数理解析研究所講究録
第 1977 巻 2015 年 33-44

Ding-Iohara-Miki 代数の modular double に関する予想

齋藤 洋介
大阪市立大学数学研究所
Yosuke Saito
Osaka City University Advanced Mathematical Institute

2015 年 9 月 30 日

概要

楕円 Ding-Iohara-Miki 代数は Ruijsenaars 作用素の自由場表示を通じて導入された. 本紙では, 楕円 Ding-Iohara-Miki 代数のレベル 0 表現と Ding-Iohara-Miki 代数の modular double のレベル 0 表現の間の関係についての予想を述べる.

1 Introduction

今回の目的は「**楕円 Ding-Iohara-Miki 代数のレベル 0 表現の modular 変換のあるスケール極限を考えることで, Ding-Iohara-Miki 代数の modular double のレベル 0 表現が得られる**」という予想について解説することである. まず Ding-Iohara-Miki 代数と楕円 Ding-Iohara-Miki 代数, 量子群の modular double について説明し, 次になぜ上の予想に至ったのかについて述べる.

1.1 楕円 Ding-Iohara-Miki 代数の導入

Ding-Iohara-Miki 代数は数理物理において近年注目されている量子群である. この名前の由来は次の通りである. まず 1997 年に Ding と Iohara が量子群 $U_q(\widehat{sl_2})$ のある一般化を提唱した [DI]. 彼らは条件 $g(x^{-1})=g(x)^{-1}$ を満たす構造関数を与えるごとに定まる量子群という概念を導入し, これを Ding-Iohara 代数と呼ぶ. その後, 2007 年の三木による $W_{1+\infty}$ 代数の q-変形に関する研究 [Miki] があり, そこで導入された代数が先の Ding と Iohara の量子群の構造を持っていることがわかった. よって「三木が導入した Ding-Iohara 代数」という意味で Ding-Iohara-Miki 代数という用語を用いる.

Ding-Iohara-Miki 代数に至る別の道として Macdonald 作用素 [Mac] の自由場表示がある．この点を強調した仕事としては 2009 年の Feigin-Hashizume-Hoshino-Shiraishi-Yanagida [FHHSY] がある．$T_{q,x}$ を q-シフト作用素とする：$T_{q,x}f(x) := f(qx)$. Macdonald 作用素 $H_N(q,t)$ $(N \in \mathbb{Z}_{>0})$ は次で定義される q-差分作用素である．

$$H_N(q,t) := \sum_{i=1}^{N} \prod_{j \neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} T_{q,x_i}.$$

Feigin らは三角 Feigin-Odesskii 代数と呼ばれる多変数の有理関数からなる代数と Macdonald 作用素の自由場表示を用いて，可換な q-差分作用素の族を構成した．このときいくつかのボソンの作用素が用いられるが，これらが Ding-Iohara-Miki 代数の関係式を満たすことがわかる．すなわち，Macdonald 作用素の自由場表示において現れるボソンの作用素は Ding-Iohara-Miki 代数の表現を与えることが明らかになった．

$|p| < 1$ なる $p \in \mathbb{C}$ に対して $(x;p)_\infty := \prod_{n \geq 0}(1 - xp^n)$ $(x \in \mathbb{C})$ とおく．テータ関数 $\Theta_p(x)$ を次で定義する．

$$\Theta_p(x) := (p;p)_\infty (x;p)_\infty (px^{-1};p)_\infty \quad (x \in \mathbb{C}^\times).$$

Macdonald 作用素には次で定義される Ruijsenaars 作用素 [R1] という楕円関数化が存在する：

$$H_N(q,t,p) := \sum_{i=1}^{N} \prod_{j \neq i} \frac{\Theta_p(tx_i/x_j)}{\Theta_p(x_i/x_j)} T_{q,x_i}.$$

これが Macdonald 作用素の楕円関数化であるというのは $\Theta_p(x) \xrightarrow[p \to 0]{} 1 - x$ より次が成り立つことを意味する．

$$H_N(q,t,p) \xrightarrow[p \to 0]{} H_N(q,t).$$

また一方で，Feigin と Odesskii が導入した Feigin-Odesskii 代数 [FO] という多変数の楕円関数からなる代数の存在が知られていた．よって，先に述べた Feigin らの仕事のように，Feigin-Odesskii 代数を用いた Ruijsenaars 作用素を含む可換な q-差分作用素の族を構成できるか？ということが自然に問題になる．この問題を解くには，Ruijsenaars 作用素をうまく自由場表示する方法を知っておく必要がある．2009 年の Feigin らの仕事では，従来のような方法では Ruijsenaars 作用素を自由場表示するのは困難であることが報告されていた．

そこで筆者は 2 種類のボソンをうまく用いることでこの困難を解消できることを示した [Sa1]. Ruijsenaars 作用素の自由場表示においてもいくつかのボソンの作用素が用いられるが，三角の場合と同様，これらはある閉じた関係式を満たすことが確かめられた．この関係式

というのは, Ding-Iohara-Miki 代数の関係式が楕円関数化されたものになっており, これはDing-Iohara-Miki 代数の楕円関数化の表現が現れたことを意味する. 以上のようにして楕円 Ding-Iohara-Miki 代数が導入された [Sa1]. Feigin-Odesskii 代数と Ruijsenaars 作用素の自由場表示による可換な q-差分作用素の構成については [Sa2] を参照されたい.

1.2 量子群の modular double

量子群の modular double とは, 大まかに言って「可換な 2 つの量子群からなるある modular 性を備えた代数」のことである. この概念を最初に導入したのは Faddeev [F] であり, 彼は $U_q(sl_2(\mathbb{R}))$ の modular double $U_{q,\overline{q}}(sl_2(\mathbb{R}))$ を定義した. Virasoro 代数の自由場表示において, セントラルチャージは

$$c_\tau = 13 - 6\Big(\tau + \frac{1}{\tau}\Big) \quad (\tau \in \mathbb{C})$$

という形に書くことができる. このとき明らかに $c_\tau{=}c_{1/\tau}$ であるが, これを一種の modular 不変性であると見なし, この modular 性とある意味で調和するような代数を構成する, というアイディアを Faddeev は持っていた. その結果として, パラメータ $q = e^{2\pi i\tau}$ を持つ量子群 $U_q(sl_2(\mathbb{R}))$ と $\overline{q} := e^{2\pi i/\tau}$ を持つ量子群 $U_{\overline{q}}(sl_2(\mathbb{R}))$ を組み合わせる, という考えに到達した. 以下では $U_q(sl_2(\mathbb{R}))$ の modular double $U_{q,\overline{q}}(sl_2(\mathbb{R}))$ のみを例にとって説明する. その他の modular double および関連する話題については Ip [Ip], Nidaiev-Teschner [NT] などを参照されたい.

定義 1.1 (**量子群** $U_q(sl_2(\mathbb{R}))$ **の modular double** $U_{q,\overline{q}}(sl_2(\mathbb{R}))$)**.** $\tau \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ に対し $q := e^{2\pi i\tau}$, $\overline{q} := e^{2\pi i/\tau}$ とおく. 量子群 $U_q(sl_2(\mathbb{R}))$ の modular double

$$U_{q,\overline{q}}(sl_2(\mathbb{R})) := U_q(sl_2(\mathbb{R})) \otimes U_{\overline{q}}(sl_2(\mathbb{R}))$$

を生成元 $K^{\pm1}$, E, F, および $\widetilde{K}^{\pm1}$, $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$ で生成される $\mathbb{C}$ 上の結合代数として定義する.

$$\begin{aligned}
&KK^{-1} = K^{-1}K = 1, \quad KEK^{-1} = q^2E, \quad KFK^{-1} = q^{-2}F, \quad [E,F] = \frac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}},\\
&\widetilde{K}\widetilde{K}^{-1} = \widetilde{K}^{-1}\widetilde{K} = 1, \quad \widetilde{K}\widetilde{E}\widetilde{K}^{-1} = \overline{q}^2\widetilde{E}, \quad \widetilde{K}\widetilde{F}\widetilde{K}^{-1} = \overline{q}^{-2}\widetilde{F}, \quad [\widetilde{E},\widetilde{F}] = \frac{\widetilde{K}-\widetilde{K}^{-1}}{\overline{q}-\overline{q}^{-1}},\\
&[X,Y] = 0 \quad (X = K^{\pm1}, E, F,\ Y = \widetilde{K}^{\pm1}, \widetilde{E}, \widetilde{F}).
\end{aligned}$$

記号 $U_{q,\overline{q}}(sl_2(\mathbb{R})) = U_q(sl_2(\mathbb{R})) \otimes U_{\overline{q}}(sl_2(\mathbb{R}))$ は, 生成元 $K^{\pm1}$, E, F が $U_q(sl_2(\mathbb{R}))$ を, 生成元 $\widetilde{K}^{\pm1}$, $\widetilde{E}$, $\widetilde{F}$ が $U_{\overline{q}}(sl_2(\mathbb{R}))$ を生成することを意味している. また $\tau \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ を仮定しているので $|q| = |\overline{q}| = 1$ であることに注意する.

ここで, 上の関係式たちは次の入れ替えの操作の下で不変である (modular 性).

$$\tau \leftrightarrow \frac{1}{\tau}, \quad X \leftrightarrow \widetilde{X} \quad (X = K, E, F).$$

よって, $U_q(sl_2(\mathbb{R}))$ と $U_{\overline{q}}(sl_2(\mathbb{R}))$ の互いに可換な表現の組で $\tau \leftrightarrow 1/\tau$ で入れ替わるようなものを modular double $U_{q,\overline{q}}(sl_2(\mathbb{R}))$ の表現と呼ぶことにする.

また, $U_{q,\overline{q}}(sl_2(\mathbb{R}))$ の universal R は次で定義される 2 重サイン関数によって書かれることが知られている.

定義 1.2 (2 重サイン関数 $S(\omega_1, \omega_2; u)$). 複素数 ω_1, ω_2 を条件 $\mathrm{Re}(\omega_1) > 0$, $\mathrm{Re}(\omega_2) > 0$ を満たすと仮定する. 2 重サイン関数 $S(\omega_1, \omega_2; u)$ を次で定義する.

$$S(\omega_1, \omega_2; u) := \exp\left(\int_{\mathbb{R}+i0} \frac{e^{ku}}{(1-e^{\omega_1 k})(1-e^{\omega_2 k})} \frac{dk}{k}\right) \quad (0 < \mathrm{Re}(u) < \mathrm{Re}(\omega_1 + \omega_2)).$$

定義より, 2 重サイン関数は明らかに $S(\omega_1, \omega_2; u) = S(\omega_2, \omega_1; u)$ を満たす. また次が知られている.

命題 1.3 (2 重サイン関数 $S(\omega_1, \omega_2; u)$ の性質). (1) $u \in \mathbb{C}$ に対して $\mathbf{e}(u) := e^{2\pi i u}$ とおく. $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2) \neq 0$ の場合には 2 重サイン関数 $S(\omega_1, \omega_2; u)$ には次の表示がある.

$$S(\omega_1, \omega_2; u) = \begin{cases} \dfrac{(\mathbf{e}(u/\omega_2); \mathbf{e}(\omega_1/\omega_2))_\infty}{(\mathbf{e}(-\omega_2/\omega_1)\mathbf{e}(u/\omega_1); \mathbf{e}(-\omega_2/\omega_1))_\infty} & (\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2) > 0), \\[2ex] \dfrac{(\mathbf{e}(u/\omega_1); \mathbf{e}(\omega_2/\omega_1))_\infty}{(\mathbf{e}(-\omega_1/\omega_2)\mathbf{e}(u/\omega_2); \mathbf{e}(-\omega_1/\omega_2))_\infty} & (\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0). \end{cases}$$

(2) (黒川 [K]) 実数 x に対し $||x|| := \min\{|x-n| \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$ とおく. ω_1, $\omega_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ が条件 $\lim_{n\to\infty} ||n\omega_1/\omega_2||^{1/n} = 1$ を満たすとする. このとき 2 重サイン関数 $S(\omega_1, \omega_2; u)$ は次の表示を持つ.

$$S(\omega_1, \omega_2; u) = \exp\left(-\sum_{n>0} \frac{\mathbf{e}(nu/\omega_2)}{1-\mathbf{e}(n\omega_1/\omega_2)} \frac{1}{n} - \sum_{n>0} \frac{\mathbf{e}(nu/\omega_1)}{1-\mathbf{e}(n\omega_2/\omega_1)} \frac{1}{n}\right) \quad (\mathrm{Im}(u) > 0).$$

1.3 楕円関数的な理論との関係

以下では, Ding-Iohara-Miki 代数の modular double が存在するとしたら, その表現はどのようにしたら得られるのかについて考えてみる. 大まかに言って, Ding-Iohara-Miki 代数の modular double は互いに可換な 2 つの Ding-Iohara-Miki 代数からなり, その表現も同様に互いに可換な 2 つの Ding-Iohara-Miki 代数の表現から成ると考えられる. では, そのような「2 つ」の表現はどのようにして現れるのであろうか？ そこで, 若干唐突ではあるが,

以下で述べるような Ruijsenaars 模型において見られる q-差分化の q と楕円関数化の p の入れ替えの下での性質に注目してみる.

Ruijsenaars 模型 [R1], または相対論的 Calogero-Moser 系とは次の Ruijsenaars 作用素 $H_N(q,t,p)$ $(N \in \mathbb{Z}_{>0})$ と呼ばれる q-差分作用素をハミルトニアンとする量子多体系である.

$$H_N(q,t,p) := \sum_{i=1}^{N} \prod_{j \neq i} \frac{\Theta_p(tx_i/x_j)}{\Theta_p(x_i/x_j)} T_{q,x_i}.$$

$q,\, p \in \mathbb{C}$ を $|q| < 1,\, |p| < 1$ を満たす複素パラメータとする. 楕円ガンマ関数 $\Gamma_{q,p}(x)$ を次で定義する.

$$\Gamma_{q,p}(x) := \frac{(qpx^{-1}; q, p)_\infty}{(x; q, p)_\infty} \quad (x \in \mathbb{C}^\times).$$

また Ruijsenaars 作用素 $H_N(q,t,p)$ の kernel function $\Pi_{MN}(q,t,p)(x,y)$ $(M, N \in \mathbb{Z}_{>0})$ を次で定める.

$$\Pi_{MN}(q,t,p)(x,y) := \prod_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq j \leq N}} \frac{\Gamma_{q,p}(x_i y_j)}{\Gamma_{q,p}(t x_i y_j)}.$$

この kernel function が次の関数等式を満たすことが Ruijsenaars [R2], 小森, 野海, 白石 [KNS] によって明らかにされていた：

$$H_N(q,t,p)_x \Pi_{NN}(q,t,p)(x,y) = H_N(q,t,p)_y \Pi_{NN}(q,t,p)(x,y).$$

ここで記号 $H_N(q,t,p)_x$ は変数 $x_1, \ldots, x_N$ の関数に作用する Ruijsenaars 作用素を表す. 上の関数等式は x 変数の個数と y 変数の個数が等しい場合のものであるが, これらの変数の個数が異なる場合の関数等式は齋藤 [Sa2] を参照されたい.

ところで, 楕円ガンマ関数の定義より明らかに $\Gamma_{q,p}(x) = \Gamma_{p,q}(x)$ である. これより, Ruijsenaars 作用素の kernel function $\Pi_{MN}(q,t,p)(x,y)$ も q と p の入れ替えの下で不変である. 以上より, kernel function $\Pi_{MN}(q,t,p)(x,y)$ は Ruijsenaars 作用素 $H_N(q,t,p)$ において q と p の役割を入れ替えたもの

$$H_N(p,t,q) := H_N(q,t,p)|_{q \leftrightarrow p} = \sum_{i=1}^{N} \prod_{j \neq i} \frac{\Theta_q(tx_i/x_j)}{\Theta_q(x_i/x_j)} T_{p,x_i}$$

の kernel function でもある, ということがわかる. 更に, 簡単な計算によって Ruijsenaars 作用素 $H_N(q,t,p)$ と q と p の入れ替え $q \leftrightarrow p$ を行った Ruijsenaars 作用素 $H_N(p,t,q)$ が可換であることが確かめられる：

$$[H_N(q,t,p), H_N(p,t,q)] = 0.$$

この「パラメータの入れ替え $q \leftrightarrow p$ で入れ替わる互いに可換な **Ruijsenaars** 作用素たちの出現」という現象が，先に説明した $U_q(sl_2(\mathbb{R}))$ の **modular double** $U_{q,\overline{q}}(sl_2(\mathbb{R}))$ の表現において見られる状況に類似しているように思われる．

ただ，上に述べたような類似は

$$\text{量子群やその modular double} = \text{三角関数的な対象},$$
$$\text{Ruijsenaars 模型や楕円 Ding-Iohara-Miki 代数} = \text{楕円関数的な対象}$$

という目で見たときには若干の飛躍を含んでいるように見える．そこで，三角関数的な対象と楕円関数的な対象をつなぐヒントになり得るのが次の命題である．以下では楕円ガンマ関数を加法的な変数を用いて次のように表記する：

$$\Gamma_{\mathrm{ell}}(\omega_1,\omega_2;u) := \frac{(\mathbf{e}(\omega_1+\omega_2-u);\mathbf{e}(\omega_1),\mathbf{e}(\omega_2))_\infty}{(\mathbf{e}(u);\mathbf{e}(\omega_1),\mathbf{e}(\omega_2))_\infty}.$$

命題 1.4 (楕円ガンマ関数 $\Gamma_{\mathrm{ell}}(\omega_1,\omega_2;u)$ の modular 変換 [FV][Naru]). 複素パラメータ $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}$ が条件 $\mathrm{Im}(\omega_1)>0$, $\mathrm{Im}(\omega_2)>0$, および $\mathrm{Im}(\omega_1/\omega_2)>0$ を満たすと仮定する．このとき楕円ガンマ関数 $\Gamma_{\mathrm{ell}}(\omega_1,\omega_2;u)$ は次の恒等式を満たす．

$$\Gamma_{\mathrm{ell}}(\omega_1,\omega_2;u) = e^{-\pi i Q(\omega_1,\omega_2;u)}\Gamma_{\mathrm{ell}}\Big(\frac{\omega_1}{\omega_2},-\frac{1}{\omega_2};\frac{u}{\omega_2}\Big)\Gamma_{\mathrm{ell}}\Big(-\frac{\omega_2}{\omega_1},-\frac{1}{\omega_1};\frac{u-\omega_2}{\omega_1}\Big)^{-1}.$$

ここで $u\in\mathbb{C}$ の多項式 $Q(\omega_1,\omega_2;u)$ は次で定義される．

$$\begin{aligned}
&Q(\omega_1,\omega_2;u)\\
&=\frac{u^3}{3\omega_1\omega_2}-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}-\frac{1}{\omega_1\omega_2}\Big)u^2+\frac{1}{6}\Big[\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}+3-3\Big(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\Big)+\frac{1}{\omega_1\omega_2}\Big]u\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad-\frac{1}{12}\Big(\omega_1+\omega_2-\frac{\omega_1}{\omega_2}-\frac{\omega_2}{\omega_1}-3+\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\Big).
\end{aligned}$$

命題 1.5 (楕円ガンマ関数 $\Gamma_{\mathrm{ell}}(\omega_1,\omega_2;u)$ のスケール極限). 複素パラメータ $\omega_1,\omega_2\in\mathbb{C}$ が条件 $\mathrm{Im}(\omega_1)>0$, $\mathrm{Im}(\omega_2)>0$ を満たしているとする．このとき楕円ガンマ関数 $\Gamma_{\mathrm{ell}}(\omega_1,\omega_2;u)$ は次のようなスケール極限によって 2 重サイン関数 $S(\omega_1,\omega_2;u)$ に退化する．

$$\lim_{r\to 0} e^{\frac{\pi i}{12r\omega_1\omega_2}(2u-\omega_1-\omega_2)}\Gamma_{\mathrm{ell}}(r\omega_1,r\omega_2;ru) = e^{-\frac{\pi i}{2}B_{2,2}(\omega_1,\omega_2;u)}S(\omega_1,\omega_2;u)^{-1}.$$

ここで $B_{2,2}(\omega_1,\omega_2;u)$ は次で定義される 2 重 Bernoulli 多項式である．

$$B_{2,2}(\omega_1,\omega_2;u) := \frac{u^2}{\omega_1\omega_2}-\Big(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\Big)u+\frac{1}{6}\Big(\frac{\omega_1}{\omega_2}+\frac{\omega_2}{\omega_1}\Big)+\frac{1}{2}.$$

量子群の modular double の理論には，2 重サイン関数が universl R を通じて現れることを思い起こすと，これらが意味するのは **modular 変換とスケール極限が楕円関数的な対象**

と **modular double と関係を持つような三角関数的な対象をつなぐ鍵であるということ**である．以下では，この考え方を楕円 Ding-Iohara-Miki 代数のレベル 0 表現に対して用いることを考える．

2 Ding-Iohara-Miki 代数の modular double の表現についての予想

楕円ガンマ関数が modular 変換 + スケール極限によって 2 重サイン関数に退化するという事実があったが，以下ではこの**「modular 変換 + スケール極限」という操作を楕円 Ding-Iohara-Miki 代数の表現において行うことを試みる．その中で「楕円 Ding-Iohara-Miki 代数のレベル 0 表現の modular 変換 + スケール極限によって，Ding-Iohara-Miki 代数の modular double のレベル 0 表現が得られる」**という予想に至ることを見る．

2.1 楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$

ここでは楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ とそのレベル 0 表現について述べる．以下では条件 $\mathrm{Im}(\tau)>0$ を満たす複素数 τ に対し，テータ関数 $\theta_\tau(u)$ を次で定める．

$$\theta_\tau(u) := (\mathbf{e}(u);\mathbf{e}(\tau))_\infty(\mathbf{e}(\tau-u);\mathbf{e}(\tau))_\infty \quad (u\in\mathbb{C}).$$

定義 2.1 (**楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ [Sa1]**). 複素パラメータ $\omega,\sigma\in\mathbb{C}$ を条件 $\mathrm{Im}(\omega)>0$, $\mathrm{Im}(-\sigma)>0$ と $\mathbf{e}(\omega)^a\mathbf{e}(\sigma)^b\neq 1$ $(\forall(a,b)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0))$ を満たすものとする．$\mathbb{K}:=\mathbb{Q}(\mathbf{e}(\omega/4),\mathbf{e}(\sigma/4))$ とおく．τ を形式的な変数とし，構造関数 $f^\pm(\tau;u)$, $g_\tau(u)$ を次で定義する．

$$\begin{aligned}
f^+(\tau;u) &:= \theta_\tau(\omega+u)\theta_\tau(-\sigma+u)\theta_\tau(-\omega+\sigma+u),\\
f^-(\tau;u) &:= \theta_\tau(-\omega+u)\theta_\tau(\sigma+u)\theta_\tau(\omega-\sigma+u),\\
g_\tau(u) &:= f^+(\tau;u)/f^-(\tau;u).
\end{aligned}$$

生成元の母関数 $x^\pm(\tau;u)$, $\psi^\pm(\tau;u)$ を次で定義する．

$$x^\pm(\tau;u)=\sum_{d\geq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}x_d^\pm[n]\mathbf{e}(-nu)p^d,\quad \psi^\pm(\tau;u)=\sum_{d\geq 0}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\psi_d^\pm[n]\mathbf{e}(-nu)p^d.$$

ここで $p=\mathbf{e}(\tau)$ とした．楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ を生成元 $\{x_d^\pm[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}^{d\geq 0}$, $\{\psi_d^\pm[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}^{d\geq 0}$ と中心元 c と以下の関係式によって生成される $\mathbb{K}[[p]]$ 上の結合代数として定

義する.

$$
\begin{aligned}
[\psi^{\pm}(\tau;u),\psi^{\pm}(\tau;v)]&=0,\\
\psi^{+}(\tau;u)\psi^{-}(\tau;v)&=\frac{g_\tau(c-u+v)}{g_\tau(-c-u+v)}\psi^{-}(\tau;v)\psi^{+}(\tau;u),\\
\psi^{+}(\tau;u)x^{\pm}(\tau;v)&=g_\tau\Big(\mp\frac{c}{2}-u+v\Big)^{\mp1}x^{\pm}(\tau;v)\psi^{+}(\tau;u),\\
\psi^{-}(\tau;u)x^{\pm}(\tau;v)&=g_\tau\Big(\mp\frac{c}{2}-u+v\Big)^{\pm1}x^{\pm}(\tau;v)\psi^{-}(\tau;u),\\
-\mathbf{e}(u-v)^3f^{\pm}(\tau;-u+v)x^{\pm}(\tau;u)x^{\pm}(\tau;v)&=f^{\pm}(\tau;u-v)x^{\pm}(\tau;v)x^{\pm}(\tau;u),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&[x^{+}(\tau;u),x^{-}(\tau;v)]\\
&=c(\omega,\sigma,\tau)\Big\{\delta(c-u+v)\psi^{+}\Big(\tau;\frac{c}{2}+v\Big)-\delta(-c-u+v)\psi^{-}\Big(\tau;-\frac{c}{2}+v\Big)\Big\}.
\end{aligned}
$$

ここで $\delta(u):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}(nu)$ は形式的デルタ関数, また $c(\omega,\sigma,\tau)\in\mathbb{K}[[p]]$ を次で定めた.

$$
c(\omega,\sigma,\tau):=\frac{\theta_\tau(\omega)\theta_\tau(-\sigma)}{(p;p)_\infty^2\theta_\tau(\omega-\sigma)}.
$$

上の楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ の定義において τ を形式的変数として扱っているのは, 上に列挙した生成元の母関数の関係式から有限個の生成元の有限和のみからなる関係式が得られるようにするためである.

楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ において $\tau\to i\infty$ $(p\to 0)$ とすると通常の Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma)$ になる.

2.2 楕円 Ding-Iohara-Miki 代数のレベル 0 表現

楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ には, 次で述べるようなかけ算作用素とシフト作用素による実現がある.

定理 2.2 (楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ のレベル 0 表現). x を不定元とする. $T_{\omega,x}$ を x を ω シフトするシフト作用素とする : $T_{\omega,x}f(x):=f(x+\omega)$. 次で定義される写像 $\pi_0:\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)\to\mathrm{End}_{\mathbb{K}[[p]]}(\mathbb{K}[[p]][\mathbf{e}(\pm x)])$ は楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ の表現を与える.

$$
\begin{aligned}
\pi_0[c]&:=0,\\
\pi_0[x^{+}(\tau;u)]&:=\frac{\theta_\tau(-\sigma)}{(p;p)_\infty^2}\delta(-\omega+\sigma+x-u)T_{\omega,x}^{-1},\\
\pi_0[x^{-}(\tau;u)]&:=\frac{\theta_\tau(\sigma)}{(p;p)_\infty^2}\delta(\sigma+x-u)T_{\omega,x},
\end{aligned}
$$

$$\pi_0[\psi^+(\tau;u)] := \frac{\theta_\tau(x-u)\theta_\tau(-\omega+2\sigma+x-u)}{\theta_\tau(\sigma+x-u)\theta_\tau(-\omega+\sigma+x-u)},$$
$$\pi_0[\psi^-(\tau;u)] := \frac{\theta_\tau(-x+u)\theta_\tau(\omega-2\sigma-x+u)}{\theta_\tau(-\sigma-x+u)\theta_\tau(\omega-\sigma-x+u)}.$$

上で与えた楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ のレベル 0 表現の定義において $\tau\to i\infty$ $(p\to 0)$ とすると Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma)$ のレベル 0 表現が得られる.

2.3 いくつかの観察と予想

テータ関数 $\theta_\tau(u)=(\mathbf{e}(u);\mathbf{e}(\tau))_\infty(\mathbf{e}(\tau-u);\mathbf{e}(\tau))_\infty$ は modular 変換 $\tau\to -1/\tau$ の下で次のように振る舞うことが知られていた:

$$\theta_{-1/\tau}(u/\tau)=\exp\left[\pi i\left\{\frac{u^2}{\tau}+\Big(\frac{1}{\tau}-1\Big)u+\frac{1}{6}\Big(\tau+\frac{1}{\tau}\Big)-\frac{1}{2}\right\}\right]\theta_\tau(u).$$

また定理 2.2 の楕円 Ding-Iohara-Miki 代数のレベル 0 表現はテータ関数を用いて書かれている. よって, (ナイーブには) 楕円 Ding-Iohara-Miki 代数のレベル 0 表現の modular 変換を考えることができ, その結果として次の予想を得る.

予想 2.3 (**楕円 Ding-Iohara-Miki 代数** $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ **のレベル 0 表現の modular 変換**)**.** 楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ のレベル 0 表現の modular 変換は次で与えられる.

$$\begin{aligned}&M_\tau[\pi_0[x^+(\tau;u)]]\\&=\exp\left[-\pi i\left\{\frac{\sigma^2}{\tau}-\Big(\frac{1}{\tau}-1\Big)\sigma\right\}\right]\frac{\theta_{-1/\tau}(-\sigma/\tau)}{(\mathbf{e}(-1/\tau);\mathbf{e}(-1/\tau))_\infty^2}\delta_\tau(-\omega+\sigma+x-u)T_{\omega,x}^{-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&M_\tau[\pi_0[x^-(\tau;u)]]\\&=\exp\left[-\pi i\left\{\frac{\sigma^2}{\tau}+\Big(\frac{1}{\tau}-1\Big)\sigma\right\}\right]\frac{\theta_{-1/\tau}(\sigma/\tau)}{(\mathbf{e}(-1/\tau);\mathbf{e}(-1/\tau))_\infty^2}\delta_\tau(\sigma+x-u)T_{\omega,x},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&M_\tau[\pi_0[\psi^+(\tau;u)]]\\&=\exp\left[2\pi i\frac{\sigma(\omega-\sigma)}{\tau}\right]\frac{\theta_{-1/\tau}((x-u)/\tau)\theta_{-1/\tau}((-\omega+2\sigma+x-u)/\tau)}{\theta_{-1/\tau}((\sigma+x-u)/\tau)\theta_{-1/\tau}((-\omega+\sigma+x-u)/\tau)},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&M_\tau[\pi_0[\psi^-(\tau;u)]]\\&=\exp\left[2\pi i\frac{\sigma(\omega-\sigma)}{\tau}\right]\frac{\theta_{-1/\tau}((-x+u)/\tau)\theta_{-1/\tau}((\omega-2\sigma-x+u)/\tau)}{\theta_{-1/\tau}((-\sigma-x+u)/\tau)\theta_{-1/\tau}((\omega-\sigma-x+u)/\tau)}.\end{aligned}$$

ここで $\delta_\tau(u):=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\mathbf{e}(nu/\tau)$ は周期 τ を持つ形式的デルタ関数である. また記号 M_τ によって τ についての modular 変換の操作を表した.

予想 2.3 が正しければ次の予想が従うことがわかる.

予想 2.4 (レベル 0 表現の modular 変換のスケール極限). パラメータたち ω, σ, τ および不定元 x をみな r 倍して $(r \in \mathbb{R})$, その後に $r \to 0$ とするスケール極限を予想 2.3 において得られた楕円 Ding-Iohara-Miki 代数のレベル 0 表現の modular 変換に対して行うと次のようになる.

$$M_\tau[\pi_0[x^+(\tau;u)]] \to \exp\Big(\pi i\frac{\sigma}{\tau}\Big)[1-\mathbf{e}(-\sigma/\tau)]\delta_\tau(-\omega+\sigma+x-u)T_{\omega,x}^{-1}, \tag{2.1}$$

$$M_\tau[\pi_0[x^-(\tau;u)]] \to \exp\Big(-\pi i\frac{\sigma}{\tau}\Big)[1-\mathbf{e}(\sigma/\tau)]\delta_\tau(\sigma+x-u)T_{\omega,x}, \tag{2.2}$$

$$M_\tau[\pi_0[\psi^+(\tau;u)]] \to \frac{[1-\mathbf{e}((x-u)/\tau)][1-\mathbf{e}((-\omega+2\sigma+x-u)/\tau)]}{[1-\mathbf{e}((\sigma+x-u)/\tau)][1-\mathbf{e}((-\omega+\sigma+x-u)/\tau)]}, \tag{2.3}$$

$$M_\tau[\pi_0[\psi^-(\tau;u)]] \to \frac{[1-\mathbf{e}((-x+u)/\tau)][1-\mathbf{e}((\omega-2\sigma-x+u)/\tau)]}{[1-\mathbf{e}((-\sigma-x+u)/\tau)][1-\mathbf{e}((\omega-\sigma-x+u)/\tau)]}. \tag{2.4}$$

予想 2.4 の右辺に現れた作用素たちが Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega/\tau,\sigma/\tau)$ のレベル 0 表現を与えることが容易にわかる.

ここで, 以上の流れの中で ω と τ を入れ替えることを考える. それは楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\tau,\sigma,\omega)$ (ω と τ が入れ替わっていることに注意) のレベル 0 表現の (ω に関する) modular 変換, およびそのスケール極限を考えることになるが, 上の予想が正しければその結果は次のようになる：

$$M_\omega[\pi_0[x^+(\omega;u)]] \to \exp\Big(\pi i\frac{\sigma}{\omega}\Big)[1-\mathbf{e}(-\sigma/\omega)]\delta_\omega(-\tau+\sigma+x-u)T_{\tau,x}^{-1}, \tag{2.5}$$

$$M_\omega[\pi_0[x^-(\omega;u)]] \to \exp\Big(-\pi i\frac{\sigma}{\omega}\Big)[1-\mathbf{e}(\sigma/\omega)]\delta_\omega(\sigma+x-u)T_{\tau,x}, \tag{2.6}$$

$$M_\omega[\pi_0[\psi^+(\omega;u)]] \to \frac{[1-\mathbf{e}((x-u)/\omega)][1-\mathbf{e}((-\tau+2\sigma+x-u)/\omega)]}{[1-\mathbf{e}((\sigma+x-u)/\omega)][1-\mathbf{e}((-\tau+\sigma+x-u)/\omega)]}, \tag{2.7}$$

$$M_\omega[\pi_0[\psi^-(\omega;u)]] \to \frac{[1-\mathbf{e}((-x+u)/\omega)][1-\mathbf{e}((\tau-2\sigma-x+u)/\omega)]}{[1-\mathbf{e}((-\sigma-x+u)/\omega)][1-\mathbf{e}((\tau-\sigma-x+u)/\omega)]}. \tag{2.8}$$

やはりこれらは Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\tau/\omega,\sigma/\omega)$ のレベル 0 表現を与える. 以上より, (2.1) $\sim$ (2.4) で与えられる $\mathcal{U}(\omega/\tau,\sigma/\tau)$ のレベル 0 表現と (2.5) $\sim$ (2.8) で与えられる $\mathcal{U}(\tau/\omega,\sigma/\omega)$ のレベル 0 表現という 2 組の表現が得られたが, **これら 2 組のレベル 0 表現は互いに可換であることがわかる.** 予想を再度まとめると次のようになる.

(1) 楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ のレベル 0 表現を τ について modular 変換し，更にスケール極限をとることで Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega/\tau,\sigma/\tau)$ のレベル 0 表現が得られる．

(2) (1) において ω と τ の立場を入れ替えたものを考える．結果的に Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\tau/\omega,\sigma/\omega)$ のレベル 0 表現が得られる．

(3) (1), (2) で得られた 2 組のレベル 0 表現は互いに可換である．またそれらは入れ替えの操作 $\omega\leftrightarrow\tau$ でそっくり入れ替わるので，以上で得られたのは Ding-Iohara-Miki 代数の modular double $\mathcal{U}(\omega/\tau,\sigma/\tau)\otimes\mathcal{U}(\tau/\omega,\sigma/\omega)$ のレベル 0 表現であると見なせる．今の場合，入れ替えの操作 $\omega\leftrightarrow\tau$ が modular double の modular 性の役割を果たしている．

以上の予想の問題点は次の通りである．

- 楕円 Ding-Iohara-Miki 代数 $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ においては，技術的な理由から楕円のパラメータに対応する τ を形式的変数と見なさなくてはならなかった．$\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ のレベル 0 表現の modular 変換を論ずるには，この τ を通常の変数として扱わなくてはならない．幸い，$\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ のレベル 0 表現は例外で，この表現においては τ を通常の変数として扱えるように見えるが，この点をどのように正当化するか．
- 仮に $\mathcal{U}(\omega,\sigma,\tau)$ のレベル 0 表現の modular 変換を行うことができるとすると，パラメータ ω, σ, τ にいくつかの条件が課せられることになる．これらの条件をみな両立させることはできるか．

このような問題があるため，今回は予想を述べるという形になったが，今回のような路線の研究が進めば，楕円 Ding-Iohara-Miki 代数に関係するもののみならずその他の楕円量子群と modular double の間の関係も明らかになっていくことが期待される．

謝辞

今回の寄稿の機会を与えてくれた "RIMS Conference 2015 表現論および関連する調和解析と微分方程式" の世話人に感謝する．

参考文献

[DI] J. Ding, K. Iohara. *Generalization of Drinfeld quantum affine algebras.* Lett. Math. Phys. **41** (1997), no. 2, 181-193.

[F] L. Faddeev. *Modular double of quantum group.* (1999) arXiv:math/9912078.

[FHHSY] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida. *A commutative algebra on degenerate* $\mathbb{CP}^1$ *and Macdonald polynomials.* J. Math. Phys. **50** (2009) arXiv:0904.2291.

[FO] B. Feigin, A. Odesskii. *A family of elliptic algebras.* (1997) Internat. Math. Res. Notices. no.11.

[FV] G. Felder, A. Varchenko. *The Elliptic Gamma Function and* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z}) \ltimes \mathbb{Z}^3$. Advances in Mathematics 156.1 (2000): 44-76.

[Ip] Ivan C. H. Ip. *Positive representations of split real quantum groups : the universal R operator.* (2012) arXiv:1212.5149.

[K] 黒川 信重. 『現代三角関数論』. 岩波書店. (2013) ISBN 978-4-00-005327-3.

[KNS] Y. Komori, M. Noumi, J. Shiraishi. *Kernel functions for difference operators of Ruijsenaars type and their applications.* SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry : Methods and Applications. Volume 5 (2009) arXiv:0812.0279.

[Mac] I. G. Macdonald. *Symmetric functions and Hall polynomials.* 2nd edition, Oxford University Press (1995).

[Miki] K. Miki. *A* (q,γ) *analog of the* $W_{1+\infty}$ *algebra.* J. Math. Phys. **48**, 123520 ; doi:10.1063/1.2823979 (2007).

[Naru] A. Narukawa. *The modular properties and the integral representations of the multiple elliptic gamma functions.* (2003) arXiv:math/0306164.

[NT] I. Nidaiev, J. Teschner. *On the relation between the modular double of* $\mathcal{U}_q(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}))$ *and the quantum Teichmüller theory.* (2013) arXiv:1302.3454.

[R1] S. N. M. Ruijsenaars. *Complete integrability of relativistic Calogero-Moser systems and elliptic function identities.* Commun. Math. Physic. Volume 110. (1987).

[R2] S. N. M. Ruijsenaars. *Zero-eigenvalue eigenfunctions for differences of elliptic relativistic Calogero-Moser Hamiltonians.* Theoretical and mathematical physics 146.1 (2006): 25-33.

[Sa1] Yosuke Saito. *Elliptic Ding-Iohara algebra and the free field realization of the elliptic Macdonald operator.* Publ. Res. Inst. Math. Sci. 50 (2014), 411-455. doi: 10.4171/PRIMS/139, arXiv:1301.4912.

[Sa2] Yosuke Saito. *Commutative families of the elliptic Macdonald operator.* SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications 10 (2014): 021. arXiv:1305.7097.