of Schrödinger operators, **Ann. Phys.** **183** (1988), 122–130.
- [12] I. Kombe and M. Özaydin, Improved Hardy and Rellich inequalities on Riemannian manifolds, **Trans. Amer. Math. Soc.** **361**, no. 12 (2009), 6191–6203.
- [13] I. Kombe and M. Özaydin, Hardy-Poincaré, Rellich and uncertainty principle inequalities on Riemannian manifolds, arXiv:1103.2747 (preprint).
- [14] H. Kumura, On the essential spectrum of the Laplacian on complete manifolds, **J. Math. Soc. Japan** **49** (1997), 1–14.
- [15] 黒田 成俊, スペクトル理論II, 岩波講座 基礎数学, 岩波書店, 1979.
- [16] J. M. Lee, *Fredholm Operators and Einstein Metrics on Conformally Compact Manifolds*, **Memoirs of the Amer. Math. Soc.** **864**, Amer. Math. Soc., 2006.
- [17] D. Levin and M. Solomyak, The Rozenblum-Lieb-Cwikel inequality for Markov generators, **J. Anal. Math.** **71** (1997), 173–193.
- [18] R. Mazzeo, The Hodge cohomology of a conformally compact metric, **J. Differential Geom.** **28** (1988), 309–339.
- [19] M. Murata, Finiteness of negative spectra of elliptic operators, **Canad. Math. Bull.** **28** (1985), 487–491.
- [20] 中村 周, 量子力学のスペクトル理論, 共立講座 21 世紀の数学**26**, 共立出版株式会社, 2012.

- [21] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. II*, Academic Press, 1972.
- [22] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. IV*, Academic Press, 1978.