数理解析研究所講究録
第1976巻 2015年 100-116

偏微分作用素環での包括的グレブナー基底系とホロノミー D-加群, b-関数

Comprehensive Gröbner Systems in rings of differential operators, holonomic D-modules and b-functions

鍋島克輔*
徳島大学大学院ソシオ・アーツ・アンド・サイエンス研究部
NABESHIMA, KATSUSUKE
INSTITUTE OF SOCIO-ARTS AND SCIENCES, TOKUSHIMA UNIVERSITY

田島慎一†
筑波大学大学院数理物質系数学域
TAJIMA, SHINICHI
GRADUATE SCHOOL OF PURE AND APPLIED SCIENCES, UNIVERSITY OF TSUKUBA

Abstract

An algorithm for computing comprehensive Gröbner systems is introduced in rings of differentail operators. Their applications to b-functions are considered. The algorithm for computing comprehensive Gröbner systems outputs the b-function and relevant holonomic D-modules.

1 はじめに

本稿では，偏微分作用素環での包括的グレブナー基底系 (comprehensive Gröbner system) 計算アルゴリズムを紹介するとともに，b-関数への応用を考察する．

包括的グレブナー基底系はパラメータ付きグレブナー基底としてよく知られており，多項式環では，いくつかの計算アルゴリズムが存在し，実装も公開されている [3, 7, 8, 11, 13, 15, 16, 18, 19, 20, 26, 27, 30, 31]．この包括的グレブナー基底系はパラメータ付きシステムの解析には必要不可欠なものであり，近年の計算効率の研究により高速化がなされ，実際に，応用にも用いられている．

偏微分作用素環上の包括的グレブナー基底系計算アルゴリズムと実装に関しては，著者の知る限りで，第一著者の博士論文 [16] に述べられているのみであり，他の学術雑誌では紹介されていない．

本稿の第一目的は，[16] で与えたアルゴリズムより更に効率的なアルゴリズムを紹介すると共に，多項式環における理論を偏微分作用素環の場合に拡張する方法について説明することである．鍵となるのはグレブナー基底とイデアルの安定性である．多項式環での M. Kalkbrener [6] の結果を偏微分作用素環へ拡張することで，多項式環の場合に用いられたものと本質的に同じ枠組みで包括的グレブナー基底系の計算アル

*nabeshima@tokushima-u.ac.jp
†tajima@math.tsukuba.ac.jp

ゴリズムが構成可能となる．ここで紹介するアルゴリズムは，既に計算機代数システム Risa/Asir [22] 上に実装済である．実装したプログラムの出力例も紹介する．

第二目的は，構成した包括的グレブナー基底系計算アルゴリズムを b-関数に応用することである．特別な計算テクニックを使うのではなく，包括的グレブナー基底系計算アルゴリズムの入力を工夫するだけで様々な情報（(無平方な) b-関数，b-関数の根に対するホロノミー D-加群, stratum 上の b-関数の根）が得られることをみる．包括的グレブナー基底系は，入力を工夫することで様々な目的に活用でき，汎用性 が高いことを強調したい．

2 包括的グレブナー基底系の計算

本章では，偏微分作用素環での包括的グレブナー基底系の計算アルゴリズムを述べる．多項式環における包括的グレブナー基底系を求めるアルゴリズムのうち, 現在最も高速なものは, イデアルの安定性理論に基づいて導出された包括的グレブナー基底系計算アルゴリズムである. この節では, この安定性理論に基づいて得られた算法を拡張することにより構成した偏微分作用素環での包括的グレブナー基底系の計算アルゴリズムについて述べる．計算機代数システム Risa/Asir に実装したアルゴリズムを用いて, 計算の出力例も与える．

2.1 準備

本稿では，次の記号を使う．K を代数的閉体とする．$x_1, x_2, \ldots, x_n$ を n 個の変数とし, 変数 x_i で偏微分するという操作を $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ で表す $(1 \leq i \leq n)$. これら n 個の変数の省略形を $X := \{x_1, \ldots, x_n\}$, n 個の偏微分作用素の省略形を $D := \{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ とする．このとき，$i \neq j$ のとき，$x_i x_j = x_j x_i$, $\partial_i \partial_j = \partial_j \partial_i$ が成立ち，$i = j$ のときライプニッツの公式より

$$\partial_i x_i = x_i \partial_i + 1$$

が成り立つ．本稿で扱う偏微分作用素はすべて, 各項において偏微分を表す文字 ∂_i たちが項の右側にまとまっている「正規形」により表示されているものとする．以下，$K[X, D]$ は K 上の偏微分作用素環を表すとする（$D_X := K[X, D]$ として表すこともある）．また，変数として, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ と独立な m 個の変数 $u_1, u_2, \ldots, u_m$ を含むような偏微分作用素のなす環を, $K[U, X, D]$ で表す．ただし, U は, $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ の省略形 $U := \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ を意味している．

偏微分作用素環 $K[U, X, D]$ での項順序 $\succ$ を固定し (主変数は U, X, D), $f \in K[U, X, D]$ とする．項順序 $\succ$ に関して，f の先頭項，先頭係数，先頭単項をそれぞれ, $\mathrm{lpp}(f), \mathrm{lc}(f), \mathrm{lm}(f) = \mathrm{lc}(f) \cdot \mathrm{lpp}(f)$ で表す．また，集合 $F \subset K[U, X, D]$ に関して，$\mathrm{lpp}(F) = \{\mathrm{lpp}(f) | f \in F\}$, $\mathrm{lc}(F) := \{\mathrm{lc}(f) | f \in F\}$, $\mathrm{lm}(F) := \{\mathrm{lm}(f) | f \in F\}$ とする．

係数を $K[U]$ に持つ偏微分作用素環を $(K[U])[X, D]$ と表す．X, D からなる単項の項順序 $\succ_{X,D}$ を固定し, $f \in (K[U])[X, D]$ とする．このとき，項順序 $\succ_{X,D}$ に関して，f の先頭項，先頭係数，先頭単項をそれぞれ, $\mathrm{lpp}_U(f), \mathrm{lc}_U(f), \mathrm{lm}_U(f) = \mathrm{lc}_U(f) \cdot \mathrm{lpp}_U(f)$ で表す（添え字に U を書く）．また，集合 $F \subset K[U, X, D]$ に関して，$\mathrm{lpp}_U(F) := \{\mathrm{lpp}_U(f) | f \in F\}$, $\mathrm{lc}_U(F) := \{\mathrm{lc}_U(f) | f \in F\}$, $\mathrm{lm}_U(F) := \{\mathrm{lm}_U(f) | f \in F\}$ とする．

例えば，$p = 2u_1u_2x_1^2x_2\partial_1 + u_2x_1^2x_2\partial_1 + x_1\partial_2 + x_2$ とする．もし，$f \in \mathbb{Q}[u_1, u_2, x_1, x_2, \partial_1, \partial_2]$ と見做す場合，辞書式項順序 $x_1 \succ x_2 \succ \partial_1 \succ \partial_2 \succ u_1 \succ u_2$ に関して，$\mathrm{lc}(p) = 2$, $\mathrm{lpp}(p) = u_1u_2x_1^2x_2\partial_1$, $\mathrm{lm}(p) = 2u_1u_2x_1^2x_2\partial_1$ となる．それに対し $f \in (\mathbb{Q}[u_1, u_2])[x_1, x_2, \partial_1, \partial_2]$ と見做すときは，辞書式項順序 $x_1 \succ x_2 \succ \partial_1 \succ \partial_2$ に関して，$\mathrm{lc}_{\{u_1,u_2\}}(p) = (2u_1u_2 + 1)$, $\mathrm{lpp}_{\{u_1,u_2\}}(p) = x_1^2x_2\partial_1$, $\mathrm{lm}_{\{u_1,u_2\}}(p) = (2u_1u_2 + 1)x_1^2x_2\partial_1$ となる．

偏微分作用素環でのイデアルのグレブナー基底の定義は，通常の多項式環での定義と同様に，次で与えられる．

定義 1 (グブレナー基底) $K[U,X,D]$ の項順序 $\succ$ を固定する．$K[U,X,D]$ のイデアル I の有限部分集合 $G=\{g_1,g_2,\ldots,g_r\}$ がもし，

$$\langle \mathrm{lm}(g_1),\mathrm{lm}(g_2),\ldots,\mathrm{lm}(g_r)\rangle = \mathrm{lm}(I)$$

を満たすならば，G は $\succ$ に関して I の**グレブナー基底**であるという．

偏微分作用素環 $K[U,X,D]$ 上でのグレブナー基底計算アルゴリズムは計算機代数システム Risa/Asir [22] に実装されており，実行する際のコマンドは `dp_weyl_gr_main` である．

係数が多項式環 $K[U]$ となる偏微分作用素環 $(K[U])[X,D]$ 上でのイデアルのグレブナー基底の定義も同様に，次で与えられる．次の定義では，添え字として U があることに注意する．

定義 2 (グレブナー基底) $(K[U])[X,D]$ の項順序 $\succ$ を固定する．$(K[U])[X,D]$ のイデアル I の有限部分集合 $G=\{g_1,g_2,\ldots,g_r\}$ がもし，

$$\langle \mathrm{lm}_U(g_1),\mathrm{lm}_U(g_2),\ldots,\mathrm{lm}_U(g_r)\rangle = \mathrm{lm}_U(I)$$

を満たすならば，G は $\succ$ に関して I の**グレブナー基底**であるという．

偏微分作用素環 $(K[U])[X,D]$ でのグレブナー基底は，$K[U,X,D]$ でのグレブナー基底計算アルゴリズムと $X,D \gg U$ となるブロック項順序を使うことで，次のように計算が可能である．

Algorithm 1 (GröbnerB)

Specification: GröbnerB($F,\succ$)
$(K[U])[X,D]$ 上での $\langle F\rangle$ のグレブナー基底の計算．
入力: $F \subset (K[U])[X,D]$, $\succ$: 項順序，
出力: G: $(K[U])[X,D]$ 上での $\succ$ に関する $\langle F\rangle$ のグレブナー基底．

1: F を $K[U,X,D]$ の部分集合と見做し，ブロック項順序 $X,D \gg U$ に関し $K[U,X,D]$ で**簡約**グレブナー基底 G を計算する．ただしブロック項順序での変数 X,D における項順序は $\succ$ を用いる．

2: G を $(K[U])[X,D]$ の部分集合と見做す．G は $(K[U])[X,D]$ 上での $\succ$ に関する $\langle F\rangle$ のグレブナー基底である．

注意: 環 $(K[U])[X,D]$ でのグレブナー基底を求めるためには，ステップ 1 で，ブロック項順序に関するグレブナー基底を計算すれば十分である．しかし，次の節で述べる包括的グレブナー基底系計算アルゴリズムの停止性を保証するために，簡約されたグレブナー基底が必要となる．そのことを考慮し，このアルゴリズム **GröbnerB** のステップ 1 において予め，簡約グレブナー基底の計算を行っている．このアルゴリズム **GröbnerB** により，$K[U,X,D]$ 上のグレブナー基底計算アルゴリズムを使うことで $(K[U])[X,D]$ のグレブナー基底を求めることができる．しかし，アルゴリズム GröbnerB では $(K[U])[X,D]$ 上のイデアルの簡約グレブナー基底を求めることはできない ([17])．

任意の元 $a \in K^m$ に対し，変数 U に a を代入することとして特化準同型写像 (specialization homomorphism) $\sigma_a : K[U] \longrightarrow K$ を定義する．この写像は自然な拡張として $\sigma_a : (K[U])[X,D] \longrightarrow K[X,D]$ とも考えることができるので，この意味としても同じ記号を使う．例えば，偏微分作用素として $P=$

$2u_1u_2x_1^2x_2\partial_1 + u_2x_1^2x_2\partial_1 + x_1\partial_2 + x_2 \in (\mathbb{Q}[u_1,u_2])[x_1,x_2,\partial_1,\partial_2]$ を考え，$(u_1,u_2) = (1,2),(0,\frac{1}{2}) \in \mathbb{Q}^2$ とする．このとき，$\sigma_{(1,2)}(P) = 4x_1^2x_2\partial_1 + 2x_1\partial_2 + x_1\partial_2 + x_2$ であり，$\sigma_{(0,\frac{1}{2})}(P) = \frac{1}{2}x_1\partial_2 + x_1\partial_2 + x_2$ である．特化準同型写像 σ でのイデアル $I \subset (K[U])[X,D]$ における像は $\sigma(I) := \{\sigma(f) | f \in I\} \subset K[X,D]$ である．

定義 3 (安定) イデアル $I \subset (K[U])[X,D]$ が，項順序 $\succ$ のもと特化準同型写像 σ に関して**安定**とは，イデアル I が

$$\sigma(\mathrm{lm}_U(I)) = \mathrm{lm}(\sigma(I))$$

を満たすことと定める．ここで，$\sigma(\mathrm{lm}_U(I)) := \{\sigma(\mathrm{lm}_U(f)) | f \in I\}$，$\mathrm{lm}(\sigma(I)) := \{\mathrm{lm}(f) | f \in \sigma(I)\}$ である．

多項式環でのイデアルの安定性とグレブナー基底の関係は [1, 5, 6] において研究されており，これらの研究結果は偏微分作用素環へ自然に拡張可能である．次の定理は，Kalkbreber の結果 [6] を偏微分作用素環へ拡張したものである．証明は，論文 [6] と同様である．

定理 4 偏微分作用素環 $(K[U])[X,D]$ から $K[X,D]$ への特化準同型写像を σ とし，I を $(K[U])[X,D]$ のイデアルとする．また，$G = \{g_1,\ldots,g_\ell\}$ を項順序 $\succ$ に関する I のグレブナー基底とする．また，g_i たちは次が満たされるように並んでいると仮定する．
$r \in \{1,\ldots,\ell\}$ が存在し

- 各 $i \in \{1,\ldots,r\}$ で $\sigma(\mathrm{lc}_U(g_i)) \neq 0$ となる．
- 各 $i \in \{r+1,\ldots,\ell\}$ で $\sigma(\mathrm{lc}_U(g_i)) = 0$ となる．

このとき，次の *3* つは同値である．

(1) I は σ と $\succ$ において安定である．

(2) $\{\sigma(g_1),\ldots,\sigma(g_r)\}$ は $\succ$ に関して $\sigma(I)$ のグレブナー基底である．

(3) 各 $i \in \{r+1,\ldots,\ell\}$ で $\sigma(g_i)$ は $\{\sigma(g_1),\ldots,\sigma(g_r)\}$ によって *0* へ簡約される．

包括的グレブナー基底系計算アルゴリズムは，次のセクション 2.2 で紹介される定理 8 と定理 9 に基づいて構成される．定理 8 と定理 9 はイデアルが安定となる U の多項式の条件の導出を述べている．

本稿では，多項式 $h_1,h_2,\ldots,h_k \in K[U]$ に対して，代数多様体を $\mathbb{V}(h_1,\ldots,h_k) := \{a \in K^m | h_1(a) = \cdots = h_k(a) = 0\}$ で表す．また，部分集合 $F \subset K[U]$ に対して，$\mathbb{V}(F) := \{a \in K^m | h(a) = 0, \forall h \in F\}$ である．

2.2 計算アルゴリズム

ここでは，偏微分作用素環での包括的グレブナー基底系の計算アルゴリズムについて紹介する．このアルゴリズムは多項式環での包括的グレブナー基底系計算アルゴリズム [8, 11, 15, 19, 20, 27] を拡張したものである．この拡張については，現在のところ第一著者の博士論文 [16] に記されているだけで学術論文雑誌には発表されていないので改めてここで紹介する．

定義 5 (包括的グレブナー基底系) $F, G_1, \ldots, G_\ell$ を $(K[U])[X,D]$ の有限部分集合, $\mathbb{A}_1, \ldots, \mathbb{A}_\ell$ を K^m 上の代数構造的集合 (*stratum*) とする. ここで, ペアの集合を $\mathcal{G} = \{(\mathbb{A}_1, G_1), \ldots, (\mathbb{A}_\ell, G_\ell)\}$ とする. このとき, $\mathcal{G}$ が $\cup_{i=1}^{\ell}\mathbb{A}_i$ 上で F の**包括的グレブナー基底系 (CGS)** とは, 各 $i = 1, \ldots, \ell$ において, 任意の $a \in \mathbb{A}_i$ で, $\sigma_a(G_i)$ が $K[X,D]$ 上において $\langle\sigma_a(F)\rangle$ のグレブナー基底であることである. もし, $\cup_{i=1}^{\ell}\mathbb{A}_i = K^m$ であれば, $\mathcal{G}$ を単に F の包括的グレブナー基底系という.

包括的グレブナー基底系の効率的な計算アルゴリズムとして [8, 19, 20] がある. このアルゴリズムには次の極小先頭基底が必要となる.

定義 6 (MBlpp) F を $(K[U])[X,D]$ の有限部分集合とし項順序を固定する. 単項式の集合 $M = \{m_1, \ldots, m_r\}$ が, $\langle M\rangle = \langle \mathrm{lpp}_U(F)\rangle$ かつ $m_i \nmid m_j$ $(i, j \in \{1, \ldots, r\}, i \neq j)$ を満たすとき, M を F の**極小先頭基底**と呼び, この時の単項式の集合 M を $\mathrm{MBlpp}(F)$ と表す。

例 7 $F = \{ux_1^2\partial_1 - x_2, ux_2^2\partial_2^2 - x_2, ux_1\partial_1 - \partial_2, (u+1)x_1\partial_1 + \partial_2, (u+1)x_2\partial_2 - 1\} \subset (\mathbb{C}[u])[x_1, x_2, \partial_1, \partial_2]$ とする. 辞書式項順序 $x_1 \succ x_2 \succ \partial_1 \succ \partial_2$ において, F の極小先頭基底は $\mathrm{MBlpp}(F) = \{x_1\partial_1, x_2\partial_2\}$ となる.

包括的グレブナー基底系計算アルゴリズムは次の定理が基になっている. これは, 論文 [8, 11] の定理を偏微分作用素環へ拡張したものである. 証明は論文 [8, 11] と同じであるので省略する.

定理 8 (Kapur el., 倉田) F, G を $(K[U])[X,D]$ の有限部分集合として, G を $\langle F\rangle$ の項順序 $\succ$ に関するグレブナー基底とする. また, $G_r = G \cap K[U]$, $\mathrm{MBlpp}(G \backslash G_r) = \{m_1, \ldots, m_\ell\}$ とし, 集合 $G' = \{g_1, \ldots, g_\ell\}$ は各 $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ において $\mathrm{lpp}_U(g_i) = m_i$ とする. このとき, 任意の $a \in \mathbb{V}(G_r) \backslash \mathbb{V}(\mathrm{lc}_U(g_1)\,\mathrm{lc}_U(g_2)\cdots\mathrm{lc}_U(g_\ell))$ において, $\sigma_a(G')$ は $\langle\sigma_a(F)\rangle$ の $\succ$ に関するグレブナー基底である.

これにより, 包括的グレブナー基底系を計算するアルゴリズムが構成可能である. 次のアルゴリズムにおいて, 代数構造的集合 (stratum) の空集合の判定, 和, 共通部分, 差を計算する方法は論文 [8, 11, 15, 19, 26] で発表されており計算可能である. この計算については本稿では詳しく述べない.

Algorithm 2 (CGS)

Specification: CGS$(E, N, F, \succ)$
F の包括的グレブナー基底系の計算.
入力: $E, N \subset K[U]$, $F \subset (K[U])[X,D]$, $\succ$: X, D における項順序,
出力: $\mathcal{G}$: $\mathbb{V}(E)\backslash\mathbb{V}(N)$ 上で $\succ$ に関しての F の包括的グレブナー基底系.
BEGIN
$\mathcal{G} \leftarrow \emptyset$;
if $\mathbb{V}(E)\backslash\mathbb{V}(N) = \emptyset$ **then** return $\mathcal{G}$; **end-if**
$G \leftarrow$**GröbnerB**$(F \cap E, \succ)$;
if $1 \in G$ **then** $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \cup \{(\mathbb{V}(E)\backslash\mathbb{V}(N), \{1\})\}$; return $\mathcal{G}$; **end-if**
$G_r \leftarrow G \cap K[U]$;
if $(\mathbb{V}(E)\backslash\mathbb{V}(G_r))\backslash\mathbb{V}(N) \neq \emptyset$ **then** $\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \cup \{(\mathbb{V}(E)\backslash\mathbb{V}(G_r \wedge N), \{1\})\}$; **end-if**
if $\mathbb{V}(G_r)\backslash\mathbb{V}(N) = \emptyset$ **then** return $\mathcal{G}$; **else**
  $\{m_1, \ldots, m_\ell\} \leftarrow \mathrm{MBlpp}(G\backslash G_r)$;
    for $i = 1$ **to** ℓ **do**
    $\boxed{G_i \leftarrow \{g\} \text{ where } \mathrm{lpp}_U(g) = m_i;}$ (*1)
    $i \leftarrow i + 1$;

end-for
if $(\mathbb{V}(G_r)\backslash\mathbb{V}(N))\backslash(\cup_{j=1}^{\ell}\mathbb{V}(\mathrm{lc}_U(G_j))) \neq \emptyset$ **then**
$\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \cup \{(G_r, N \wedge \mathbb{V}(\mathrm{lc}_U(G_1)) \wedge \cdots \wedge \mathbb{V}(\mathrm{lc}_U(G_\ell)), \cup_{j=1}^{\ell} G_j)\}$;
end-if
$\mathcal{G} \leftarrow \mathcal{G} \cup \mathrm{CGS}(G_r \cup \mathrm{lc}_U(G_1), N, G\backslash G_r, \succ) \cup$
$\mathrm{CGS}(G_r \cup \mathrm{lc}_U(G_2), N \wedge \mathrm{lc}_U(G_1), G\backslash G_r, \succ) \cup$
$\mathrm{CGS}(G_r \cup \mathrm{lc}_U(G_3), N \wedge \mathrm{lc}_U(G_1) \wedge \mathrm{lc}_U(G_2), G\backslash G_r, \succ) \cup$
$\cdots$
$\mathrm{CGS}(G_r \cup \mathrm{lc}_U(G_\ell), N \wedge \mathrm{lc}_U(G_1) \wedge \cdots \wedge \mathrm{lc}_U(G_{\ell-1}), G\backslash G_r, \succ)$;
return $\mathcal{G}$;
END
(注意：$A, B \subset K[U]$, $A \wedge B = \{pq|\ p \in A, q \in B\}$)

定理 8 で得られた stratum $\mathbb{V}(G_r)\backslash\mathbb{V}(\mathrm{lc}_U(g_1)\,\mathrm{lc}_U(g_2)\cdots\mathrm{lc}_U(g_\ell))$ より更に大きな stratum は次の定理で得られる．この定理の証明は論文 [20] と同様である．

定理 9 (鍋島) F, G を $(K[U])[X, D]$ の有限部分集合として，G を $\langle F\rangle$ の項順序 $\succ$ に関するグレブナー基底とする．また，$G_r = G \cap K[U]$，$\mathrm{MBlpp}(G\backslash G_r) = \{m_1, \ldots, m_\ell\}$ とし，各 $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ に対し集合 $G_i = \{g \in G|\ \mathrm{lpp}_U(g) = m_i\}$ を定める．このとき，任意の $a \in \mathbb{V}(G_r)\backslash\mathbb{V}(\cup_{i=1}^{\ell}\mathrm{lc}_U(G_i))$ に対し，$\sigma_a\left(G\backslash\left((\cup_{i=1}^{\ell}G_i) \cup G_r\right)\right)$ は $\langle\sigma_a(F)\rangle$ の $\succ$ に関するグレブナー基底である．

定理 9 を利用した包括的グレブナー基底系計算アルゴリズムは，アルゴリズム CGS の (*1) を次の (*2) と入れ替えることで構成できる．

$\boxed{G_i \leftarrow \{g|\ \mathrm{lpp}_U(g) = m_i, g \in G\};}$ (*2)

注意: (*1) と (*2) では，出力される包括的グレブナー基底系の形が一般には異なる．stratum の個数が小さくなるのは (*2) の場合である．パラメータの条件を主に扱いたい場合は，(*2) を使うことを勧める．方程式の数が少ない出力は (*1) である．方程式系自体を処理したい場合は (*1) を勧める．また，論文 [19] に書かれているように，(*2) を使用後 (*1) を使った場合の出力への処理は可能であると共に [19] にアルゴリズムが記されている．しかし，逆に関しては現在のところアルゴリズムが知られていない．

例 10 $F = \{x_2^2 + 2u_1\partial_1^2 + \partial_1^2, x_2^2\partial_1^2 + u_2x_2^3\} \subset (\mathbb{C}[u_1, u_2])[x_1, x_2, \partial_1, \partial_2]$ とする．辞書式項順序 $x_1 \succ x_2 \succ \partial_1 \succ \partial_2$ を使う．F の包括的グレブナー基底を計算する．

1-1. $\langle F\rangle$ のグレブナー基底を計算すると次の G となる．

$$G = \{(2u_1+1)\partial_1^6 + (4u_1^2u_2^2 + 4u_1u_2 + u_2^2)\partial_1^4, (2u_1u_2 + u_2)x_2\partial_1^2 + (2u_1+1)\partial_1^4,$$
$$(2u_1+1)x_2\partial_1^4 - (4u_1^2u_2 + 4u_1u_2 + u_2)\partial_1^4, x_2^2 + 2u_1\partial_1^2 + \partial_1^2\}.$$

1-2. G の極小先頭基底は $\mathrm{MBlpp}(G) = \{\partial_1^6, x_2\partial_1^2, x_2\}$ であり，各元を先頭項として持つ G の元は各々 *1* つであるので，定理 *8* と定理 *9* とも同じ条件となる．すなわち，パラメータ u_1, u_2 が $\mathbb{C}^2\backslash((2u_1+1)u_2)$ に属するとき，

$$G_1 = \{(2u_1+1)\partial_1^6 + (4u_1^2u_2^2 + 4u_1u_2 + u_2^2)\partial_1^4, (2u_1u_2 + u_2)x_2\partial_1^2 + (2u_1+1)\partial_1^4,$$
$$x_2^2 + 2u_1\partial_1^2 + \partial_1^2\}$$

はグレブナー基底となる．

2-1. $2u_1+1=0$ の場合を考える．まず，$\langle G\cap\{2u_1+1\}\rangle$ のグレブナー基底を計算する．このとき，グレブナー基底は次の G' となる．

$$G'=\{2u_1+1,x_2^2\}.$$

2-2. $G'\cap\mathbb{C}[u_1,u_2]=\{2u_1+1\}$ であり，$G'\backslash\{2u_1+1\}$ の極小先頭基底は $\mathrm{MBlpp}(G'\backslash\{2u_1+1\})=\{x_2^2\}$ となる．よって，パラメータ u_1,u_2 が $\mathbb{V}(2u_1+1)$ に属するとき，$G_2=\{x_2\}$ がグレブナー基底となる．

3-1. $u_2=0$，$2u_1+1\neq 0$ の場合を考える．まず，$\langle G\cap\{u_2\}\rangle$ のグレブナー基底を計算する．このとき，グレブナー基底は次の G'' となる．

$$G''=\{u_2,(2u_1+1)\partial_1^4,x_2^2+(2u_1+1)\partial_1^2\}.$$

3-2. $G''\cap\mathbb{C}[u_1,u_2]=\{u_2\}$ であり，$G''\backslash\{u_2\}$ の極小先頭基底は $\mathrm{MBlpp}(G''\backslash\{u_2\})=\{\partial_1^4,x_2^2\}$ となる．よって，パラメータ u_1,u_2 が $\mathbb{V}(u_2)\backslash\mathbb{V}(2u_1+1)$ に属するとき，$G_3=\{(2u_1+1)\partial_1^4,x_2^2+(2u_1+1)\partial_1^2\}$ がグレブナー基底となる．

以上より，F の包括的グレブナー基底系は

$$\{(\mathbb{C}^2\backslash((2u_1+1)u_2),G_1),(\mathbb{V}(2u_1+1),G_2),(\mathbb{V}(u_2)\backslash\mathbb{V}(2u_1+1),G_3)\}$$

となる．

著者は，アルゴリズム 2 を計算機代数システム Risa/Asir 上に実装した．次は，実装したプログラムの出力例である．

例 11 実装した包括的グレブナー基底系計算プログラムの 1 つの関数名は newcgsw1 である．使用する際は引数を次のように与える．

newcgsw1([偏微分作用素リスト],[パラメータリスト],$[[x_1,x_2,\ldots,x_n],[\partial_1,\partial_2,\ldots,\partial_n]]$, 項順序)

(注意：項順序は $[x_1,x_2,\ldots,x_n,\partial_1,\partial_2,\ldots,\partial_n]$ についての項順序である．)

ここで，$F=\{x^3\partial_y+2ax\partial_x^2+x\partial_x^2,axy^2\partial_x^2+bxy^3,xy^2\partial_x+by\}\subset(\mathbb{C}[a,b])[x,y,\partial_x,\partial_y]$ を考える．ただし，$\partial_x=\frac{\partial}{\partial x},\partial_y=\frac{\partial}{\partial y}$ である．パラメータは a,b である．項順序 $\succ$ は辞書式項順序（$x\succ y\succ\partial_x\succ\partial_y$）である．このとき，$F$ の包括的グレブナー基底系は次のように出力される．

```
[508] newcgsw1([x^3*dy+2*a*x*dx^2+x*dx^2,a*x*y^2*dx^2+b*x*y^3,x*y^2*dx+b*y],[a,b],[[x,
y],[dx,dy]],2);
[[b],[b,4*a^2+4*a+1]]
[-4*dy*a^2-4*dy*a-dy,-4*dx*a^2-4*dx*a-dx]

[[b,2*a+1],[1]]
[dy^3*y^2+6*dy^2*y+6*dy,-dx*y^2,-dy*y^3,dy*x^3,-2*dx*x^3+(3*dy^2*y^2+12*dy*y)*x^2]

[[2*a+1],[b,2*a+1]]
[b*y,-b*x^3]

[[0],[2*b*a+b]]
[1]
```

この出力の意味は，項順序 $\succ$ に関して，

1. stratum $\mathbb{V}(b)\backslash\mathbb{V}(b, 4a^2+4a+1)$ にパラメータ (a, b) が属すとき，

$$\{-4a^4\partial_y - 4a\partial_y - \partial_y, -4a^2\partial_x - 4a\partial_x - \partial_x\}$$

がグレブナー基底となる．

2. stratum　$\mathbb{V}(b, 2a+1)$ にパラメータ (a, b) が属すとき，

$$\{y^2\partial_y^3 + 6y\partial_y^2 + 6\partial_y, -y^2\partial_x, -y^3\partial_y, x^3\partial_y, -2x^3\partial_x + (3y^2\partial_y^2 + 12y\partial_y)x^2\}$$

がグレブナー基底となる．

3. stratum $\mathbb{V}(2a+1)\backslash\mathbb{V}(b, 2a+1)$ にパラメータ (a, b) が属すとき，

$$\{by, -bx^3\}$$

がグレブナー基底となる．

4. stratum $\mathbb{C}^2\backslash\mathbb{V}(2ba+b)$ にパラメータ (a, b) が属すとき，に属したならば，

$$\{1\}$$

がグレブナー基底となる．

(注意) Risa/Asir の出力の都合上，dy*y^3 は標準形 $y^3\partial_y$ を意味している．この出力の都合を考慮し，上の 1〜4 は記述した．

Risa/Asir で偏微分作用素を扱う際，出力の形に気を付ける必要がある．例えば，Risa/Asir は，正規形が $y^3\partial_y$ の偏微分作用素を dy*y^3 という風に出力する．上の 1〜4 では，この事を考慮し，Risa/Asir の出力を通常の正規形を用いて表現した．この計算には計算機 [OS: Windows 7 (64bit), CPU: Intel Core i7-2600, 3.40GHZ, メモリ 4G] で 0.0468 秒を要した．

3　b-関数への応用

ここでは，包括的グレブナー基底系計算を b-関数へ応用する．主な計算には特別なテクニックは使っておらず包括的グレブナー基底計算のみである．本章では，K を標数 0 の体とし，$D_X := K[X, D]$ とする．

3.1　b-関数への応用

定義 12 (b-関数) $f \in K[X]$ とする．このとき，

$$P(s)f^{s+1} = b(s)f^s$$

を満たす多項式 $b(s) \in K[s]$ と変数 s を持つ偏微分作用素 $P(s) \in K[s, X, D]$ が存在する．モニックで最小次数の多項式 $b(s)$ を f の **b-関数**と呼ぶ．

f を定数でない多項式とする．このとき，f^s の零化イデアルを

$$\mathrm{Ann}(f^s) := \{P \in K[s, X, D] \mid Pf^s = 0\}$$

で表す．この零化イデアルの生成元を計算するアルゴリズム [25] は計算機代数システム Risa/Asir に実装されており，ファイル bfct を読み込んだあと (load("bfct"))，コマンド ann を実行すれば f^s の零化イデアルの生成元を得ることができる．このときの出力における項順序はプログラム ann の内部で固定されているので，ある項順序でのグレブナー基底が必要であるならば，ann を実行した後，改めて項順序を設定しグレブナー基底を計算する必要がある．

例えば，$f = x^3 - y^2z^2 \in \mathbb{Q}[x, y, z]$ とし，Risa/Asir で計算すると次となる．

```
[216] ann(x^3-y^2*z^2);
[-3*dy^2*x^2-2*z^3*dz*dx-2*dx*z^2,3*dz*x^2+2*dx*z*y^2,3*dy*x^2+2*dx*z^2*y,-2*x*dx-3*z*
dz+6*s, dy*y-z*dz]
```

多項式 f の b-関数は，この零化イデアル $\mathrm{Ann}(f^s)$ を用いることによって 計算することができる ([25])．定数でない多項式 f の b-関数は

$$(\mathrm{Ann}(f^s) + \langle f \rangle) \cap K[s]$$

のモニックな生成元であることが知られているので，$(\mathrm{Ann}(f^s) + \langle f \rangle)$ の消去順序 (s 以外を消去) によるグレブナー基底を計算することで f の b-関数は得られる．

応用 I

上で述べた b-関数と同様の計算を包括的グレブナー基底系を使って行ってみる．この場合，**s をパラメータとみなし計算**する．具体的な計算法は次である．

計算法 1

1. 零化イデアル $\mathrm{Ann}(f^s)$ の生成元 H を $K[s, X, D]$ で計算する．
2. $H \cup \{f\}$ の包括的グレブナー基底系を計算する．ただし，ここでは s をパラメータとみなす．

$f = x^2 + y^3 \in K[x, y]$ のときのプログラムの出力が次である．ここで，cons(F,ann(F)) とは，リストとして出力される ann(F) の先頭に F を付け加えることを意味する．項順序は $(x, y, \partial_x, \partial_y)$ において 0（全次数逆辞書式項順序）である．

```
[426] F=x^2+y^3;
x^2+y^3
[427] newcgsw1(cons(F,ann(F)),[s],[[x,y],[dx,dy]],0);
[[s+1],[1]]
[3*dx*x+2*dy*y+6,2*dy*x-3*dx*y^2,x^2+y^3]

[[6*s+5],[1]]
[y,x]

[[6*s+7],[1]]
[x,dy*y+2,y^2]

[[0],[36*s^3+108*s^2+107*s+35]]
[1]
```

この出力の意味は,
$s=-1$ のとき, cons(F,ann(F)) のグレブナー基底は $\{3x\partial_x+2y\partial_y+6, 2x\partial_y-3y^2\partial_x, x^2+y^3\}$,
$s=-\frac{5}{6}$ のときグレブナー基底は $\{y,x\}$,
$s=-\frac{7}{6}$ のとき, グレブナー基底は $\{x, y\partial_y+2, y^2\}$,
$36s^3+108s^2+107s+35\neq 0$ のとき, グレブナー基底は $\{1\}$ であることを示している.

ちなみに, f の b-関数を計算すると次となる.

```
[0] load("bfct");
[216] bfct(x^2+y^3);
36*s^3+108*s^2+107*s+35
```

b-関数 36*s^3+108*s^2+107*s+35 は包括的グレブナー基底系にはパラメータの条件として表れている. また, b-関数の根は $-1,-\frac{5}{6},-\frac{7}{6}$ であり, これらもすべてパラメータの条件として表れている. したがって, 包括的グレブナー基底系計算によって, b-関数の根に対応するホロノミー D_X-加群を得ることができる. これは, b-関数計算アルゴリズムが, 包括的グレブナー基底系計算アルゴリズムの一部と同じなので, このことは偶然ではなく常に成り立つことである.

応用 II

次に, $\mathrm{Ann}(f^s)$ に f のみを加えるのではなく, 更にヤコビイデアル $\langle\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle$ も加えたものを計算する. 具体的な計算法は次である.

計算法 2

1. 零化イデアル $\mathrm{Ann}(f^s)$ の生成元 H を $K[s,X,D]$ で計算する.
2. $H\cup\{f,\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\}$ の包括的グレブナー基底系を計算する. ただし, ここでは s をパラメータみなす.

この計算法での $f=x^2+y^3\in K[x,y]$ のときのプログラムの出力が次である. ここで, diff(F,x) は F を x で微分することを意味する. また, append([F,diff(F,x),diff(F,y)],ann(F)) とは, リスト [F,diff(F,x),diff(F,y)] にリスト ann(F) を付け加えることを意味する.

```
[428] F=x^2+y^3;
x^2+y^3
[429] newcgsw1(append([F,diff(F,x),diff(F,y)],ann(F)),[s],[[x,y],[dx,dy]],0);
[[6*s+5],[1]]
[y,x]

[[6*s+7],[1]]
[dy*y+2,y^2,x]

[[0],[36*s^2+72*s+35]]
[1]
```

この出力の意味は,
$s=-\frac{5}{6}$ のときグレブナー基底は $\{y,x\}$,

$s=-\frac{7}{6}$ のとき，グレブナー基底は $\{y\partial_y+2, y^2, x\}$,
$36s^3+108s^2+107s+35\neq 0$ のとき，グレブナー基底は $\{1\}$ であることを示している.

応用 I で見た例と比べると，この出力には, $s+1=0$ の場合がない. この $s+1=0$ は超曲面 $f=0$ の非特異部分における b-関数の根である. いまの場合, コマンド newcgsw1 に f のヤコビイデアルも入力したことにより，出力に, $s+1=0$ の場合が現れなくなっている. 一般に, 超曲面 $f=0$ の非特異な部分からなる stratum に対する b-関数の因子は $s+1=0$ であることが知られている. コマンド newcgsw1 にヤコビイデアルも入力することにより, 超曲面 $f=0$ の特異点集合上の strata に対する b-関数とホロノミー D-加群のみを得ることができる. これにより, 計算コストの軽減を図ることが出来る.

応用 III

アルゴリズム CGS には，パラメータの条件を入力することが可能であった. 次の関数 sup-cgsw は, 入力としてパラメータの満たす条件を加えることが出来るよう, 本研究で作成したものである. プログラムの引数は以下のようになっている.

sup_cgsw(([E,N], [偏微分作用素リスト], [パラメータリスト], [[$x_1,x_2,\ldots,x_n$], [$\partial_1,\partial_2,\ldots,\partial_n$]], 項順序)

ここで，E,N はパラメータからなる多項式のリストであり，$[E,N]$ は $\mathbb{V}(E)\backslash\mathbb{V}(N)$ を表している. ここに，パラメータの条件を入力すれば，$\mathbb{V}(E)\backslash\mathbb{V}(N)$ 上の包括的グレブナー基底系を計算する.

例えば，$f=z^5-x^3y^2\in K[x,y,z]$ を考え，$\mathbb{V}((5s+6)(15s+22))$ 上の $\mathrm{Ann}(f^s)\cup\{f,\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\}$ の包括的グレブナー基底系は次のように出力される. $(\partial_x:=\frac{\partial}{\partial x},\partial_x:=\frac{\partial}{\partial y},\partial_x:=\frac{\partial}{\partial z})$

```
[366] F=z^5-x^3*y^2;
-y^2*x^3+z^5
[367] L=[F,diff(F,x),diff(F,y),diff(F,z)];
[-y^2*x^3+z^5,-3*y^2*x^2,-2*y*x^3,5*z^4]
[378] sup_cgsw([[(5*s+6)*(15*s+22)],[1]],append(L,ann(F)),[s],[[x,y,z],[dx,dy,dz]],0);
[[5*s+6],[1]]
[z,-dy*y-2,dx*x+3,y^2,x^3]

[[15*s+22],[1]]
[-dz*z-4,-3*dy*y-4,dx*x+2,x^2,z^4]
```

b-関数のいくつかの因子の積を入力として加えれば，入力した因子の根ごとにホロノミー D_X-加群を出力する. もし，条件に b-関数の根の候補 β に対して $s-\beta$ を入力すれば，β は真に b-関数の根であれば，ホロノミー D_X-加群を出力する. β が b-関数の根でなければ $\{1\}$ を出力する.

この例が次である. 先程の例に条件として，$(5s+6)(15s+1)=0$ と $(4s+1)(5s+3)=0$ を入力すると，其々のホロノミー D_X-加群が次のように出力される.

```
[379] sup_cgsw([[(5*s+6)*(15*s+1)],[1]],append(L,ann(F)),[s],[[x,y,z],[dx,dy,dz]],0);
[[5*s+6],[1]]
[z,dy*y+2,-dx*x-3,y^2,x^3]

[[15*s+1],[1]]
```

```
[1]

[380] sup_cgsw([[(4*s+1)*(5*s+3)],[1]],append(L,ann(F)),[s],[[x,y,z],[dx,dy,dz]],0);
[[20*s^2+17*s+3],[1]]
[1]
```

条件 $(5s+6)(15s+1)=0$ を入力に加えた場合の出力は，$15s+1=0$ は b-関数の根でないことを意味し，$(4s+1)(5s+3)=0$ の場合の出力は，この条件を満たす b-関数の根は存在しないことを意味する．共通零点以外にも，ゼロにならない条件も入力することができる．例えば，

$$(15s+11)(15s+13)(15s+14)(15s+16)(15s+17)(15s+19)(10s+7)(10s+9)(10s+11)(10s+13)\neq 0$$

のとき，プログラムは次を出力する．

```
[381] sup_cgsw([[0],[(15*s+11)*(15*s+13)*(15*s+14)*(15*s+16)*(15*s+17)*(15*s+19)*(10*s
+7)*(10*s+9)*(10*s+11)*(10*s+13)]],append(L,ann(F)),[s],[[x,y,z],[dx,dy,dz]],0);
[[5*s+6],[1]]
[z,-dy*y-2,dx*x+3,y^2,x^3]

[[5*s+7],[1]]
[-dz*z-2,-dy*y-2,dx*x+3,z^2,y^2,x^3]

[[5*s+8],[1]]
[-dz*z-3,-dy*y-2,dx*x+3,y^2,z^3,x^3]

[[5*s+9],[1]]
[-dz*z-4,-dy*y-2,dx*x+3,y^2,x^3,z^4]

[[15*s+8],[1]]
[z,x,-3*dy*y-2]

[[15*s+22],[1]]
[-dz*z-4,-3*dy*y-4,dx*x+2,x^2,z^4]

[[0],[182455787658691406250000000*s^26+5108762054443359375000000000*s^25+68566074087
524414062500000000*s^24+587194623220825195312500000000*s^23+360355771747011566162109
37500000*s^22+16871874719679382324218750000000*s^21+626478723432760377502441406250000
*s^20+189324326196858485412597656250000*s^19+4741634957356236321201324462890625*s^18+
9970161366505222227859497070312500*s^17+17765462890958675763585662841796875*s^16+27002
578112120960452359008789062500*s^15+35163051988383622988323791503906250*s^14+393283450
95249938766369873046875000*s^13+37810373290700561606466325683593750*s^12+3122037731411
8170418462744140625000*s^11+22084426673240303138090389501953125*s^10+13324183259786878
738486115039062500*s^9+6811319440169636932880053880859375*s^8+292276405708242686068437
4007812500*s^7+1039155731472271281512046544000000*s^6+30061477679023741916569911575000
```

```
0*s^5+6894762882404590579064937181000O*s^4+1206037954309722599858048256000O*s^3+151116
120693880293083217845760O*s^2+1207680349511687802671112192O0*s+462403150853512678166 25
93024]]
[1]
```

我々のプログラムは，パラメータに関してもいろいろな条件を入力することが可能であり，汎用性のあるものであることがわかる．

応用 IV

イデアル $\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \rangle$ の準素イデアル成分を入力として加えれば，その準素イデアルが定める零点集合に support が含まれるようなホロノミー D_X-加群を出力する．

例えば，$f = z^5 - x^3y^2 \in K[x, y, z]$ を考える．$\langle f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \rangle$ の準素イデアル分解を Risa/Asir で計算すると次となる．

```
[0] load("primdec");
[181] F=z^5-x^3*y^2;
-y^2*x^3+z^5
[182] L=[F,diff(F,x),diff(F,y),diff(F,z)];
[-y^2*x^3+z^5,-3*y^2*x^2,-2*y*x^3,5*z^4]
[183] primadec(L,[x,y,z]);
[[[y,z^4],[z,y]],[[x^2,z^4],[z,x]],[[y^2,x^3,z^4],[z,y,x]]]
```

ここで，準素イデアル成分 $\langle y, z^4 \rangle$ が定める零点集合に support が含まれるようなホロノミー D_X-加群を求めるには，次のように包括的グレブナー基底系計算プログラムの入力に $\langle y, z^4 \rangle$ を加えるだけである．

```
[439] newcgsw1(append([y,z^4],ann(F)),[s],[[x,y,z],[dx,dy,dz]],0);
[[10*s+7],[1]]
[z,y,-2*dx*x-3]

[[10*s+9],[1]]
[y,dz*z+2,-2*dx*x-3,z^2]

[[10*s+11],[1]]
[y,dz*z+3,-2*dx*x-3,z^3]

[[10*s+13],[1]]
[y,dz*z+4,-2*dx*x-3,z^4]

[[0],[10000*s^4+40000*s^3+59000*s^2+38000*s+9009]]
[1]
```

このように，準素イデアル成分 $\langle y, z^4 \rangle$ が定める零点集合に support が含まれるホロノミー D_X-加群が出力される．

今迄，この節で述べたことを以下に纏めておく．包括的グレブナー基底系計算アルゴリズムを用いて b-関数計算を行うことには，次のような特徴がある．

特徴

1. b-関数の根ごとのホロノミー D_X-加群を出力する.
2. 入力を f からヤコビイデアルに変えることによって, 非特異な状態の b-関数の根を削除できる.
3. b-関数のいくつかの因子の積を入力として加えれば, 入力した因子の根ごとにホロノミー D_X-加群を出力する.
4. b-関数の根の候補 β に対して $s-\beta$ を入力すれば, β は真に b-関数の根であれば, ホロノミー D_X-加群を出力する. β が b-関数の根でなければ $\{1\}$ を出力する. また, b-関数の根の条件に関するホロノミー D_X-加群が計算可能である.
5. イデアル $\langle f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\rangle$ の準素イデアル成分を入力として加えれば, その準素イデアルが定める零点集合に support が含まれるようなホロノミー D_X-加群を出力する.
6. 局所 b-関数 (西山・野呂 [21]) により, b-関数に関する stratification を求めてある場合, stratum の情報とその stratum 上の b-関数の根を入力すれば, 指定された stratum と対応する b-関数の根に対するホロノミー D_X-加群を出力する.

特別なテクニックを駆使するのではなく, **入力を工夫することによって様々な情報を包括的グレブナー基底系は出力する**. これにより, 包括的グレブナー基底系計算アルゴリズムは**汎用性のあるアルゴリズム**であることがわかる.

3.2 計算の効率化

ここでは, 3.1 章で与えた**計算法 2** の効率化に関する試みついて述べる. $\mathrm{Ann}(f^s)$ が出力する生成元 H と $\{f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\}$ を前処理を行なわないでそのままデータとして包括的グレブナ基底系計算をする関数に渡す計算法を, ここでは Method 1 とする. すなわち, **Method 1** は次である.

Method 1

1: $\mathrm{Ann}(f^s) \cup \left\{f, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right\}$ の $\succ$ に関する包括グレブナー基底系 $\mathcal{G}$ を計算する.

Risa/Asir のコマンド ann は生成元を出力し, ユーザーが項順序を指定できない. そこで, 前処理としてまず $\mathrm{Ann}(f^s)$ のグレブナー基底を必要な項順序で $K[X, D]$ 上で計算する. また, 同様に前処理としてヤコビイデアルのグレブナー基底を多項式環上 $K[X]$ で計算しておく. これらの前処理後, 包括的グレブナー基底系計算を行う. この方法を, **Method 2** とする. すなわち, **Method 2** は次である.

Method 2

1: $G \leftarrow \mathrm{Ann}(f^s)$ のグレブナー基底をブロック項順序 $X \gg s$ で計算する. ただし, X 上の項順序は $\succ$ とする.

2: $H \leftarrow \left\langle f, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right\rangle$ の $\succ$ に関するグレブナー基底を計算する.

3: $G \cup H$ の $\succ$ に関する包括グレブナー基底系 $\mathcal{G}$ を計算する.

Method 1 と **Method 2** の計算速度比較を行った．使用した計算機は [OS:Windows7 (64bit), CPU[Intel Core i7-2600, 3.40GHZ, memory 4G] であり，Risa/Asir は version 20110721 (Kobe Distribution) である．表 1 は CPU 時間が書かれており，単位は秒である．

	f	Method 1	Method 2
1	$x^3 - y^2z^2$	0.031	0.015
2	$z^5 - x^3y^2$	0.078	0.063
3	$x^3 + y^7 + xy^5$	3.744	2.605
4	$x^4 + y^5 + x^2y^3$	3.229	0.686
5	$x^4 + y^2z + xz^2 + x^3z$	1.014	4.29
6	$x^3 + xy^5 + y^8$	4.602	4.337
7	$x^3y + xy^4 + x^2y^3$	10.16	2.98
8	$x^4 + xy^4 + y^6$	109	12.11
9	$x^3y + y^6 + xy^4$	1070	11.89

表 1: 計算速度比較

この実験結果から Method 2 は多くの場合で Method 1 より計算効率がよいことがわかる．これは，偏微分作用素環でのグレブナー基底計算は，可換な多項式環でのグレブナー基底計算より計算量が大きいことが理由であると思われる．すべての計算を Method 1 のように偏微分作用素環で行うのではなく，可換な多項式環で行える計算は予め多項式環で行っておくと，0 階の元たちの S 多項式と割り算の計算を偏微分作用素環で行う回数が減り効率がよくなる．このような簡単な改良でも実験結果にあるような大きな違いが表れる．

謝辞

本研究は科学研究補助金 若手研究 (B) 課題番号 15K17513 と基盤研究 (C) 課題番号 15K04891 の助成を受けております．

参考文献

[1] Becker, T. On Gröbner bases under specialization. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*, **5**, pages 1–8, 1994.

[2] Bahloul, R. and Oaku, T. Local Bernstein-Sato ideals: Algorithm and examples. *Journal of Symbolic Computation*, **45**, pages 46–59, 2010.

[3] Dolzmann, A., Sturm, T.: Redlog: computer algebra meets computer logic. ACM SIGSAM Bulletinn **31**, pages 2–9, 1997.

[4] Gao, X. and Chou, S. Solving parametric algebraic systems. In Wang, P., editor, *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 335–341. ACM-Press, 1992.

[5] Gianni, P. Properties of Gröbner bases under specializations. In Davenport, J., editor, *EUROCAL'87*, pages 293–297. ACM Press, 1987.

[6] Kalkbrener, M. On the stability of Gröbner bases under specializations. *Journal of Symbolic Computation*, **24**, pages 51–58, 1997.

[7] Kapur, D. An Approach for solving systems of parametric polynomial Equations. In Saraswat, V. and Hentenryck, P., editors, *Principles and Practice of Constraint Programming*, pages 217–244. MIT Press, 1995.

[8] Kapur, D., Sun, Y., and Wang, D. A New Algorithm for Computing Comprehensive Gröbner Systems. In Watt, S., editor, *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 29–36. ACM-Press, 2010.

[9] Kashiwara, M. B-functions and holonomic systems, *Invent. Math.*, **38**, pages 33–53. **38** 1976.

[10] 柏原正樹, 代数解析概論, 岩波書店, 2008.

[11] Kurata, Y. Improving Suzuki-Sato's CGS algorithm by using stability of Gröbner bases and basic manipulations for efficient implementation. *Communications of JSSAC*, **1**, pages 39–66, 2012.

[12] Lazard, D. and Rouillier, F. Solving parametric polynomial systems. *Journal of Symbolic Computation*, **43/3**, pages 636–667, 2007.

[13] Manubens, M. and Montes, A. Improving DISPGB algorithm using the discriminant ideal. *Journal of Symbolic Computation*, **41**, pages 1245–1263, 2006.

[14] Montes, A. A new algorithm for discussing Gröbner basis with parameters. *Journal of Symbolic Computation*, **33/1-2**, pages 183–208, 2002.

[15] Nabeshima, K. A speed-up of the algorithm for computing comprehensive Gröbner systems. In Brown, C., editor, *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 299–306. ACM-Press, 2007.

[16] Nabeshima, K. Comprehensive Gröbner bases in various domeins, doctotal thesis. *Johannes Kepler Universität Linz*, Austria, 2007.

[17] Nabeshima, K. Reduced Gröbner bases in polynomial rings over a polynomial ring, *Mathematics in Computer Science*, **2**, pages 587–599, 2009.

[18] Nabeshima, K. On the computation of parametric Gröbner baes for modules and syzygies. *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **27**, pages 217–238, 2010.

[19] 鍋島克輔. CGS 計算アルゴリズムのさらなる改良. 京都大学数理解析研究所講究録, **1815**, pages.29–40, 2012.

[20] Nabeshima, K. Stability Conditions of Monomial Bases and Comprehensive Gröbner systems. *Lecture Notes in Computer Science*, **7442**, pages 248–259, Springer, 2012.

[21] Nishiyama, K. and Noro, M. Stratification associated with local b-functions. *Journal of symbolic computation*, **45**, pages 462–480, 1997.

[22] Noro, M. and Takeshima, T. Risa/Asir- A computer algebra system. In Wang, P., editor, *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 387–396. ACM-Press, 1992. `http://www.math.kobe-u.ac.jp/Asir/asir.html`.

[23] 大阿久俊則, グレブナ基底と線形偏微分方程式系（計算代数解析入門）, 上智大学数学講究録 No. **38**, 1994.

[24] Oaku, T. Algorithms for the b-function and D-modules associated with a polynomial. *Journal of Pure and Applied Algebra*, **116& 118**, pages 495–518, 1997.

[25] 大阿久俊則, D 加群と計算数学, 朝倉書店, 2002.

[26] Suzuki, A. and Sato, Y. An alternative approach to comprehensive Gröbner bases. *Journal of Symbolic Computation*, **36/3-4**, pages 649–667, 2003.

[27] Suzuki, A. and Sato, Y. A simple algorithm to compute comprehensive Gröbner bases using Gröbner bases. In Dumas, J-G., editor, *International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, pages 326–331, ACM Press, 2006.

[28] Tajima, S. On b-functions and algebraic local cohomology classes attached to hypersurfaces with line singularities. *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **52**, pages 175–191, 2014.

[29] Tajima, S and Umeta, Y. Computing structure of holonomic D-modules associated with a simple line singularity, submitted

[30] Weispfenning, V. Comprehensive Gröbner bases. *Journal of Symbolic Computation*, **14/1**, pages 1–29, 1992.

[31] Weispfenning, V. Canonical comprehensive Gröbner bases. *Journal of Symbolic Computation*, **36/3-4**, pages 669–683, 2003.

[32] Yano, T. On the holonomic system of f^s and b-functions. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, **12**, pages 469–480, 1977.

[33] Yano, T. On the theory of b-functions. *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, **14**, pages 111–202, 1978.