数理解析研究所講究録
第1977巻 2015年 45-56

Affine Yangian action on the Fock space

小寺諒介
京都大学数理解析研究所
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

1 イントロダクション

竹村-Uglov [TU1] によるスピン Calogero-Sutherland 模型の持つヤンギアン対称性の研究を経て，Uglov [U2] は（レベル 1）Fock 空間へのヤンギアン $Y_{\hbar}(\mathfrak{sl}_N)$ の作用を構成した．この構成の q 変形として，竹村-Uglov [TU2] は q-Fock 空間への量子ループ代数 $U_q(L\mathfrak{sl}_N)$ の作用を構成した．従って q-Fock 空間は二つの量子アファイン代数 $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の作用を持つことになる（元々のレベル 1 作用と，竹村-Uglov のレベル 0 作用）が，Varagnolo-Vasserot [VV] と斉藤-竹村-Uglov [STU] によって，この二つの作用は量子トロイダル代数の q-Fock 空間への作用に拡張された．

Varagnolo-Vasserot と斉藤-竹村-Uglov の結果の退化版として，アファインヤンギアンが Fock 空間へ作用することが期待されるが，このことについて明示的に述べられた文献はなかったようである．本稿では，斉藤-竹村-Uglov の手法をヤンギアンの場合に修正して適用することで，アファインヤンギアンの作用を構成できることを紹介する．

レベル 1	$U_q(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$	$\curvearrowright$		q 変形 $\longleftarrow$	$\hat{\mathfrak{sl}}_N$	$\curvearrowright$	
			q-Fock 空間				Fock 空間
レベル 0	$U_q(L\mathfrak{sl}_N)$	$\curvearrowright$		$\longrightarrow$ 退化	$Y_{\hbar}(\mathfrak{sl}_N)$	$\curvearrowright$	
	$\rightsquigarrow$ 量子トロイダル代数				$\rightsquigarrow$ アファインヤンギアン		

E-mail address: kodera@kurims.kyoto-u.ac.jp

筆者のプレプリント [K1] では，箙多様体を用いたアファインヤンギアンの表現の構成を援用して Fock 空間への作用を得ており，講演でもその結果について紹介した．本稿では箙多様体との関係については最後にコメントするにとどめることにしたので，詳細については [K1] または解説 [K2] を参照してほしい．

2 アファインヤンギアン

本稿では基礎体は 2 変数有理函数体 $\mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ とする．また，$\hbar = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ とおく．$\hbar$ は有限型ヤンギアンのパラメータと後に同一視される．

定義 2.1 $N \geq 3$ とする．A 型アファインヤンギアン $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ は，$x_{i,r}^{\pm}, h_{i,r}$ $(i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を生成元とし，次の関係式で定義される $\mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 代数である：

$$[h_{i,r}, h_{j,s}] = 0$$

$$[x_{i,r}^{+}, x_{j,s}^{-}] = \delta_{ij} h_{i,r+s}$$

$$[h_{i,0}, x_{j,r}^{\pm}] = \pm a_{ij} x_{j,r}^{\pm}$$

$$[h_{i,r+1}, x_{j,s}^{\pm}] - [h_{i,r}, x_{j,s+1}^{\pm}] = 0 \ (i \neq j, j \pm 1)$$

$$[h_{i,r+1}, x_{i,s}^{\pm}] - [h_{i,r}, x_{i,s+1}^{\pm}] = \pm(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(h_{i,r} x_{i,s}^{\pm} + x_{i,s}^{\pm} h_{i,r})$$

$$[h_{i,r+1}, x_{i-1,s}^{\pm}] - [h_{i,r}, x_{i-1,s+1}^{\pm}] = \mp(\varepsilon_1 h_{i,r} x_{i-1,s}^{\pm} + \varepsilon_2 x_{i-1,s}^{\pm} h_{i,r})$$

$$[h_{i,r+1}, x_{i+1,s}^{\pm}] - [h_{i,r}, x_{i+1,s+1}^{\pm}] = \mp(\varepsilon_2 h_{i,r} x_{i+1,s}^{\pm} + \varepsilon_1 x_{i+1,s}^{\pm} h_{i,r})$$

$$[x_{i,r+1}^{\pm}, x_{j,s}^{\pm}] - [x_{i,r}^{\pm}, x_{j,s+1}^{\pm}] = 0 \ (i \neq j, j \pm 1)$$

$$[x_{i,r+1}^{\pm}, x_{i,s}^{\pm}] - [x_{i,r}^{\pm}, x_{i,s+1}^{\pm}] = \pm(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(x_{i,r}^{\pm} x_{i,s}^{\pm} + x_{i,s}^{\pm} x_{i,r}^{\pm})$$

$$[x_{i,r+1}^{\pm}, x_{i-1,s}^{\pm}] - [x_{i,r}^{\pm}, x_{i-1,s+1}^{\pm}] = \mp(\varepsilon_1 x_{i,r}^{\pm} x_{i-1,s}^{\pm} + \varepsilon_2 x_{i-1,s}^{\pm} x_{i,r}^{\pm})$$

$$[x_{i,r+1}^{\pm}, x_{i+1,s}^{\pm}] - [x_{i,r}^{\pm}, x_{i+1,s+1}^{\pm}] = \mp(\varepsilon_2 x_{i,r}^{\pm} x_{i+1,s}^{\pm} + \varepsilon_1 x_{i+1,s}^{\pm} x_{i,r}^{\pm})$$

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_{1-a_{ij}}} [x_{i,r_{w(1)}}^{\pm}, [x_{i,r_{w(2)}}^{\pm}, \dots, [x_{i,r_{w(1-a_{ij})}}^{\pm}, x_{j,s}^{\pm}] \dots]] = 0 \ (i \neq j)$$

但し

$$a_{ij} = \begin{cases} 2 & i = j \text{ のとき} \\ -1 & i = j \pm 1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

とする．

注意 2.2 2パラメータを持つA型アファインヤンギアンはGuay [G] によって導入された．そこで定義された代数は λ, β をパラメータとし，生成元 $X^{\pm}_{i,r}, H_{i,r}$ $(i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ を持つ．上で定義した $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ とは，パラメータの対応

$$\lambda = \hbar, \quad \beta = \frac{1}{2}\hbar - \frac{1}{4}N(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

と，$i \neq 0$ に対して

$$\sum_{r\geq 0} X^{\pm}_{i,r} u^{-r-1} = \sum_{r \geq 0} x^{\pm}_{i,r}(u - \frac{1}{2}i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))^{-r-1}$$
$$\sum_{r\geq 0} H_{i,r} u^{-r-1} = \sum_{r \geq 0} h_{i,r}(u - \frac{1}{2}i(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))^{-r-1}$$

及び $i = 0$ に対して

$$\sum_{r\geq 0} X^{\pm}_{0,r} u^{-r-1} = \sum_{r \geq 0} x^{\pm}_{0,r}(u - \frac{1}{4}N(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))^{-r-1}$$
$$\sum_{r\geq 0} H_{0,r} u^{-r-1} = \sum_{r \geq 0} h_{0,r}(u - \frac{1}{4}N(\varepsilon_1 - \varepsilon_2))^{-r-1}$$

という生成元の対応によって同型となる．

Guayの生成元のうち $i = 0$ を除いた $X^{\pm}_{i,r}, H_{i,r}$ $(i = 1, \ldots, N-1,\ r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ はA型ヤンギアン $Y_{\hbar}(\mathfrak{sl}_N)$ の定義関係式を満たし，$X^{\pm}_{i,0}, H_{i,0}$ $(i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ はアファインLie代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ の定義関係式を満たす．以下では，$Y_{\hbar}(\mathfrak{sl}_N)$ の生成元としても $X^{\pm}_{i,r}, H_{i,r}$ の記号を用いる．また $X^{\pm}_i = X^{\pm}_{i,0}, H_i = H_{i,0}$ とかく．

補題 2.3（**[G] Lemma 3.5**） 以下の式によって $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ 上の代数自己同型 ρ が定まる．$i \neq 0, 1$ に対して

$$\rho(X^{\pm}_{i,r}) = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{r-s} X^{\pm}_{i-1,s}$$
$$\rho(H_{i,r}) = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^{r-s} H_{i-1,s}$$

$i = 0, 1$ に対して

$$\rho(X^{\pm}_{i,r}) = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \beta^{r-s} X^{\pm}_{i-1,s}$$
$$\rho(H_{i,r}) = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} \beta^{r-s} H_{i-1;s}$$

次の命題は与えられた $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の表現が $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ に拡張される十分条件を与える．

命題 2.4（**[G] (6.44)**） $\varphi\colon Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N) \to \mathrm{End}(M)$ を $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の表現とし，M 上の全単射線型写像 T が次を満たすとする：$i = 2, \ldots, N-1$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\varphi(\rho(X^{\pm}_{i,r})) = T^{-1}\varphi(X^{\pm}_{i,r})T$$
$$\varphi(\rho(H_{i,r})) = T^{-1}\varphi(H_{i,r})T$$

$$\varphi(\rho^2(X^{\pm}_{1,r})) = T^{-2}\varphi(X^{\pm}_{1,r})T^2$$
$$\varphi(\rho^2(H_{1,r})) = T^{-2}\varphi(H_{1,r})T^2$$

このとき φ は

$$\varphi(X^{\pm}_{0,r}) = T\varphi(\rho(X^{\pm}_{0,r}))T^{-1}$$
$$\varphi(H_{0,r}) = T\varphi(\rho(H_{0,r}))T^{-1}$$

によって $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ の表現に拡張される．

3 ヤンギアンの Fock 空間への作用

本節では，Uglov による Fock 空間へのヤンギアン作用の構成を概観する．Fock 空間は有限ウェッジの空間の極限として構成される．退化アファイン Hecke 代数とヤンギアンとの間の Schur-Weyl 型双対性を用いて有限ウェッジ空間へのヤンギアンの作用を定義し，その極限として Fock 空間への作用を構成する．

正の整数 $n \geq 1$ を固定する．$V = \mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)^N$ を $\mathfrak{sl}_N$ のベクトル表現とし，$v_1, \ldots, v_N$ をその標準的な基底とする．$V[z^{\pm 1}] = V \otimes \mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)[z^{\pm 1}]$ の元 u_k $(k \in \mathbb{Z})$ を

$$v_a \otimes z^m = u_{a-mN}$$

によって定義すると，$u_{\mathbf{k}} = u_{k_1} \wedge \cdots \wedge u_{k_n}$ $(k_1 > \cdots > k_n)$ は $\bigwedge^n V[z^{\pm 1}]$ の基底をなす．逆に $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ $(k_1 > \cdots > k_n)$ に対し，$m_i(\mathbf{k})$, $a_i(\mathbf{k})$ $(i = 1, \ldots, n)$ を

$$v_{a_i(\mathbf{k})} \otimes z^{m_i(\mathbf{k})} = u_{k_i}$$

によって定める．

対称群 $\mathfrak{S}_n$ の Laurent 多項式環 $\mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$ への右作用を

$$s_{ij} \mapsto -K_{ij}$$

で定め（但し s_{ij} は互換，K_{ij} は変数 z_i と z_j の入れ替え）

$$\bigwedge^n V[z^{\pm 1}] = \mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} (V^{\otimes n})$$

と同一視する．$\mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ には，以下で定義する Dunkl-Cherednik 作用素を通じて退化アファイン Hecke 代数の右作用が定まる．$i = 1, \dots, n$ に対してパラメータ t, c を持つ Dunkl-Cherednik 作用素を

$$D_i^{(n)} = t z_i \frac{\partial}{\partial z_i} + c \left(\sum_{j<i} \frac{z_i}{z_i - z_j}(1 - K_{ji}) + \sum_{i<j} \frac{z_j}{z_i - z_j}(1 - K_{ij}) + n - i - \frac{1}{2} \right)$$

で定義する．Schur-Weyl 型双対性を適用するためにパラメータは $t = N\varepsilon_2$, $c = -\hbar$ とする．

定義 3.1　A 型退化アファイン Hecke 代数は，s_i $(i = 1, \dots, n-1)$, x_j $(j = 1, \dots, n)$ を生成元とし，次の関係式で定義される代数である：

$$s_i^2 = 1,\ s_i s_j = s_j s_i\ (i \neq j, j \pm 1),\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1},$$

$$x_i x_j = x_j x_i,\ s_i x_j = x_j s_i\ (i \neq j, j \pm 1),\ s_i x_i - x_{i+1} s_i = c$$

$$s_{ij} \mapsto -K_{ij},\ x_i \mapsto -D_i^{(n)}$$

によって $\mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$ は退化アファイン Hecke 代数の表現となる．

$$y_i = x_i + (c/2) \left(\sum_{i<j} s_{ij} - \sum_{j<i} s_{ji} \right)$$

とおく．

$X \in \mathrm{End}(V)$ に対して $X_{(k)} \in \mathrm{End}(V^{\otimes n})$ を $X_{(k)} = 1^{\otimes k-1} \otimes X \otimes 1^{\otimes n-k}$ で定義する．Drinfeld の結果により，$\bigwedge^n V[z^{\pm 1}] = \mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}] \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} (V^{\otimes n})$ へのヤンギアン作用が次で与えられる：$P \in \mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)[z_1^{\pm 1}, \dots, z_n^{\pm 1}]$, $v \in V^{\otimes n}$ に対して

$$X_i^{\pm}(P \otimes v) = \sum_{k=1}^n P \otimes (X_i^{\pm})_{(k)} v$$

$$H_i(P \otimes v) = \sum_{k=1}^n P \otimes (H_i)_{(k)} v$$

$$X_{i,1}^{\pm}(P\otimes v)=\sum_{k=1}^{n}Py_k\otimes(X_i^{\pm})_{(k)}v$$
$$\mp P\otimes(\hbar/4)\left(\sum_{\alpha\in\Delta_+}\left([X_i^{\pm},X_\alpha^{\pm}]X_\alpha^{\mp}+X_\alpha^{\mp}[X_i^{\pm},X_\alpha^{\pm}]\right)\mp(X_i^{\pm}H_i+H_iX_i^{\pm})\right)v$$
$$H_{i,1}(P\otimes v)=\sum_{k=1}^{n}Py_k\otimes(H_i)_{(k)}v$$
$$-P\otimes(\hbar/4)\left(\sum_{\alpha\in\Delta_+}(\alpha,\alpha_i)(X_\alpha^+X_\alpha^-+X_\alpha^-X_\alpha^+)-2H_i^2\right)v$$

但し $X_\alpha^{\pm}$ は $\mathfrak{sl}_N$ のルートベクトルで，不変内積に関して $(X_\alpha^+,X_\alpha^-)=1$ となるものとする．

$\bigwedge^n V[z^{\pm1}]$ は n 粒子から成り各粒子がスピン N を持つ Calogero-Sutherland 模型の状態空間であり，そのハミルトニアンはヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{gl}_N)$ の中心の元とみなすことができる．$H_{i,r}\in Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ はハミルトニアンと可換な作用素の族をなす．竹村-Uglov [TU1] はヤンギアンの表現論を用いて可換な作用素たちの同時固有ベクトルを構成した．この同時固有ベクトルは然るべき内積に関して直交基底をなす．Uglov [U1] はこの直交基底の対称多項式としての解釈を与え，Jack($\mathfrak{gl}_N$) 対称多項式と呼んだ．次に構成する Fock 空間は粒子の数 n を無限大にしたものに対応し，Jack($\mathfrak{gl}_N$) 対称多項式の無限変数版である Jack($\mathfrak{gl}_N$) 対称函数を直交基底に持つ．

以下では，チャージと呼ばれる整数 M に付随する Fock 空間 F_M を構成し，ヤンギアンが作用することを見る．$\mathbf{k}=(k_1,\dots,k_n)$ に対し，$m_i(\mathbf{k})$, $a_i(\mathbf{k})$ $(i=1,\dots,n)$ は

$$u_{k_i}=v_{a_i(\mathbf{k})}\otimes z^{m_i(\mathbf{k})}$$

を満たすものだった．特に m_i^0, a_i^0 $(i=1,\dots,n)$ を

$$u_{M-i+1}=v_{a_i^0}\otimes z^{m_i^0}$$

を満たすものとして定める．$\bigwedge^n V[z^{\pm1}]$ の部分空間 $V_{M,n}$ を

$$V_{M,n}=\bigoplus_{\substack{k_i>k_{i+1}\\ m_i(\mathbf{k})\le m_i^0}}\mathbb{C}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)u_{\mathbf{k}}$$

で定義する．また $u_{\mathbf{k}}\in V_{M,n}$ に対しその次数を

$$\deg u_{\mathbf{k}}=\sum_{i=1}^{n}(m_i^0-m_i(\mathbf{k}))$$

で定義し $V^d_{M,n}$ を次数 d の元からなる斉次部分空間とする．$V^d_{M,n}$ は $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の作用で閉じている．

$s \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ を

$$s \equiv M \mod N$$

で定まる数とする．

命題 3.2（**[U3] Corollary 3.4, Proposition 3.8**）$l' \geq l \geq d$ とする．このとき

$$\begin{aligned} V^d_{M,s+lN} &\to V^d_{M,s+l'N} \\ v &\mapsto v \wedge u_{M-(s+lN)} \wedge u_{M-(s+lN)-1} \wedge \cdots \wedge u_{M-(s+l'N)+1} \end{aligned}$$

は $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の表現としての同型写像を与える．

$V^d_{M,s+lN}$ の l に関する順極限として，Fock 空間を定義する．

定義 3.3

$$F^d_M = \varinjlim V^d_{M,s+lN}$$

とし，$F_M = \bigoplus_{d\geq 0} F^d_M$ を（レベル 1）Fock 空間と呼ぶ．

$u_{\mathbf{k}} = u_{k_1} \wedge u_{k_2} \wedge \cdots$（有限個の i を除いて $k_i = M - i + 1$）は F_M の基底をなす．Fock 空間 F_M はアファイン Lie 代数 $\hat{\mathfrak{sl}}_N$ の表現となり，その作用は組合せ論的に記述できることがよく知られている（例えば [L] を見よ）．

整数 m に対して

$$|m\rangle = u_m \wedge u_{m-1} \wedge \cdots$$

とおく．命題 3.2 より，F^d_M には同型

$$\begin{aligned} V^d_{M,s+lN} &\overset{\cong}{\to} F^d_M \\ v &\mapsto v \wedge |M-(s+lN)\rangle \end{aligned}$$

（$l \geq d$）を通じて $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ が作用する．

4 アファインヤンギアンの Fock 空間への作用

本節では Fock 空間へのアファインヤンギアンの作用の構成の概略を述べる．そのためには命題 2.4 の条件を満たす線型写像を構成すればよい．

まず $T_n \in \mathrm{End}(\bigwedge^n V[z^{\pm 1}])$ を

$$T_n(u_{k_1} \wedge u_{k_2} \wedge \cdots \wedge u_{k_n}) = u_{k_1+1} \wedge u_{k_2+1} \wedge \cdots \wedge u_{k_n+1}$$

で定義する.

命題 4.1（**[G] Lemma 6.2**） T_n は命題 2.4 の条件を満たす.

特に, $\bigwedge^n V[z^{\pm 1}]$ にはアファインヤンギアンが作用する.

注意 4.2 Guay [G] は, 一般に A 型退化ダブルアファイン Hecke 代数の表現 M が与えられたとき $M \otimes_{\mathbb{C}\mathfrak{S}_n} (V^{\otimes n})$ 上に命題 2.4 の条件を満たす T を定義し, アファインヤンギアンの作用を構成した. その際のパラメータの対応が, すでに述べたように $t = N\varepsilon_2$, $c = -\hbar$ で与えられる. $\mathbb{C}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)[z_1^{\pm 1}, \ldots, z_n^{\pm 1}]$ は退化ダブルアファイン Hecke 代数の表現になっており, Guay の結果をこの表現に適用することで命題 4.1 を得る.

$T_\infty \colon F_M \to F_{M+1}$ を

$$T_\infty(u_{k_1} \wedge u_{k_2} \wedge \cdots) = u_{k_1+1} \wedge u_{k_2+1} \wedge \cdots$$

で定義する. 次を示せば, 命題 2.4 より F_M にアファインヤンギアンが作用する : $l \geq d$, $n = s + lN$ とし, $v \in V^d_{M,n}$ とする. このとき $i = 2, \ldots, N-1$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$T_\infty^{-1} X^{\pm}_{i,r} T_\infty(v \wedge |M-n\rangle) = \rho(X^{\pm}_{i,r})(v \wedge |M-n\rangle) \tag{1}$$
$$T_\infty^{-1} H_{i,r} T_\infty(v \wedge |M-n\rangle) = \rho(H_{i,r})(v \wedge |M-n\rangle) \tag{2}$$
$$T_\infty^{-2} X^{\pm}_{1,r} T_\infty^2(v \wedge |M-n\rangle) = \rho^2(X^{\pm}_{1,r})(v \wedge |M-n\rangle) \tag{3}$$
$$T_\infty^{-2} H_{1,r} T_\infty^2(v \wedge |M-n\rangle) = \rho^2(H_{1,r})(v \wedge |M-n\rangle) \tag{4}$$

が成り立つ.

補題 4.3（**cf. [STU] Lemma 22**） $i = 1, \ldots, N-2$, $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

$$T_{n+1} X^{\pm}_{i,r}(v \wedge u_{M-n}) \wedge |M-n\rangle = T_{n+1}(X^{\pm}_{i,r} v \wedge u_{M-n}) \wedge |M-n\rangle \tag{5}$$
$$T_{n+1} H_{i,r}(v \wedge u_{M-n}) \wedge |M-n\rangle = T_{n+1}(H_{i,r} v \wedge u_{M-n}) \wedge |M-n\rangle \tag{6}$$
$$\begin{aligned} &T_{n+2}^2 X^{\pm}_{N-1,r}(v \wedge u_{M-n} \wedge u_{M-n-1}) \wedge |M-n\rangle \\ &= T_{n+2}^2 (X^{\pm}_{N-1,r} v \wedge u_{M-n} \wedge u_{M-n-1}) \wedge |M-n\rangle \end{aligned} \tag{7}$$
$$\begin{aligned} &T_{n+2}^2 H_{N-1,r}(v \wedge u_{M-n} \wedge u_{M-n-1}) \wedge |M-n\rangle \\ &= T_{n+2}^2 (H_{N-1,r} v \wedge u_{M-n} \wedge u_{M-n-1}) \wedge |M-n\rangle \end{aligned} \tag{8}$$

が成り立つ.

補題 4.3 から (1)–(4) を示す．T_∞ の定義から

$$T_\infty(v \wedge |M-n\rangle) = T_{n+1}(v \wedge u_{M-n}) \wedge |M-n\rangle$$

である．右辺へのヤンギアンの作用は，その定義より $X \in Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ に対して

$$X(T_{n+1}(v \wedge u_{M-n}) \wedge |M-n\rangle) = XT_{n+1}(v \wedge u_{M-n}) \wedge |M-n\rangle$$

となる．命題 4.1 より

$$XT_{n+1}(v \wedge u_{M-n}) = T_{n+1}\rho(X)(v \wedge u_{M-n})$$

が成り立つ．ここで $X = X^{\pm}_{i,r}, H_{i,r}$ $(i = 2, \ldots, N-1)$ に対して補題 4.3 (5)(6) を用いると

$$T_{n+1}\rho(X)(v \wedge u_{M-n}) \wedge |M-n\rangle = T_{n+1}(\rho(X)v \wedge u_{M-n}) \wedge |M-n\rangle$$

を得る．以上より

$$\begin{aligned} XT_\infty(v \wedge |M-n\rangle) &= T_{n+1}(\rho(X)v \wedge u_{M-n}) \wedge |M-n\rangle \\ &= T_\infty(\rho(X)v \wedge |M-n\rangle) \\ &= T_\infty\rho(X)(v \wedge |M-n\rangle) \end{aligned}$$

となり (1)(2) が示された．(3)(4) も同様である．

補題の略証　ヤンギアンの関係式から，$X^{\pm}_i, H_i, X^{-}_{i,1}$ $(i = 1, \ldots, N-1)$ について示せばよい．$i = 1, \ldots, N-2$ に対して

$$\begin{aligned} X^{\pm}_i(v \wedge u_{M-n}) &= X^{\pm}_i v \wedge u_{M-n} \\ H_i(v \wedge u_{M-n}) &= H_i v \wedge u_{M-n} \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} X^{\pm}_{N-1}(v \wedge u_{M-n} \wedge u_{M-n-1}) &= X^{\pm}_{N-1}v \wedge u_{M-n} \wedge u_{M-n-1} \\ H_{N-1}(v \wedge u_{M-n} \wedge u_{M-n-1}) &= H_{N-1}v \wedge u_{M-n} \wedge u_{M-n-1} \end{aligned}$$

は容易にわかる．

$i = 1, \ldots, N-2$ に対して

$$T_{n+1}X^{-}_{i,1}(v \wedge u_{M-n}) \wedge |M-n\rangle = T_{n+1}(X^{-}_{i,1}v \wedge u_{M-n}) \wedge |M-n\rangle$$

を示す.

$$\omega_i = \sum_{\alpha\in\Delta_+}\Big([X_i^-, X_\alpha^-]X_\alpha^+ + X_\alpha^+[X_i^-, X_\alpha^-]\Big) + (X_i^- H_i + H_i X_i^-)$$

$$\begin{aligned}\omega_i' = \sum_{\alpha\in\Delta_+}\Big(&2[X_i^-, X_\alpha^-]\otimes X_\alpha^+ + 2X_\alpha^+\otimes[X_i^-, X_\alpha^-] + 1\otimes[X_i^-, X_\alpha^-]X_\alpha^+ \\ &+ 1\otimes X_\alpha^+[X_i^-, X_\alpha^-]\Big) + 2X_i^-\otimes H_i + 2H_i\otimes X_i^- + 1\otimes X_i^- H_i + 1\otimes H_i X_i^-\end{aligned}$$

とおく. $\mathfrak{sl}_N$ の余積 Δ に関して

$$\Delta(\omega_i) = \omega_i\otimes 1 + \omega_i'$$

である.

$$J(X_i^-) = X_{i,1}^- - (\hbar/4)\omega_i$$

とおく.

$$\begin{aligned}&T_{n+1}X_{i,1}^-(v\wedge u_{M-n})\wedge|M-n\rangle = T_{n+1}(J(X_i^-) + (\hbar/4)\omega_i)(v\wedge u_{M-n})\wedge|M-n\rangle \\ &= T_{n+1}J(X_i^-)(v\wedge u_{M-n})\wedge|M-n\rangle + (\hbar/4)T_{n+1}(\omega_i v\wedge u_{M-n})\wedge|M-n\rangle \\ &+ (\hbar/4)T_{n+1}\omega_i'(v\wedge u_{M-n})\wedge|M-n\rangle\end{aligned}$$

であるから

$$T_{n+1}J(X_i^-)(v\wedge u_{M-n})\wedge|M-n\rangle = T_{n+1}(J(X_i^-)v\wedge u_{M-n})\wedge|M-n\rangle \tag{9}$$

$$T_{n+1}\omega_i'(v\wedge u_{M-n})\wedge|M-n\rangle = 0 \tag{10}$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned}v\wedge u_{M-n} &= (v_{a_1}\otimes z^{m_1})\wedge\cdots\wedge(v_{a_n}\otimes z^{m_n})\wedge(v_N\otimes z^m) \\ &= z_1^{m_1}\cdots z_n^{m_n}z_{n+1}^m\otimes(v_{a_1}\otimes\cdots\otimes v_{a_n}\otimes v_N) \\ &= P\otimes w\end{aligned}$$

と表し

$$J(X_i^-)(v\wedge u_{M-n}) = \sum_{k=1}^{n+1} -\Big(D_k^{(n+1)} + (c/2)\Big(\sum_{k<j\le n+1}K_{kj} - \sum_{j<k}K_{jk}\Big)\Big)P\otimes(X_i^-)_{(k)}w$$

$$J(X_i^-)v\wedge u_{M-n} = \sum_{k=1}^{n} -\Big(D_k^{(n)} + (c/2)\Big(\sum_{k<j\le n}K_{kj} - \sum_{j<k}K_{jk}\Big)\Big)P\otimes(X_i^-)_{(k)}w$$

という二つの式の右辺の差を計算して，(9) を得る．(10) も $\mathfrak{sl}_N$ の計算によって示すことができる．

$$\begin{aligned}&T^2_{n+2}X^-_{N-1,1}(v \wedge u_{M-n} \wedge u_{M-n-1}) \wedge |M-n\rangle \\ &= T^2_{n+2}(X^-_{N-1,1}v \wedge u_{M-n} \wedge u_{M-n-1}) \wedge |M-n\rangle\end{aligned}$$

も同様にして示すことができる． （終）

以上より，次の結果を得た．

定理 4.4 ヤンギアン $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の Fock 空間 F_M への作用はアファインヤンギアン $Y_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\hat{\mathfrak{sl}}_N)$ に拡張される．

5 箙多様体との関係

Fock 空間 F_M は Jack($\mathfrak{gl}_N$) 対称函数と呼ばれる直交基底を持つ．筆者は [K1] において この基底への $Y_\hbar(\mathfrak{sl}_N)$ の生成元 $X^\pm_{i,r}, H_{i,r}$ の作用を計算し組合せ論的な公式を得た．一方，$A^{(1)}_{N-1}$ 型箙多様体 $\mathfrak{M}(\mathbf{v}, \Lambda_{M \bmod N})$ のトーラス同変ホモロジー群にはアファインヤンギアンが作用し（Varagnolo [V] による），トーラス固定点のクラスに対応する基底を持つ．この基底への作用は局所化定理を用いて計算することができる．

[K1] の主結果は，上で述べた Fock 空間と同変ホモロジー群の基底を対応させる写像がヤンギアン作用と整合的であるということである．

参考文献

[G] Nicolas Guay, *Cherednik algebras and Yangians*, Int. Math. Res. Not. (2005), no. 57, 3551–3593.

[K1] Ryosuke Kodera, *Affine Yangian action on the Fock space*, preprint arXiv:1506.01246, 2015.

[K2] 小寺 諒介, *Affine Yangian action on the Fock space*, Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2015 報告集.

[L] Bernard Leclerc, *Fock space representations of* $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$, Geometric methods in representation theory, I, Sémin. Congr., vol. 24, Soc. Math. France, Paris, 2012, pp. 343–385.

[STU] Yoshihisa Saito, Kouichi Takemura, and Denis Uglov, *Toroidal actions on level 1 modules of* $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$, Transform. Groups **3** (1998), no. 1, 75–102.

[TU1] Kouichi Takemura and Denis Uglov, *The orthogonal eigenbasis and norms of eigenvectors in the spin Calogero-Sutherland model*, J. Phys. A **30** (1997), no. 10, 3685–3717.

[TU2] ———, *Level-0 action of* $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ *on the q-deformed Fock spaces*, Comm. Math. Phys. **190** (1998), no. 3, 549–583.

[U1] Denis Uglov, *Yangian Gelfand-Zetlin bases,* $\mathfrak{gl}_N$*-Jack polynomials and computation of dynamical correlation functions in the spin Calogero-Sutherland model*, Comm. Math. Phys. **191** (1998), no. 3, 663–696.

[U2] ———, *Symmetric functions and the Yangian decomposition of the Fock and basic modules of the affine Lie algebra* $\hat{\mathfrak{sl}}_N$, Quantum many-body problems and representation theory, MSJ Mem., vol. 1, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1998, pp. 183–241.

[U3] ———, *Yangian actions on higher level irreducible integrable modules of* $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$, arXiv:9802048, 1998.

[V] Michela Varagnolo, *Quiver varieties and Yangians*, Lett. Math. Phys. **53** (2000), no. 4, 273–283.

[VV] Michela Varagnolo and Eric Vasserot, *Double-loop algebras and the Fock space*, Invent. Math. **133** (1998), no. 1, 133–159.