数理解析研究所講究録
第 1977 巻 2015 年 23-32



# 基本相対不変式を利用した対称錐の特徴付け

九州大学大学院・数理学研究院　中島 秀斗[*1]
Hideto NAKASHIMA,
Faculty of Mathematics,
Kyushu University

**概要**

2008 年に伊師英之氏および野村隆昭氏によって，対称錐上のチューブ領域は基本相対不変式に関するある種の正値性を持つことが示された．本稿ではその結果を一般の等質錐上のチューブ領域上へ拡張し，さらにその結果を用いることにより，対称錐の特徴付けが得られることを報告したい．

## 序文.

$V$ を $r$ 次対称行列のなす空間とし，その中で正定値なもの全体のなす集合を $\Omega$ で表す．そして $V$ を複素化した複素対称行列のなす空間を $W$ とし，その元 $w\in W$ の左上からの $j$ 次小行列式を $\Delta_j(w)$ $(j=1,\dots,r)$ とかく．このとき $w\in W$ が Siegel 右半平面 $\Omega+iV\subset W$ に属しているならば，$\mathrm{Re}(\Delta_j(w)/\Delta_{j-1}(w))>0$ $(j=1,\dots,r)$ が成り立つことが知られていた．そしてこの性質は一般の対称チューブ領域に対しても成立するということが，2008 年に伊師英之氏および野村隆昭氏により示された (cf. [7])．すなわち $\Omega$ を対称錐，$V$ を $\Omega$ と対応する Jordan 代数とし，$V$ の principal minors $\Delta_1(x),\dots,\Delta_r(x)$ を $V$ の複素化 $W$ 上へ複素正則に拡張したとき，$w\in W$ が対称チューブ領域 $\Omega+iV\subset W$ に属しているならば，$\mathrm{Re}(\Delta_j(w)/\Delta_{j-1}(w))>0$ $(j=1,\dots,r)$ が成り立つことが示された．ここでこの性質は対称錐を特徴づけるものであるという期待が生じるが，彼らは同じ論文においてその反例を挙げている．本稿ではこの性質を一般の等質錐へ一般化することによりこの現象を解明し，さらにこの性質を利用した対称錐の特徴付けを与える．

$V$ を有限次元実ベクトル空間とし，$\Omega\subset V$ を直線を含まない階数 $r$ の等質錐とする．

---

*1 h-nakashima@math.kyushu-u.ac.jp

このとき $\Omega$ に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群 $H$ が存在する．$\Omega$ 上の関数 $f$ が，$H$ の有理指標 $\chi_{\underline{\nu}}$ ($\underline{\nu} \in \mathbb{R}^r$) を用いて $f(h \cdot x) = \chi_{\underline{\nu}}(h) f(x)$ ($h \in H,\ x \in \Omega$) となるとき，$f$ は $H$-相対不変であるといい，$\underline{\nu}$ を $f$ の指数と呼ぶ．$H$-相対不変な既約多項式は丁度 $r$ 個存在し，それらを $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ と表せば，$\Omega$ はそれらの正値集合

$$\Omega = \{x \in V;\ \Delta_1(x) > 0, \ldots, \Delta_r(x) > 0\}$$

として記述される (cf. Ishi–Nomura [7])．この $\Delta_j(x)$ ($j = 1, \ldots, r$) を $\Omega$ の基本相対不変式と呼び，その指数 $\underline{\sigma}_j = (\sigma_{j1}, \ldots, \sigma_{jr})$ を並べて得られる行列 $\sigma = (\sigma_{jk})_{1 \le j,k \le r}$ を等質錐 $\Omega$ の指数行列と呼ぶ．指数行列を求めるアルゴリズムは，[9] により与えられた．

$W$, $H_{\mathbb{C}}$ をそれぞれ $V$, $H$ の複素化とし，チューブ領域 $T_\Omega = \Omega + iV \subset W$ を考える．$\Omega$ の基本相対不変式を $W$ 上に複素正則に拡張し，同じ記号 $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ で表す．そしてそれらの零点のなす集合を $\mathcal{S} = \{w \in W;\ \Delta_j(w) = 0 \text{ for some } j\}$ とし，さらに

$$\Delta^{\underline{\nu}}(w) = \Delta_1(w)^{\nu_1} \cdots \Delta_r(w)^{\nu_r} \quad (w \in W \setminus \mathcal{S};\ \underline{\nu} \in \mathbb{Z}^r)$$

とおけば，$\Delta^{\underline{\nu}}(w)$ は有理関数なので $H_{\mathbb{C}}$-相対不変関数となる．ここで $\underline{e}_j$ を第 $j$ 成分が 1 でそれ以外は 0 である基本ベクトルとすれば，以下が成り立つ (定理 2.3):

$$w \in T_\Omega \Longrightarrow \operatorname{Re} \Delta^{\underline{e}_j \sigma^{-1}}(w) > 0 \quad (j = 1, \ldots, r).$$

命題 3.1 において，対角成分が 1 である下三角行列 $\tau \in \mathrm{Mat}(r, \mathbb{Z})$ について，任意の $w \in T_\Omega$ に対して $\operatorname{Re} \Delta^{\underline{e}_j \tau}(w) > 0$ ($j = 1, \ldots, r$) が成り立つならば，$\tau = \sigma^{-1}$ となることを示す．また，命題 3.1 と指数行列の計算アルゴリズム (cf. 式 (1.2)) より，任意の $w \in T_\Omega$ に対して

$$\operatorname{Re} \frac{\Delta_j(w)}{\Delta_{j-1}(w)} > 0 \quad (j = 1, \ldots, r;\ \Delta_0(w) := 1)$$

が成り立つならば，$V$ の非対角成分 $\mathcal{V}_{kj}$ (cf. 式 (1.1)) の次元 $d_{kj}$ ($1 \le j < k \le r$) は $d_{k1} = d_{k2} = \cdots = d_{k,k-1}$ ($k = 2, \ldots, r$) を満たすことがわかる (命題 3.2)．さらに，同様の議論を $\Omega$ の双対錐 $\Omega^*$ で行うことによって，既約な等質錐 $\Omega$ が対称となるのは，任意の $w \in \Omega + iV$ および $w^* \in \Omega^* + iV$ に対して

$$\operatorname{Re} \frac{\Delta_j(w)}{\Delta_{j-1}(w)} > 0, \quad \operatorname{Re} \frac{\Delta_j^*(w^*)}{\Delta_{j+1}^*(w^*)} > 0 \quad (j = 1, \ldots, r;\ \Delta_{r+1}^*(w^*) = 1)$$

を満たすとき，そしてそのときに限る，という対称錐の特徴付けを定理 3.4 で与える．対称錐を特徴付ける上で，$\Omega$ だけでなくその双対錐 $\Omega^*$ についての条件も要求されるという

ことは Yamasaki [14] でも言及されており，等質錐を扱う際には，同時にその双対錐も扱うことが自然であるということの表れである．また Vinberg [12] にある連続パラメータを持つ互いに線型非同値である 11 次元の等質錐のように，同じ非対角成分の次元を持つ互いに線型同値でない既約等質錐の系列が存在するが，それらの代数構造は既に基本相対不変式に取り込まれており，指数行列を求める手続きはそれらに共通する次元情報のみに依存し特にパラメータには依らない．したがって定理 2.3 もパラメータに依存しないという点も興味深い．

# 1 等質開凸錐

$V$ を有限次元実ベクトル空間とし，$\Omega \subset V$ を直線を含まない開凸錐とする．$GL(V)$ の部分群で $\Omega$ を不変にするものを $G(\Omega)$ で表す．このとき $G(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群となり，したがって Lie 群となる．ここで $G(\Omega)$ が $\Omega$ に推移的に作用しているとき，$\Omega$ は等質であるという．本稿では開凸錐は常に等質であると仮定し，単に等質錐と呼ぶ．また，Vinberg [12] にあるように，$G(\Omega)$ は $\Omega$ に単純推移的に作用する分裂可解な部分 Lie 群 $H$ を持つ．

等質錐の例を挙げよう．$N$ 次の対称行列のなす空間を $\mathcal{S}_N$ で表し，その中で正定値なもの全体のなす集合を $\mathcal{S}_N^+$ とすれば，$\mathcal{S}_N^+$ は開凸錐になる．ここで $g \in GL(N, \mathbb{R})$ に対して $g \cdot x := gx\,{}^tg$ $(x \in \mathcal{S}_N)$ とすると，この作用によって $\mathcal{S}_N^+$ は等質となり，したがって $\mathcal{S}_N^+$ は等質錐である．さらに $\mathcal{H}_N$ を対角成分が正である下三角行列のなす $GL(N, \mathbb{R})$ の部分群とすれば，$\mathcal{H}_N$ は $\mathcal{S}_N^+$ に単純推移的に作用する (Cholesky 分解)．

Graczyk–Ishi [3, §3.2] に従って，$\mathcal{S}_N$ の部分空間の中において等質錐を構成しよう (cf. Ishi [6])．自然数 $N$ を $N = n_1 + \cdots + n_r$ と分割し，$\mathcal{V}_{lk} \subset \mathrm{Mat}(n_l, n_k; \mathbb{R})$ $(k \leq l)$ を次の条件を満たす行列空間の族とする：

(V1) $A \in \mathcal{V}_{lk},\ B \in \mathcal{V}_{kj} \Rightarrow AB \in \mathcal{V}_{lj}$ $(j < k < l)$,
(V2) $A \in \mathcal{V}_{lj},\ B \in \mathcal{V}_{kj} \Rightarrow A\,{}^tB \in \mathcal{V}_{lk}$ $(j < k < l)$,
(V3) $A \in \mathcal{V}_{kj} \Rightarrow A\,{}^tA \in \mathbb{R}I_{n_k}$ $(j < k)$.

これらを用いて $\mathcal{S}_N$ の部分空間 $\mathcal{Z}_\mathcal{V}$ を

$$(1.1) \qquad \mathcal{Z}_\mathcal{V} := \left\{ X = \begin{pmatrix} X_{11} & {}^tX_{21} & \cdots & {}^tX_{r1} \\ X_{21} & X_{22} & \ddots & {}^tX_{r2} \\ \vdots & & \ddots & \\ X_{r1} & X_{r2} & \cdots & X_{rr} \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} X_{kk} = x_{kk} I_{n_k}, \\ (x_{kk} \in \mathbb{R}) \\ X_{lk} \in \mathcal{V}_{lk} \end{array} \right\} \subset \mathcal{S}_N$$

により定義し，$\mathcal{P}_{\mathcal{V}} := \mathcal{Z}_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{S}_N^+$ とおくと，$\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ は $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ の中の直線を含まない開凸錐とある．ここで，$\mathcal{H}_N$ の部分 Lie 群 $H_{\mathcal{V}}$ を次のように定義する：

$$H_{\mathcal{V}} := \left\{ h = \begin{pmatrix} T_{11} & & & \\ T_{21} & T_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{r1} & T_{r2} & \cdots & T_{rr} \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} T_{kk} = e^{\frac{1}{2}t_k} I_{n_k} \\ (t_k \in \mathbb{R}) \\ T_{lk} \in \mathcal{V}_{lk} \end{array} \right\} \subset \mathcal{H}_N.$$

すると条件 (V1)–(V3) より，$H_{\mathcal{V}}$ は $h \cdot x = hx\,{}^t h$ $(h \in H_{\mathcal{V}},\ x \in \mathcal{P}_{\mathcal{V}})$ によって $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ に単純推移的に作用し，したがって $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ は等質錐になる．実は Ishi [6] にあるように，任意の等質錐 $\Omega$ はこのように構成されたある $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ と線型同型になり，$\Omega$ に単純推移的に作用する分裂可解 Lie 群 $H$ は対応する $H_{\mathcal{V}}$ と同型になる．以下本稿で扱う等質錐はすべてこのように実現されているとする．また，ここで現れる分割の個数 $r$ を等質錐 $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ の階数という．

$\chi$ を $H$ 上の有理指標とする．このとき $H$ は三角型であるので，$\chi$ はある $\underline{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_r) \in \mathbb{R}^r$ を用いて次のように表せる:

$$\chi(h) = \chi_{\underline{\nu}}(h) = e^{\nu_1 t_1 + \cdots + \nu_r t_r} \quad (h \in H).$$

$\Omega$ 上の関数 $f$ が $H$ に関して相対不変であるとは，$H$ 上のある有理指標 $\chi_{\underline{\nu}}$ $(\underline{\nu} \in \mathbb{R}^r)$ が存在して $f(h \cdot x) = \chi_{\underline{\nu}}(h) f(x)$ $(h \in H,\ x \in \Omega)$ が成り立つこととし，$\underline{\nu}$ を相対不変関数 $f$ の指数という．このとき各成分が正である対角行列 $x = \mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_r)$ に対しては $f(x) = x_1^{\nu_1} \cdots x_r^{\nu_r}$ が成り立つ．等質錐 $\Omega$ 上の $H$-相対不変な既約多項式は丁度 $r$ 個存在し，任意の $H$-相対不変な多項式はそれらのべき積で表される．すなわちその既約多項式を $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ とかけば，任意の $H$-相対不変多項式 $p(x)$ は

$$p(x) = (\text{const.}) \Delta_1(x)^{m_1} \cdots \Delta_r(x)^{m_r} \quad (x \in V; m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

となる．さらに $\Omega$ はそれらの正値集合として以下のように表される (cf. [7]):

$$\Omega = \{x \in V;\ \Delta_1(x) > 0, \ldots, \Delta_r(x) > 0\}.$$

この既約多項式 $\Delta_1(x), \ldots, \Delta_r(x)$ を等質錐 $\Omega$ の基本相対不変式という．また，$\Delta_j(x)$ の指数を $\underline{\sigma}_j = (\sigma_{j1}, \ldots, \sigma_{jr})$ とするとき，それらを並べて得られる $r$ 次の正方行列

$$\sigma = \begin{pmatrix} \underline{\sigma}_1 \\ \vdots \\ \underline{\sigma}_r \end{pmatrix} = (\sigma_{jk})_{1 \leq j,k \leq r}$$

を等質錐 $\Omega$ の指数行列と呼ぶ．Ishi [5] で与えられている基本相対不変式の構成法から，その順番を適当にとれば，$\sigma$ は対角成分がすべて 1 である下三角行列とすることができ

る．よって，以後 $\Omega$ の基本相対不変式はこの順番で並んでいるとする．指数行列は以下のアルゴリズムによって計算される (cf. [9])．簡単のため $d_{kj} := \dim \mathcal{V}_{kj}$ $(1 \le j < k \le r)$ とおき，$i = 1, \ldots, r-1$ に対して，$\boldsymbol{d}_i := {}^t(0, \ldots, 0, d_{i+1,i}, \ldots, d_{ri})$ とする．このとき，各 $i$ 列ごとに $\boldsymbol{l}_i^{(j)} = {}^t(l_{1i}^{(j)}, \ldots, l_{ri}^{(j)})$ $(j = i, \ldots, r)$ を帰納的に次のように定義する:

$$\begin{cases} \boldsymbol{l}_i^{(i)} &= \boldsymbol{d}_i, \\ \boldsymbol{l}_i^{(k+1)} &= \begin{cases} \boldsymbol{l}_i^{(k)} - \boldsymbol{d}_{k+1} & (l_{ki}^{(k)} > 0), \\ \boldsymbol{l}_i^{(k)} & (l_{ki}^{(k)} = 0). \end{cases} \end{cases}$$

さらに，$\boldsymbol{\varepsilon}^{[i]} = {}^t(\varepsilon_{i+1,i}, \ldots, \varepsilon_{ri}) \in \{0,1\}^{r-i}$ を

$$\varepsilon_{ji} = \begin{cases} 1 & (\text{if } l_{ji}^{(j)} > 0), \\ 0 & (\text{if } l_{ji}^{(j)} = 0) \end{cases} \qquad (j = i+1, \ldots, r)$$

により定義すると，指数行列 $\sigma$ は

$$\sigma = \mathcal{E}_{r-1}\mathcal{E}_{r-2}\cdots\mathcal{E}_1, \quad \mathcal{E}_i = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\varepsilon}^{[i]} & I_{r-i} \end{pmatrix} \quad (i = 1, \ldots, r-1) \tag{1.2}$$

で与えられる．特に $\sigma^{-1} = (\sigma^{jk})$ のように表せば，$\sigma^{ji} = -\varepsilon_{ji}$ $(i < j)$ である．

## 2 Ishi–Nomura の結果の一般化

$\Omega$ を有限次元実ベクトル空間 $V$ の中の等質錐として，前節の記号を引き続き用いる．$V$ の複素化を $W$ で表し，チューブ領域 $T_\Omega := \Omega + iV \subset W$ を Siegel 右半平面の一般化とする．さらに分裂可解 Lie 群 $H$ を複素化したものを $H_{\mathbb{C}}$ で表せば，$H_{\mathbb{C}}$ の指標 $\chi$ は $\chi(h) = \chi_{\underline{\nu}}(h) = e^{\nu_1 t_1 + \cdots + \nu_r t_r}$ $(h \in H_{\mathbb{C}};\ \underline{\nu} \in \mathbb{C}^r)$ で与えられる．ここで $H_{\mathbb{C}}$ の $W$ 上への作用を $h \cdot w := hw{}^th$ $(h \in H_{\mathbb{C}}, w \in W)$ とし，$H_{\mathbb{C}}$ に同値関係 $\sim$ を

$$h \sim h' \iff h \cdot w = h' \cdot w \quad \text{for all } w \in W$$

により定義すると，以下が成り立つ．

**命題 2.1.** $\underline{\nu} \in \mathbb{Z}^r$ とする．このとき $h \sim h'$ ならば $\chi_{\underline{\nu}}(h) = \chi_{\underline{\nu}}(h')$.

指数 $\underline{\nu} \in \mathbb{Z}^r$ を持つ $H$-相対不変関数 $f$ は有理関数であり，命題 2.1 より $f$ を複素正則に拡張した $f_{\mathbb{C}}$ は次の意味で $H_{\mathbb{C}}$-相対不変である．すなわち，任意の $h \in H_{\mathbb{C}}$ に対して $f_{\mathbb{C}}(h \cdot w) = \chi_{\underline{\nu}}(h) f_{\mathbb{C}}(w)$ $(w \in W)$ を満たす．特に対角行列 $w = \mathrm{diag}(w_1, \ldots, w_r)$

$(w_j \in \mathbb{C}^\times)$ に対しては，$f(w) = w_1^{\nu_1} \cdots w_r^{\nu_r}$ が成り立つ．また $H_\mathbb{C}$ の部分群で対角成分がすべて 1 であるものを $N_\mathbb{C}$ で表せば，$n \in N_\mathbb{C}$ のとき $f_\mathbb{C}(n \cdot w) = f_\mathbb{C}(w)$ $(w \in W)$ となる．

$\Omega$ の基本相対不変式はいずれも多項式であるので，それを複素正則に拡張したものを同じ記号 $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ で表せば，これらはいずれも $H_\mathbb{C}$-相対不変な多項式になる．ここで $\mathcal{S} := \{w \in W;\ \Delta_j(w) = 0 \text{ for some } j\}$ を $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ の零点集合とする．

**命題 2.2** (Ishi–Nomura [7])**.** (1) 任意の $w \in W \backslash \mathcal{S}$ に対して $n \in N_\mathbb{C}$ および $\alpha_k(w) \in \mathbb{C}^\times$ $(k = 1, \ldots, r)$ が一意に存在して，$w = n \cdot \mathrm{diag}(\alpha_1(w), \cdots, \alpha_r(w))$ と表される．
(2) $w \in T_\Omega$ とすると，任意の $k = 1, \ldots, r$ に対して $\mathrm{Re}\, \alpha_k(w) > 0$.

$w \in W \setminus \mathcal{S}$ に対して $\alpha_j(w)$ を求めよう．$\underline{\nu}, \underline{\tau} \in \mathbb{Z}^r$ のとき冪積 $\Delta^{\underline{\nu}}(w)$ および $\alpha^{\underline{\tau}}(w)$ を

$$\Delta^{\underline{\nu}}(w) := \Delta_1(w)^{\nu_1} \cdots \Delta_r(w)^{\nu_r}, \quad \alpha^{\underline{\tau}}(w) := \alpha_1(w)^{\tau_1} \cdots \alpha_r(w)^{\tau_r} \quad (w \in W \setminus \mathcal{S})$$

により定義する．$H_\mathbb{C}$-相対不変関数は $N_\mathbb{C}$ の作用で不変であったので，命題 2.2 (1) より

$$\begin{aligned} \Delta_j(w) &= \Delta_j(n \cdot \mathrm{diag}(\alpha_1(w), \ldots, \alpha_r(w))) = \Delta_j(\mathrm{diag}(\alpha_1(w), \ldots, \alpha_r(w))) \\ &= \alpha_1(w)^{\sigma_{j1}} \cdots \alpha_r(w)^{\sigma_{jr}} = \alpha^{\underline{\sigma}_j}(w) \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\Delta^{\underline{\nu}}(w) = (\alpha^{\underline{\sigma}_1}(w))^{\nu_1} \cdots (\alpha^{\underline{\sigma}_r}(w))^{\nu_r} = \alpha^{\underline{\nu}\sigma}(w)$$

を得るが，ここで $\underline{e}_j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ を第 $j$ 成分が 1 である単位ベクトルとして $\underline{\nu} = \underline{e}_j \sigma^{-1}$ とすれば

$$\alpha_j(w) = \Delta^{\underline{e}_j \sigma^{-1}}(w) \quad (w \in W \setminus \mathcal{S})$$

となるので，命題 2.2 (2) と合わせると次を得る．

**定理 2.3.** $w \in T_\Omega$ ならば，$\mathrm{Re}\, \Delta^{\underline{e}_j \sigma^{-1}}(w) > 0$ $(j = 1, \ldots, r)$ が成り立つ．

## 3 対称錐の特徴付け

前節までの記号を引き続き用いる．本節では，定理 2.3 を用いた対称錐の特徴付けを与える．そのためにまず，定理 2.3 を満たす基本相対不変式の冪数は $\underline{e}_j \sigma^{-1}$ に限ることを示そう．$\tau \in \mathrm{Mat}(r, \mathbb{Z})$ を対角成分が 1 である下三角行列とすれば，次が成り立つ．

**命題 3.1.** 任意の $w \in T_\Omega$ に対して次が成り立つならば，$\tau = \sigma^{-1}$ である:

$$\operatorname{Re} \Delta^{\underline{e}_j \tau}(w) > 0 \quad (j = 1, \ldots, r).$$

**証明.** $\tau' := \tau - \sigma^{-1}$ とおけば，$\tau'$ は対角成分がすべて 0 である下三角行列にある．さて $\tau' \neq 0$ を仮定しよう．$\nu := \tau'\sigma$ もまた対角成分がすべて 0 である下三角行列であり，特に零行列でないので，零でない行ベクトルが存在する．その行を $\underline{\nu}_m := \underline{e}_m \nu = (\nu_1, \ldots, \nu_{m-1}, 0, \ldots, 0)$ とすれば，任意の $w \in W \setminus \mathcal{S}$ に対して

$$\Delta^{\underline{e}_m \tau'}(w) = \alpha^{\underline{\nu}_m}(w) = \alpha_1(w)^{\nu_1} \cdots \alpha_{m-1}(w)^{\nu_{m-1}}$$

であり，また $\Delta^{\underline{e}_m \sigma^{-1}}(w) = \alpha_m(w)$ であったので，

$$\Delta^{\underline{\tau}_m}(w) = \alpha_1(w)^{\nu_1} \cdots \alpha_{m-1}(w)^{\nu_{m-1}} \cdot \alpha_m(w)$$

が成り立つ．ここで $\nu_k \neq 0$ を仮定する．このとき $k < m$ に注意する．符号関数 $\operatorname{sgn}(x)$ ($x \in \mathbb{R}^\times$) を用いて，$\theta_k := \frac{\pi}{|\nu_k|+2}$ および $\theta_m := \operatorname{sgn}(\nu_k)\theta_k$ とおく．さらに

$$w_0 := \operatorname{diag}(1, \ldots, \overset{k}{\breve{e^{i\theta_k}}}, \ldots, \overset{m}{\breve{e^{i\theta_m}}}, \ldots, 1) \in W$$

とすれば，$\theta_k, \theta_m \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ であるので，$w_0 \in T_\Omega$ である．一方，$\frac{|\nu_k|+1}{|\nu_k|+2}\pi \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ より

$$\operatorname{Re} \Delta^{\underline{\tau}_m}(w_0) = \operatorname{Re}\left(e^{i\nu_k\theta_k} \cdot e^{i\theta_m}\right) = \operatorname{Re} e^{i\operatorname{sgn}(\nu_k)\frac{|\nu_k|+1}{|\nu_k|+2}\pi} < 0$$

となり，これは矛盾．したがって $\tau' = 0$，すなわち $\tau = \sigma^{-1}$ でなければならない． □

$\Delta_0(w) := 1$ とすれば，命題 3.1 と指数行列の計算アルゴリズムより，次の命題を得る．

**命題 3.2.** $\Omega$ を既約な等質錐とする．任意の $w \in T_\Omega$ に対して

$$\operatorname{Re} \frac{\Delta_j(w)}{\Delta_{j-1}(w)} > 0 \quad (j = 1, \ldots, r)$$

を満たすならば，非対角成分の空間 $\mathcal{V}_{kj}$ の次元 $d_{kj}$ は次を満たす：

$$d_{k1} = d_{k2} = \cdots = d_{k,k-1} \quad (k = 2, \ldots, r).$$

**証明.** 命題 3.1 より，$\Omega$ の指数行列の逆行列は

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる．指数行列の構成法を思い出そう．$\boldsymbol{l}_1^{(1)} = \boldsymbol{d}_1 = {}^t(0, d_{21}, \ldots, d_{r1})$ とおくと，$\varepsilon_{21} = -\sigma^{21} = 1$ より $d_{21} > 0$ であるので，

$$\boldsymbol{l}_1^{(2)} = \boldsymbol{l}_1^{(1)} - \boldsymbol{d}_2 = {}^t(0, d_{21}, d_{31} - d_{32}, \ldots, d_{r1} - d_{r2})$$

となる．ここで $k = 3, \ldots, r$ のとき，$\varepsilon_{k1} = 0$ であることより $d_{k1} - d_{kr} = 0$ でなければならない．2 列目以降においても同じ議論を行うことにより，命題を得る．□

$V$ の内積を $\langle\cdot|\cdot\rangle$ で表す．ここで $\Omega^* \subset V$ を，内積 $\langle\cdot|\cdot\rangle$ を通して

$$\Omega^* := \{y \in V;\ \langle x|y\rangle > 0 \text{ for all } x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}\}$$

と定義すれば，これは開凸錐になる．さらに $H$ の作用を $\rho$ で表し，$\rho$ の反傾表現 $\rho^*$ を

$$\langle \rho(h)x\,|\,\rho^*(h)y\rangle = \langle x\,|\,y\rangle \quad (h \in H,\ x, y \in V)$$

により定義すると，$H$ は $\rho^*$ により $\Omega^*$ に単純推移的に作用する．したがって $\Omega^*$ は階数 $r$ の等質錐になり，これを $\Omega$ の双対錐と呼ぶ．作用が反傾的であることを踏まえ，$\Omega^*$ 上の関数 $f^*$ が $H$-相対不変であるということを次のように定義する．すなわち，ある $H$ の有理表現 $\chi_{\underline{\nu}^*}$ ($\underline{\nu}^* \in \mathbb{R}^r$) が存在して任意の $h \in H$ に対して，

$$f^*(\rho^*(h)y) = \chi_{\underline{\nu}^*}^{-1}(h) f^*(y) \quad (y \in \Omega^*)$$

を満たすことと定義する．この $\underline{\nu}^*$ を $\Omega^*$ の $H$-相対不変関数 $f^*$ の指数と呼ぶ．双対錐 $\Omega^*$ の基本相対不変式 $\Delta_j^*(y)$ $(j = 1, \ldots, r)$ の指数を $\underline{\sigma}_j^* = (\sigma_{j1}^*, \ldots, \sigma_{jr}^*)$ とし，それらを並べて指数行列 $\sigma_* = (\sigma_{jk}^*)_{1 \le j,k \le r}$ を構成する．ここで $H$ が反傾的に作用しているので，$\Delta_1^*(y), \ldots, \Delta_r^*(y)$ の順番を適当に並び替えることにより $\sigma_*$ を上三角行列にすることができ，以後 $\Delta_1^*(y), \ldots, \Delta_r^*(y)$ はこの順番で並んでいるとする．

等質錐のクラスにおける対称錐の特徴付けに関して，次の定理が知られている．

**定理 3.3** (Yamasaki [14])**.** $\Omega$ を既約等質錐とする．このとき $\Omega$ が対称となるのは次の条件を満たすとき，そしてそのときに限る:

$$\{\deg \Delta_1, \ldots, \deg \Delta_r\} = \{\deg \Delta_1^*, \ldots, \deg \Delta_r^*\} = \{1, 2, \ldots, r\}.$$

定理 3.3 では，等質錐 $\Omega$ の情報だけでなくその双対錐の情報も合わせて考えることにより，対称錐の特徴付けが得られている．このアイデアに基づき "基本相対不変式の比の実部が正になる" という条件を，等質錐およびその双対錐の両方で考えると，これが対称錐の特徴付けを与える．$T_\Omega = \Omega + iV$, $T_{\Omega^*} = \Omega^* + iV$ とし，$\Delta_0(w) = 1$ $(w \in T_\Omega)$ および $\Delta_{r+1}^*(w^*) = 1$ $(w^* \in T_{\Omega^*})$ とおく．

**定理 3.4.** $\Omega$ を既約な等質錐とする．このとき $\Omega$ が対称となるのは，任意の $w \in T_\Omega$ および $w^* \in T_{\Omega^*}$ に対して

$$(1)\ \operatorname{Re}\frac{\Delta_j(w)}{\Delta_{j-1}(w)} > 0, \quad (2)\ \operatorname{Re}\frac{\Delta_j^*(w^*)}{\Delta_{j+1}^*(w^*)} > 0 \quad (j = 1, \dots, r)$$

を満たすとき，そしてそのときに限る．

**証明.** 命題 3.2 より，条件 (1) から $d_{kj} = \dim \mathcal{V}_{kj}$ は次を満たす：

$$d_{k1} = d_{k2} = \cdots = d_{k,k-1} \quad (k = 2, \dots, r).$$

一方，(双対錐に対する) 命題 3.2 より，条件 (2) から

$$d_{j+1,j} = d_{j+2,j} = \cdots = d_{rj} \quad (j = 1, \dots, r-1)$$

も満たす．このふたつを合わせると，$d = d_{kj}$ $(1 \le j < k \le r)$ となる自然数 $d$ が存在する．ここで，Vinberg [13, Proposition 3] にあるようにこの条件を満たす既約な等質錐は対称錐に限るので，$\Omega$ は対称錐でなければならない． □

**例 3.5** (cf. [11]). $n \geq 2$ とし，$V$ を次のような $\mathcal{S}_{np+1}$ の部分空間とする：

$$V = \left\{ X = \begin{pmatrix} x \otimes I_p & \boldsymbol{\eta} \\ {}^t\boldsymbol{\eta} & \mu \end{pmatrix};\ x \in \mathcal{S}_n,\ \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{np},\ \mu \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{S}_{np+1}.$$

ここで $\boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^{np}$ はサイズが $np$ である縦ベクトルである．すると，$\Omega := V \cap \mathcal{S}_{np+1}^+$ は階数 $n+1$ の等質錐になり，特に対称錐ではない．$x \in \mathcal{S}_n$ の左上からの $k$ 次小行列式を $\det^{(k)}(x)$ $(k = 1, \dots, n)$ とすると，$\Omega$ の基本相対不変式は

$$\Delta_k(X) = \det{}^{(k)}(x) \quad (k = 1, \dots, n), \quad \Delta_{n+1}(X) = \mu \det x - {}^t\boldsymbol{\eta}({}^{\mathrm{co}}x \otimes I_p)\boldsymbol{\eta}$$

により与えられる．ただし ${}^{\mathrm{co}}x$ は $x \in \mathcal{S}_n$ の余因子行列である．したがって $\Omega$ の指数行列 $\sigma$ およびその逆行列 $\sigma^{-1}$ は

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

であるので，定理 2.3 よりこの等質錐は条件

$$\operatorname{Re}\frac{\Delta_j(w)}{\Delta_{j-1}(w)} > 0 \quad (\text{for any } w \in T_\Omega;\ j = 1, \dots, r)$$

を満たすが，対称錐でない例を与えている．ここで特に $n = 2$ としたものが Ishi–Nomura [7] で反例として挙げられていたものであり，本例はその一般化である．

# 参考文献

[1] J. Faraut and A. Korányi, "Analysis on symmetric cones", Clarendon Press, Oxford, 1994.

[2] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys **19** (1964), 1–89.

[3] P. Graczyk and H. Ishi, *Riesz measures and Wishart laws associated to quadratic maps*, J. Math. Soc. Japan, **66** (2014), 317–348.

[4] H. Ishi, *Positive Riesz distributions on homogeneous cones*, J. Math. Soc. Japan, **52** (2000), 161–186.

[5] H. Ishi, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.

[6] H. Ishi, *On symplectic representations of normal $j$-algebras and their application to Xu's realizations of Siegel domains*, Differ. Geom. Appl., **24** (2006), 588–612.

[7] H. Ishi and T. Nomura, *Tube domain and an orbit of a complex triangular group*, Math. Z., **259** (2008), 697–711.

[8] T. Kimura, "Introduction to prehomogeneous vector spaces", Transl. Math. Monogr., Amer. Math. Soc., Providence, RI, **215**, (2002).

[9] H. Nakashima, *Basic relative invariants of homogeneous cones*, Journal of Lie Theory **24** (2014), 1013–1032.

[10] H. Nakashima, *Characterization of symmetric cones by means of the basic relative invariants*, submitting.

[11] H. Nakashima and T. Nomura, *Clans defined by representations of Euclidean Jordan algebras and the associated basic relative invariants*, Kyushu J. Math. **67** (2013), 163–202.

[12] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.

[13] E. B. Vinberg, *The structure of the group of automorphisms of a homogeneous convex cone*, Trans. Moscow Math., Soc., **13** (1965), 63–93.

[14] T. Yamasaki, *Studies on homogeneous cones and the basic relative invariants through skeleton*, Doctoral thesis admitted to Kyushu university (2014)