数理解析研究所講究録
第 1977 巻 2015 年 149-163

Twisted immanant と反可換成分の行列に関する不変式論

伊藤稔（鹿児島大学理学部）
Minoru ITOH (Faculty of Science, Kagoshima University)

1. 序文

Immanantという行列式の一般化が知られているが, これに似たtwisted immanantという新しい行列函数を導入する. このtwisted immanantの性質, とくに反可換な成分の行列への応用について述べたい. くわしくは [I3] を見ていただきたい.

簡単に定義を述べよう. 自己共役な n の分割 λ に対して函数 $\mathrm{imm}^{*\lambda}$ を

$$\mathrm{imm}^{*\lambda} A=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\chi^{*\lambda}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

と定め, この行列函数をtwisted immanantと呼ぶことにする. ただし $A=(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ は $\mathbb{C}$ 上の結合的代数の元を成分とする行列である. また $\chi^{*\lambda}$ は, 定義は後回しにするが, λ から自然に決まる対称群 $\mathfrak{S}_n$ 上の複素数値函数であり,

$$\chi^{*\lambda}(\tau\sigma\tau^{-1})=\mathrm{sgn}(\tau)\chi^{*\lambda}(\sigma)$$

という関係式をみたす（つまりconjugationに対して符号の分の「ねじれ」が入る）.

通常のimmanantは $\mathfrak{S}_n$ の既約指標 χ^λ を用いて

$$\mathrm{imm}^{\lambda} A=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\chi^{\lambda}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdots a_{n\sigma(n)}$$

と定義されるが, この $\mathfrak{S}_n$ 上の類函数 χ^λ を「ねじれ」の入った函数 $\chi^{*\lambda}$ に置き換えたのがtwisted immanantということになる.

このtwisted immanantは興味深い性質をもつ. たとえばCauchy–Binet型の関係式がなりたつ. さらに成分が互いに反可換な行列に対して, conjugationに関する不変式の記述への応用やCauchy関係式の類似などの結果もある. これらについて述べたい.

1.1. 具体的に結果を述べる前に, 基本的な記号を用意しておく. $\mathcal{A}$ を $\mathbb{C}$ 上の結合的代数とする. そして $\mathrm{Mat}_{M,N}(\mathcal{A})$ で $\mathcal{A}$ の元を成分とする $M\times N$ 行列全体の集合を表す. また $M\times N$ 行列 $X=(x_{ij})$ と

$$I=(i_1,\ldots,i_n)\in[M]^n,\qquad J=(j_1,\ldots,j_n)\in[N]^n$$

に対して $X_{IJ}=(x_{i_sj_t})_{1\leq s,t\leq n}$ とおく（X の小行列のようなものだが, 行や列を重複して選ぶことを許している）. ただし $[k]=\{1,\ldots,k\}$ とする.

1.2. まず自己共役な n の分割 λ に対する通常の immanant と twisted immanant に関して，次の Cauchy–Binet 型の関係式がなりたつ:

定理 A (定理 4.1). $A \in \mathrm{Mat}_{L,M}(\mathcal{A})$, $B \in \mathrm{Mat}_{M,N}(\mathcal{A})$ とする．A と B の成分がすべて互いに可換のとき, $I \in [L]^n$ と $K \in [N]^n$ に対して次がなりたつ:

$$\begin{aligned}
\mathrm{imm}^{\lambda}(AB)_{IK} &= \frac{\chi^{\lambda}(1)}{n!} \sum_{J \in [M]^n} \mathrm{imm}^{\lambda} A_{IJ}\, \mathrm{imm}^{\lambda} B_{JK} \\
&= \frac{\chi^{\lambda}(1)}{n!} \sum_{J \in [M]^n} \mathrm{imm}^{*\lambda} A_{IJ}\, \mathrm{imm}^{*\lambda} B_{JK}, \\
\mathrm{imm}^{*\lambda}(AB)_{IK} &= \frac{\chi^{\lambda}(1)}{n!} \sum_{J \in [M]^n} \mathrm{imm}^{\lambda} A_{IJ}\, \mathrm{imm}^{*\lambda} B_{JK} \\
&= \frac{\chi^{\lambda}(1)}{n!} \sum_{J \in [M]^n} \mathrm{imm}^{*\lambda} A_{IJ}\, \mathrm{imm}^{\lambda} B_{JK}.
\end{aligned}$$

1.3. 自己共役な n の分割 λ に対して, 行列函数 $\mathrm{imm}_n^{*\lambda}$ を

$$\mathrm{imm}_n^{*\lambda} A = \frac{1}{n!} \sum_{I \in [N]^n} \mathrm{imm}^{*\lambda} A_{II}$$

という twisted immanant の和で定義する．ただし A は $\mathrm{Mat}_{N,N}(\mathcal{A})$ の元である．この函数 $\mathrm{imm}_n^{*\lambda}$ は $GL_N(\mathbb{C})$ の conjugation による作用で不変である．つまり任意の $g \in GL_N(\mathbb{C})$ に対して, 次がなりたつ（これは A の成分が可換でなくても成立）：

$$\mathrm{imm}_n^{*\lambda}\, gAg^{-1} = \mathrm{imm}_n^{*\lambda} A.$$

1.4. これ以降は, 成分が互いに反可換な行列と twisted immanant の関係について述べる．ただし, 本稿では「集合 X の元が互いに反可換」というのは,「任意の $x, y \in X$ に対して $xy = -yx$」という意味とする（自分自身とも反可換, つまり $x \in X$ に対して $xx = -xx$ であることにも注意）．

まず次のようなトレースとの関係がある:

定理 B (定理 5.1). $\lambda \in P_{\text{self-conj}}(n)$ に対して, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) = h(\lambda)$ とおく．すると成分が互いに反可換な行列 $A \in \mathrm{Mat}_{N,N}(\mathcal{A})$ に対して, 次がなりたつ:

$$\mathrm{tr}(A^{\mu_1}) \cdots \mathrm{tr}(A^{\mu_r}) = i^{-m(\lambda)} \sqrt{\mu_1 \cdots \mu_r}\, \mathrm{imm}_n^{*\lambda} A.$$

とくに $\lambda = (k+1, 1^k)$ の場合を考えると, 次がなりたつ:

$$\mathrm{tr}(A^{2k+1}) = i^{-k} \sqrt{2k+1}\, \mathrm{imm}_{2k+1}^{*(k+1,1^k)} A.$$

記号の説明をする．まず, i は虚数単位である．また $P_{\text{self-conj}}(n)$ と $P_{\text{strict,odd}}(n)$ は

$$P_{\text{self-conj}}(n) = \{\lambda \vdash n \,|\, \lambda \text{ は自己共役}\},$$
$$P_{\text{strict,odd}}(n) = \{(\mu_1, \dots, \mu_r) \vdash n \,|\, r \geq 0,\ \mu_1 > \cdots > \mu_r > 0,\ \mu_1, \dots, \mu_r\colon \text{odd}\}$$

という分割の集合である．そして h は

$$h\colon \lambda \mapsto (2\lambda_1 - 1, 2\lambda_2 - 3, \dots, 2\lambda_r - (2r-1))$$

で定まる $P_{\text{self-conj}}(n)$ から $P_{\text{strict,odd}}(n)$ への全単射である．ただし r は λ の階数, つまり主対角線の長さである．さらに $m(\lambda) = \frac{1}{2}(n-r)$ とする（この値は常に整数になる）．

定理 B は Cayley–Hamilton 型の定理と比較するとおもしろい．A のように成分が互いに反可換な N 次正方行列に対しては

$$(1.1)\quad NA^{2N-1} - \operatorname{tr}(A)A^{2N-2} - \operatorname{tr}(A^3)A^{2N-4} - \cdots - \operatorname{tr}(A^{2N-3})A^2 - \operatorname{tr}(A^{2N-1})A^0 = 0$$

という Cayley–Hamilton 型の定理がなりたつ（定理 6.3; [BPS], [I2]）．通常の Cayley–Hamilton 定理と比較すると $\operatorname{tr}(A), \operatorname{tr}(A^3), \dots, \operatorname{tr}(A^{2N-1})$ という冪のトレースが固有多項式の係数の役割を果たしている．そう見ると, この冪のトレースには行列式に似た表示も期待したくなる．そして実際にこのような表示を twisted immanant という行列式に似た函数で実現したのが定理 B というわけである．

1.5. Twisted immanant は外積代数 $\Lambda(V \otimes V^*)$ の $GL(V)$-不変元の記述にも役立つ:

定理C (定理6.2). V を N 次元の複素ベクトル空間とする．$e_1, \dots, e_N$ を V の基底, $e_1^*, \dots, e_N^*$ をその双対基底として, 次のような $\Lambda(V \otimes V^*)$ の元 a_{ij} を考える:

$$a_{ij} = e_i \otimes e_j^* \in V \otimes V^* \subset \Lambda(V \otimes V^*).$$

さらにこの互いに反可換な元たちを成分とする行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq N} \in \operatorname{Mat}_{N,N}(\Lambda(V \otimes V^*))$ を考える．すると次は $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ のベクトル空間としての基底をなす:

$$\{\operatorname{imm}^{*\lambda}_{|\lambda|} A \,|\, \lambda \text{ は, 最初の成分が } N \text{ 以下の自己共役な分割}\}.$$

注意. 同様に外積代数 $\Lambda(\Lambda_2(V))$, $\Lambda(S_2(V))$ の $O(V)$-不変元や $Sp(V)$-不変元も twisted immanant を用いて記述できる．ただし V は非退化な対称（または交代）双線型形式をもつ有限次元複素ベクトル空間とする．

1.6. 最後に, 対称式に関する Cauchy 関係式に類似した等式がなりたつ:

定理 D (定理 7.3). 次がなりたつ:

$$
\begin{aligned}
\det_n(A \otimes B) &= \mathrm{per}_n(A \otimes B) \\
&= \sum_{\lambda \in P_{\text{self-conj}}(n)} (-)^{m(\lambda)}\, \mathrm{imm}_n^{*\lambda} A\ \mathrm{imm}_n^{*\lambda} B \\
&= \sum_{(\mu_1,\dots,\mu_r) \in P_{\text{strict,odd}}(n)} \frac{1}{\mu_1 \cdots \mu_r} \mathrm{tr}(A^{\mu_1}) \cdots \mathrm{tr}(A^{\mu_r})\, \mathrm{tr}(B^{\mu_1}) \cdots \mathrm{tr}(B^{\mu_r})
\end{aligned}
$$

ただし A, B は $A \in \mathrm{Mat}_{M,M}(\mathcal{A})$, $B \in \mathrm{Mat}_{N,N}(\mathcal{A})$ で次をみたすものとする:

(i) A の成分は互いに反可換;

(ii) B の成分は互いに反可換;

(iii) A の成分は B の成分と可換.

1.7. 関連する研究をまとめておく.

まず Cayley–Hamilton 型定理 (1.1) は Amitsur–Levitzki 定理 ([AL], [K1], [K2]) の精密化と見なせる. 実際に (1.1) から $A^{2N} = 0$ がわかり, Amitsur–Levitzki 定理はこの関係式からすぐに出る（くわしくは [I2], [P]）.

また不変式環 $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ はリー環 $\mathfrak{gl}(V)$ のコホモロジー環と同一視できる ([Me]). Kostant の論文 [K1] との関係はとくに重要である. この論文で, Kostant は Amitsur–Levitzki 定理を $\mathfrak{gl}(V)$ のコホモロジー環と函数 $\chi^{*\lambda}$ を用いて証明している. つまり本研究の基本的なアイデアはこの Kostant の論文で登場しているのである.

2. 通常の immanant

まず通常の immanant とその性質を復習しておく.

2.1. Immanant の定義から始めよう.

$\mathbb{C}$ 上の結合的代数 $\mathcal{A}$ を固定して, $\mathcal{A}$ の元を成分とする $m \times n$ 行列全体の集合を $\mathrm{Mat}_{m,n}(\mathcal{A})$ と表す. 以下 $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathcal{A})$ とする.

n の分割 λ に対応する A の immanant を次で定める:

$$\mathrm{imm}^\lambda A = \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\tau) a_{1\tau(1)} \cdots a_{n\tau(n)}.$$

ここで χ^λ は λ で定まる対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約指標である. この immanant という行列函数は行列式やパーマネントの自然な一般化と見なせる. 実際 $\lambda = (1^n)$ のときと $\lambda = (n)$ のときが行列式とパーマネントに当たる:

$$\mathrm{imm}^{(1^n)} = \det, \qquad \mathrm{imm}^{(n)} = \mathrm{per}.$$

行列成分が可換なとき（たとえば $\mathcal{A}$ が可換のとき）は immanant は次のように様々な和で表せる:

命題 2.1. A の成分が互いに可換のときは, 次がなりたつ:

$$\begin{aligned}
\operatorname{imm}^\lambda A &= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\tau) a_{1\tau(1)}\cdots a_{n\tau(n)} \\
&= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\sigma^{-1}) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n} \\
&= \frac{\chi^\lambda(1)}{n!} \sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\sigma^{-1})\chi^\lambda(\tau) a_{\sigma(1)\tau(1)}\cdots a_{\sigma(n)\tau(n)} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\tau\sigma^{-1}) a_{\sigma(1)\tau(1)}\cdots a_{\sigma(n)\tau(n)}.
\end{aligned}$$

これらの 4 種類の和が一致することは次の既約指標の性質からわかる:

(2.1)
$$\frac{1}{|\mathfrak{S}_n|}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\sigma\tau^{-1})\chi^\mu(\tau) = \delta_{\lambda\mu}\frac{\chi^\lambda(\sigma)}{\chi^\lambda(1)}, \qquad \chi^\lambda(\tau\sigma\tau^{-1}) = \chi^\lambda(\sigma), \qquad \chi^\lambda(\sigma^{-1}) = \chi^\lambda(\sigma).$$

ここで第一, 第二の関係式は一般の有限群でなりたつ. また第三の関係式は $\mathfrak{S}_n$ の既約表現がすべて real valued であることから来ている.

行列成分が互いに可換でないなら, 命題 2.1 の 4 種類の和は一般には一致しない. 第一と第二の和を対比させるときは, 次のように書くことにする:

$$\begin{aligned}
\text{row-imm}^\lambda A &= \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\tau) a_{1\tau(1)}\cdots a_{n\tau(n)}, \\
\text{column-imm}^\lambda A &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi^\lambda(\sigma^{-1}) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}.
\end{aligned}$$

2.2. Immanant は次のような Cauchy–Binet 恒等式の類似をみたす. これは命題 2.1 から容易にわかる.

命題 2.2. $A \in \mathrm{Mat}_{L,M}(\mathcal{A})$, $B \in \mathrm{Mat}_{M,N}(\mathcal{A})$ とする. A と B の成分がすべて互いに可換のとき, $I \in [L]^n$ と $K \in [N]^n$ に対して次がなりたつ:

$$\operatorname{imm}^\lambda(AB)_{IK} = \frac{\chi^\lambda(1)}{n!}\sum_{J\in[M]^n} \operatorname{imm}^\lambda A_{IJ} \operatorname{imm}^\lambda B_{JK}.$$

2.3. Immanant は行や列の入れ替えに関するある種の不変性もある. 行列 $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ と $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して, $A^\sigma = (a_{\sigma(i)\sigma(j)})_{1\le i,j\le n}$ とおく. すると A の成分が互いに可換なら

$$\operatorname{imm}^\lambda A^\sigma = \operatorname{imm}^\lambda A$$

が, また A の成分が互いに反可換なら

$$\text{row-imm}^{\lambda} A^{\sigma} = \operatorname{sgn}(\sigma) \, \text{row-imm}^{\lambda} A, \tag{2.2}$$
$$\text{column-imm}^{\lambda} A^{\sigma} = \operatorname{sgn}(\sigma) \, \text{column-imm}^{\lambda} A$$

がなりたつ. これらは (2.1) の第二の関係式からすぐにわかる.

2.4. 次のような immanant の和で表される行列函数 imm_n^{λ} を考える:

$$\text{imm}_n^{\lambda} A = \frac{1}{n!} \sum_{I \in [N]^n} \text{row-imm}^{\lambda} A_{II} = \frac{1}{n!} \sum_{I \in [N]^n} \text{column-imm}^{\lambda} A_{II}.$$

ここで第二の等号は簡単な計算でわかる. この函数は $GL_N(\mathbb{C})$ の conjugation による作用で不変である（これは A の成分が互いに可換でなくてもなりたつ）:

命題 2.3. 任意の $g \in GL_N(\mathbb{C})$ に対して $\text{imm}_n^{\lambda} gAg^{-1} = \text{imm}_n^{\lambda} A$ がなりたつ.

また複素行列では, この函数 imm_n^{λ} は固有値を Schur 多項式に代入したものと等しい:

命題 2.4. $A \in \text{Mat}_{N,N}(\mathbb{C})$ とその固有値 $x_1, \ldots, x_N$ に対して次がなりたつ. ただし s_{λ} は λ に対応する Schur 多項式である.

$$\text{imm}_n^{\lambda} A = s_{\lambda}(x_1, \ldots, x_N).$$

一方この函数は成分が反可換なら, ほぼ恒等的に 0 である:

命題 2.5. 成分が互いに反可換な行列 A に対して, $n > 1$ なら $\text{imm}_n^{\lambda} A = 0$ となる.

命題 2.3, 2.4 の証明は [I1] にある. また命題 2.5 は (2.2) からわかる:

3. 対称群の既約指標の Twisted な類似

Twisted immanant を定義するため, まず $\mathfrak{S}_n$ 上の函数 $\chi^{*\lambda}$ を導入する. この函数は Frobenius によって交代群の表現論を通じて導入されたもので, $\chi^{*\lambda}(\tau\sigma\tau^{-1}) = \operatorname{sgn}(\tau)\chi^{*\lambda}(\sigma)$ という関係をみたす [F]. この節の詳細は [JK] を参照のこと.

3.1. 本題に入る前に, 分割に関する記法を整理しておく.

分割 λ に対して, λ の i 番目の成分を λ_i と表す（よって長さ l の分割 λ に対して, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ となる）.

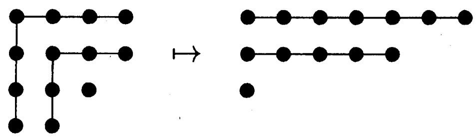
$P(n)$ を n の分割全体の集合とする. さらに次のような分割の集合を考える（λ' は分割 λ の共役を表す）:

$$P_{\text{self-conj}}(n) = \{\lambda \in P(n) \mid \lambda = \lambda'\},$$
$$P_{\text{strict,odd}}(n) = \{(\mu_1, \ldots, \mu_r) \in P(n) \mid r \geq 0,\ \mu_1 > \cdots > \mu_r > 0,\ \mu_1, \ldots, \mu_r\text{: odd}\}.$$

つまり $P_{\text{self-conj}}(n)$ は n の自己共役な分割全体の集合, $P_{\text{strict,odd}}(n)$ は成分がすべて奇数の strict な（つまり成分が相異なる）n の分割全体の集合である．さらに次のようにおく:

$$P = \bigsqcup_{n\geq 0} P(n), \qquad P_{\text{self-conj}} = \bigsqcup_{n\geq 0} P_{\text{self-conj}}(n), \qquad P_{\text{strict,odd}} = \bigsqcup_{n\geq 0} P_{\text{strict,odd}}(n).$$

$P_{\text{self-conj}}(n)$ から $P_{\text{strict,odd}}(n)$ へは自然な全単射 h がある．$\lambda \in P_{\text{self-conj}}(n)$ に対して，λ のおのおのの diagonal hook の長さを成分とする分割 $h(\lambda)$ を考えるのである．たとえば h: $(4,4,3,2) \mapsto (7,5,1)$ となるが，これは次のように図で考えればわかりやすい:



この h が $P_{\text{self-conj}}(n)$ から $P_{\text{strict,odd}}(n)$ への全単射であることはすぐにわかる．h の定義は次のように述べることもできる:

$$h\colon \lambda \mapsto (2\lambda_1 - 1, 2\lambda_2 - 3, \ldots, 2\lambda_r - (2r-1)).$$

ここで r は λ の階数 (rank) である（つまり λ の主対角線の長さ）．

最後に階数が r の自己共役な n の分割 λ に対して $m(\lambda) = \frac{1}{2}(n-r)$ とおく（この値は常に整数になる）．

3.2. 交代群 $\mathfrak{A}_n$ の共役類について復習する．

$\mu \in P(n)$ で定まる対称群 $\mathfrak{S}_n$ の共役類を C_μ と表そう:

$$C_\mu = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \,|\, \sigma \text{ の型は } \mu\}.$$

$|C_\mu| = n!/z_\mu$ となることはよく知られている（ただし $\mu = (1^{m_1}, 2^{m_2}, \ldots)$ に対して $z_\mu = \prod_j j^{m_j} m_j!$ とする）．

多くの場合，この C_μ はそのまま $\mathfrak{A}_n$ の共役類となる．実際，$\mu \notin P_{\text{strict,odd}}(n)$ で $C_\mu \subset \mathfrak{A}_n$ のときは，C_μ は $\mathfrak{A}_n$ の共役類になる．

しかし $\mu \in P_{\text{strict,odd}}(n)$ のときは，C_μ は $\mathfrak{A}_n$ の二つの共役類の和集合になる．このことをくわしく見よう．$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ と表して，$\sigma \in C_\mu$ を固定し，そのサイクル分解

$$\sigma = (i_{11}\; i_{12}\; \ldots\; i_{1\mu_1})(i_{21}\; i_{22}\; \ldots\; i_{2\mu_2}) \cdots (i_{r1}\; i_{r2}\; \ldots\; i_{r\mu_r})$$

を考える．これに対して

$$(i_{11}\; i_{12}\; \ldots\; i_{1\mu_1}\; i_{21}\; i_{22}\; \ldots\; i_{2\mu_2}\; \ldots\; i_{r1}\; i_{r2}\; \ldots\; i_{r\mu_r}).$$

という列の転倒数が偶数のとき $f(\sigma) = 1$ とおき，奇数のとき $f(\sigma) = -1$ とおく．この $f(\sigma)$ の定義が well defined であることは $\mu \in P_{\text{strict,odd}}(n)$ であることからわかる．この f を使っ

て $C_\mu^\pm$ を

$$C_\mu^\pm = \{\sigma \in C_\mu \mid f(\sigma) = \pm 1\}$$

と定めると次がなりたつ:

命題 3.1. $\mu \in P_{\text{strict,odd}}(n)$ に対して, C_μ^+ と C_μ^- は $\mathfrak{A}_n$ の共役類で, さらに $C_\mu = C_\mu^+ \sqcup C_\mu^-$ がなりたつ.

3.3. 交代群 $\mathfrak{A}_n$ の既約表現と既約指標について復習する.

π^λ を $\lambda \in P(n)$ に対応する対称群 $\mathfrak{S}_n$ の既約表現とする. この $\mathfrak{S}_n$ の既約表現 π^λ を $\mathfrak{A}_n$ に制限するとどうなるだろうか.

まず $\lambda \notin P_{\text{self-conj}}(n)$ のときは, π^λ の $\mathfrak{A}_n$ への制限はふたたび既約になる. この $\mathfrak{A}_n$ の既約表現の指標を ψ^λ と表そう. $\chi^{\lambda'}(\sigma) = \mathrm{sgn}(\sigma)\chi^\lambda(\sigma)$ だから $\psi^\lambda = \psi^{\lambda'}$ がなりたつ.

一方 $\lambda \in P_{\text{self-conj}}(n)$ のときは, π^λ の $\mathfrak{A}_n$ への制限は二つの既約表現の直和になる. この二つの既約表現の指標 $\psi^{\lambda\pm}$ は次のように表せる:

$$\psi^{\lambda\pm}(\sigma) = \begin{cases} \frac{1}{2}((-)^{m(\lambda)} \pm i^{m(\lambda)}\sqrt{\mu_1 \cdots \mu_r}), & \sigma \in C_\mu^+, \\ \frac{1}{2}((-)^{m(\lambda)} \mp i^{m(\lambda)}\sqrt{\mu_1 \cdots \mu_r}), & \sigma \in C_\mu^-, \\ \frac{1}{2}\chi^\lambda(\sigma), & \sigma \notin C_\mu. \end{cases}$$

ただし $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) = h(\lambda)$ であり, i は虚数単位を表す. もちろん $\chi^\lambda(\sigma) = \psi^{\lambda+}(\sigma) + \psi^{\lambda-}(\sigma)$ がなりたつ. 型が $P_{\text{strict,odd}}(n)$ に属する $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対しては, 次がなりたつことも記しておく:

$$\chi^\lambda(\sigma) = \begin{cases} (-)^{m(\lambda)}, & \sigma \in C_\mu, \\ 0, & \sigma \notin C_\mu. \end{cases}$$

3.4. これで $\chi^{*\lambda}$ を定義する準備が整った. $\lambda \in P_{\text{self-conj}}(n)$ に対して, $\chi^{*\lambda}\colon \mathfrak{S}_n \to \mathbb{C}$ を

$$\chi^{*\lambda}(\sigma) = \begin{cases} \psi^{\lambda+}(\sigma) - \psi^{\lambda-}(\sigma), & \sigma \in \mathfrak{A}_n, \\ 0, & \sigma \notin \mathfrak{A}_n \end{cases}$$

と定める. すると $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) = h(\lambda)$ として次がなりたつ:

$$\chi^{*\lambda}(\sigma) = \begin{cases} \pm i^{m(\lambda)}\sqrt{\mu_1 \cdots \mu_r}, & \sigma \in C_\mu^\pm, \\ 0, & \sigma \notin C_\mu^\pm. \end{cases} \tag{3.1}$$

この函数 $\chi^{*\lambda}$ に対しては,

$$\chi^{*\lambda}(\sigma^{-1}) = \overline{\chi^{*\lambda}(\sigma)} = \chi^\lambda(\sigma)\chi^{*\lambda}(\sigma), \qquad \chi^{*\lambda}(\tau\sigma\tau^{-1}) = \mathrm{sgn}(\tau)\chi^{*\lambda}(\sigma) \tag{3.2}$$

や

$$(3.3)\quad \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\chi^{\lambda}(\sigma\tau^{-1})\chi^{\mu}(\tau)=\delta_{\lambda\mu}\frac{\chi^{\lambda}(\sigma)}{\chi^{\lambda}(1)},\qquad \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\chi^{*\lambda}(\sigma\tau^{-1})\chi^{*\mu}(\tau)=\delta_{\lambda\mu}\frac{\chi^{\lambda}(\sigma)}{\chi^{\lambda}(1)},$$
$$\frac{1}{|\mathfrak{S}_n|}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\chi^{*\lambda}(\sigma\tau^{-1})\chi^{\mu}(\tau)=\delta_{\lambda\mu}\frac{\chi^{*\lambda}(\sigma)}{\chi^{\lambda}(1)},\qquad \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|}\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\chi^{\lambda}(\sigma\tau^{-1})\chi^{*\mu}(\tau)=\delta_{\lambda\mu}\frac{\chi^{*\lambda}(\sigma)}{\chi^{\lambda}(1)}$$

といった関係式がなりたつ（ただし χ^* の上付き添字は自己共役とする）．さらに $\{\chi^{*\lambda}\,|\,\lambda\in P_{\text{self-conj}}(n)\}$ は次のベクトル空間の直交基底をなす:

$$\bigl\{\chi\colon\mathfrak{S}_n\to\mathbb{C}\,\big|\,\text{任意の}\ \sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n\ \text{に対して}\ \chi(\tau\sigma\tau^{-1})=\operatorname{sgn}(\tau)\chi(\sigma)\bigr\}.$$

これらの性質は $\psi^{\lambda\pm}$ が $\mathfrak{A}_n$ の既約指標であることからすぐにわかる．

4. Twisted immanant

Twisted immanant を導入して, その基本的な性質を見る．

4.1. $\lambda\in P_{\text{self-conj}}(n)$ と $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le n}\in\operatorname{Mat}_{n,n}(\mathcal{A})$ に対して, $\operatorname{imm}^{*\lambda}A$ を次で定める:

$$\operatorname{imm}^{*\lambda}A=\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\chi^{*\lambda}(\tau)a_{1\tau(1)}\cdots a_{n\tau(n)}.$$

A の成分が可換のときには, これは次のような様々な和で表せる:

$$\begin{aligned}\operatorname{imm}^{*\lambda}A&=\sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n}\chi^{*\lambda}(\tau)a_{1\tau(1)}\cdots a_{n\tau(n)}\\&=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\chi^{*\lambda}(\sigma^{-1})a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}\\&=\frac{1}{n!}\sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n}\chi^{*\lambda}(\tau\sigma^{-1})a_{\sigma(1)\tau(1)}\cdots a_{\sigma(p)\tau(p)}\\&=\frac{\chi^{\lambda}(1)}{n!}\sum_{\sigma;\tau\in\mathfrak{S}_n}\chi^{*\lambda}(\tau)\chi^{\lambda}(\sigma^{-1})a_{\sigma(1)\tau(1)}\cdots a_{\sigma(p)\tau(p)}\\&=\frac{\chi^{\lambda}(1)}{n!}\sum_{\sigma,\tau\in\mathfrak{S}_n}\chi^{\lambda}(\tau)\chi^{*\lambda}(\sigma^{-1})a_{\sigma(1)\tau(1)}\cdots a_{\sigma(p)\tau(p)}.\end{aligned}$$

この等式は A の成分が互いに反可換のときもなりたつ．これは $\sigma\notin\mathfrak{A}_n$ のとき $\chi^{*\lambda}(\sigma)=0$ となることからわかる．しかし, 成分が互いに可換でもなく, 互いに反可換でもないときには, これらの和は一般には等しくない．第一と第二の和を対比させるときは, 次のよう

に書くことにする:

$$\text{row-imm}^{*\lambda} A = \sum_{\tau\in\mathfrak{S}_n} \chi^{*\lambda}(\tau) a_{1\tau(1)}\cdots a_{n\tau(n)},$$
$$\text{column-imm}^{*\lambda} A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \chi^{*\lambda}(\sigma^{-1}) a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}.$$

4.2. 行列成分が互いに可換のときには, 次のような Cauchy–Binet 型関係式がなりたつ. これは (3.3) を利用して命題 2.2 と同様に証明できる:

定理 4.1. $A \in \mathrm{Mat}_{L,M}(\mathcal{A})$, $B \in \mathrm{Mat}_{M,N}(\mathcal{A})$ とする. A と B の成分がすべて互いに可換のとき, $I \in [L]^n$ と $K \in [N]^n$ に対して次がなりたつ:

$$\mathrm{imm}^{\lambda}(AB)_{IK} = \frac{\chi^{\lambda}(1)}{n!} \sum_{J\in[M]^n} \mathrm{imm}^{*\lambda} A_{IJ}\, \mathrm{imm}^{*\lambda} B_{JK},$$
$$\mathrm{imm}^{*\lambda}(AB)_{IK} = \frac{\chi^{\lambda}(1)}{n!} \sum_{J\in[M]^n} \mathrm{imm}^{\lambda} A_{IJ}\, \mathrm{imm}^{*\lambda} B_{JK}$$
$$= \frac{\chi^{\lambda}(1)}{n!} \sum_{J\in[M]^n} \mathrm{imm}^{*\lambda} A_{IJ}\, \mathrm{imm}^{\lambda} B_{JK}.$$

4.3. $A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{C})$ に対しては次がなりたつ:

$$\mathrm{imm}^{*\lambda} A^* = \overline{\mathrm{imm}^{*\lambda} A}.$$

これは (3.2) の最初の等式からすぐにわかる. ただし A^* は A の随伴行列である (つまり $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ に対して $A^* = (\bar{a}_{ji})_{1\le i,j\le n}$ とおく).

4.4. Twisted immanant には行や列の入れ替えに関するある種の不変性もある. n 次正方行列 A と $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して, A の成分が互いに可換のときは

$$\mathrm{imm}^{*\lambda} A^{\sigma} = \mathrm{sgn}(\sigma)\, \mathrm{imm}^{*\lambda} A \tag{4.1}$$

が, A の成分が互いに反可換のときは

$$\mathrm{imm}^{*\lambda} A^{\sigma} = \mathrm{imm}^{*\lambda} A$$

がなりたつ. これらの関係式は (3.2) の二番目の等式からすぐにわかる.

4.5. Twisted immanant に対しても imm^{λ}_n に当たるものを考えよう:

$$\mathrm{imm}^{*\lambda}_n A = \frac{1}{n!} \sum_{I\in[N]^n} \text{row-imm}^{*\lambda} A_{II} = \frac{1}{n!} \sum_{I\in[N]^n} \text{column-imm}^{*\lambda} A_{II}.$$

ただし $\lambda \in P_{\text{self-conj}}(n)$, $A \in \mathrm{Mat}_{N,N}(\mathcal{A})$ とする. 第二の等号は直接的な計算でわかる. この函数は $GL_N(\mathbb{C})$ の conjugation による作用で不変である:

定理 4.2. 任意の $g \in GL_N(\mathbb{C})$ に対して $\mathrm{imm}_n^{*\lambda}\, gAg^{-1} = \mathrm{imm}_n^{*\lambda} A$ がなりたつ.

ただし函数 $\mathrm{imm}_n^{*\lambda}$ は行列成分が可換な場合には（そして $n > 1$ なら）恒等的に 0 である. 実際に (4.1) から, 命題 2.5 と似た次がなりたつ:

命題 4.3. A の成分が互いに可換のとき, $n > 1$ なら $\mathrm{imm}_n^{*\lambda} A = 0$ となる.

5. Twisted immanant と反可換成分の行列

$\mathrm{imm}_n^{*\lambda}$ は, 成分が可換な行列に対してはつまらない函数だったが, 成分が反可換な行列に対しては興味深い性質をもつ. まず次のようなトレースとの関係がある:

定理 5.1. $\lambda \in P_{\text{self-conj}}(n)$ に対して, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) = h(\lambda)$ とおく. すると成分が互いに反可換な行列 $A \in \mathrm{Mat}_{N,N}(\mathcal{A})$ に対して, 次がなりたつ:

$$\mathrm{tr}(A^{\mu_1}) \cdots \mathrm{tr}(A^{\mu_r}) = i^{-(n-r)/2} \sqrt{\mu_1 \cdots \mu_r}\, \mathrm{imm}_n^{*\lambda} A.$$

とくに $\lambda = (k+1, 1^k)$ の場合を考えると, 次がなりたつ:

$$\mathrm{tr}(A^{2k+1}) = i^{-k} \sqrt{2k+1}\, \mathrm{imm}_{2k+1}^{*(k+1,1^k)} A.$$

$\mathrm{tr}(A^k)$ については次の事実に注意する（証明は [R] を参照）:

補題 5.2. 成分が互いに反可換な正方行列 A に対して $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(A^4) = \mathrm{tr}(A^6) = \cdots = 0$ となる.

定理 5.1 の証明. A の (i,j) 成分を a_{ij} と表すと, 次がなりたつ:

$$\begin{aligned}
\mathrm{imm}_n^{*\lambda} A &= \frac{1}{n!} \sum_{I \in [N]^n} \text{row-imm}^{*\lambda} A_{II} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{I \in [N]^n} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \chi^{*\lambda}(\tau) a_{i_1 i_{\tau(1)}} \cdots a_{i_n i_{\tau(n)}} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \chi^{*\lambda}(\tau) \sum_{I \in [N]^n} a_{i_1 i_{\tau(1)}} \cdots a_{i_n i_{\tau(n)}}.
\end{aligned}$$

ただし $I = (i_1, \ldots, i_n)$ とする. τ の型を $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r)$ と表すと,

$$\sum_{I \in [N]^n} a_{i_1 i_{\tau(1)}} \cdots a_{i_n i_{\tau(n)}} = f(\tau)\, \mathrm{tr}(A^{\mu_1}) \cdots \mathrm{tr}(A^{\mu_r}).$$

補題 5.2 から $\mu \notin P_{\text{strict,odd}}(n)$ ならこの値は 0 になる. $\mu \in P_{\text{strict,odd}}(n)$ のとき $|C_\mu| = n!/z_\mu = n!/\mu_1 \cdots \mu_r$ となることと (3.1) から定理の主張を得る. $\square$

6. $\Lambda(V \otimes V^*)$ における $GL(V)$-不変元

前節で見たように, twisted immanant は反可換成分の行列と相性が良い. この節では, さらに前進して外積代数 $\Lambda(V \otimes V^*)$ の $GL(V)$-不変元の記述について考えよう.

V を N 次元の複素ベクトル空間として, 外積代数 $\Lambda(V \otimes V^*)$ について考える. $e_1, \dots, e_N$ を V の基底, $e_1^*, \dots, e_N^*$ をその双対基底として, 次のような $\Lambda(V \otimes V^*)$ の元を考える:

$$a_{ij} = e_i \otimes e_j^* \in V \otimes V^* \subset \Lambda(V \otimes V^*).$$

この a_{ij} を成分とする $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le N} \in \mathrm{Mat}_{N,N}(\Lambda(V \otimes V^*))$ という行列を考える. この成分が互いに反可換な行列 A を用いて, $\Lambda(V \otimes V^*)$ の $GL(V)$-不変元が記述できる（これはベクトル不変式に関する不変式論の第一基本定理からの帰結である. 証明は [I2] を参照のこと）:

定理 6.1. 次は $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ を（$\mathbb{C}$ 代数として）生成する:

$$\mathrm{tr}(A),\ \mathrm{tr}(A^3),\ \dots,\ \mathrm{tr}(A^{2N-3}),\ \mathrm{tr}(A^{2N-1}).$$

またこれらは互いに反可換であり, この反可換性以外に関係式をもたない. よって次は $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ のベクトル空間としての基底となる:

$$\left\{ \mathrm{tr}(A^{\mu_1}) \cdots \mathrm{tr}(A^{\mu_r}) \,\middle|\, (\mu_1, \dots, \mu_r) \in P_{\text{strict,odd}},\ \mu_1 < 2N \right\}.$$

これと定理 6.1 を合わせると次を得る:

定理 6.2. 次は $\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ のベクトル空間としての基底である:

$$\left\{ \mathrm{imm}^{*\lambda}_{|\lambda|} A \,\middle|\, \lambda \in P_{\text{self-conj}},\ \lambda_1 \le N \right\}.$$

ここで $|\lambda|$ は λ のサイズである.

前節と今節の結果は, 次の Cayley–Hamilton 型定理とも関係が深い（[BPS], [P], [I2]; また [DPP], [D] も参照のこと）:

定理 6.3. 次がなりたつ:

$$NA^{2N-1} - \mathrm{tr}(A)A^{2N-2} - \mathrm{tr}(A^3)A^{2N-4} - \cdots - \mathrm{tr}(A^{2N-3})A^2 - \mathrm{tr}(A^{2N-1})A^0 = 0.$$

この関係式で $\mathrm{tr}(A), \mathrm{tr}(A^3), \dots, \mathrm{tr}(A^{2N-1})$ は固有多項式の係数の役割を果たしている. そこでこれらを何らかの行列式のようなかたちで表したくなるが, 実際にこれを twisted immanant という行列式に似た函数を用いて実行したのが定理 5.1 というわけである. このことがこの研究の動機の一つである.

序文でも述べたように, これらの結果は Amitsur–Levitzki 定理とも関係が深い. とくに Kostant の論文 [K1] との関係は重要である. この論文で Kostant は Amitsur–Levitzki 定

理を Lie 環 $\mathfrak{gl}(V)$ のコホモロジー環（$\Lambda(V \otimes V^*)^{GL(V)}$ と同型）と函数 $\chi^{*\lambda}$ を使って証明している．つまり本研究の基本的なアイデアはこの Kostant の論文に登場しているのである．

7. Cauchy 型の関係式

Twisted immanant に対しては Cauchy 関係式の類似もなりたつ．

まず対称多項式に関する Cauchy 関係式を復習しておく ([Ma]):

命題 7.1. 次がなりたつ（ただし r は μ の長さである）：

$$\begin{aligned}
\prod_{1 \leq i \leq M} \prod_{1 \leq j \leq N} \frac{1}{1 - x_i y_j} &= \sum_{\lambda \in P} s_\lambda(x_1, \ldots, x_M) s_\lambda(y_1, \ldots, y_N) \\
&= \sum_{\mu \in P} \frac{1}{z_\mu} p_\mu(x_1, \ldots, x_M) p_\mu(y_1, \ldots, y_N), \\
\prod_{1 \leq i \leq M} \prod_{1 \leq j \leq N} (1 + x_i y_j) &= \sum_{\lambda \in P} s_\lambda(x_1, \ldots, x_M) s_{\lambda'}(y_1, \ldots, y_N) \\
&= \sum_{\mu \in P} (-)^{n-r} \frac{1}{z_\mu} p_\mu(x_1, \ldots, x_M) p_\mu(y_1, \ldots, y_N).
\end{aligned}$$

これは次のような行列の等式に書き直せる:

命題 7.2. $A \in \mathrm{Mat}_{M,M}(\mathcal{A})$, $B \in \mathrm{Mat}_{N,N}(\mathcal{A})$ とする．A と B の成分がすべて互いに可換のとき, 次がなりたつ:

$$\begin{aligned}
\mathrm{per}_n(A \otimes B) &= \sum_{\lambda \in P(n)} \mathrm{imm}_n^\lambda A \ \mathrm{imm}_n^\lambda B \\
&= \sum_{\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \in P(n)} \frac{1}{z_\mu} \mathrm{tr}(A^{\mu_1}) \cdots \mathrm{tr}(A^{\mu_r}) \, \mathrm{tr}(B^{\mu_1}) \cdots \mathrm{tr}(B^{\mu_r}), \\
\det_n(A \otimes B) &= \sum_{\lambda \in P(n)} \mathrm{imm}_n^\lambda A \ \mathrm{imm}_n^{\lambda'} B \\
&= \sum_{\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_r) \in P(n)} (-)^{n-r} \frac{1}{z_\mu} \mathrm{tr}(A^{\mu_1}) \cdots \mathrm{tr}(A^{\mu_r}) \, \mathrm{tr}(B^{\mu_1}) \cdots \mathrm{tr}(B^{\mu_r}).
\end{aligned}$$

ただし $\det_n = \mathrm{imm}_n^{(1^n)}$, $\mathrm{per}_n = \mathrm{imm}_n^{(n)}$ とおく．また $A \otimes B$ は Kronecker 積である．つまり $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq M}$, $B = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq N}$ に対して $A \otimes B = (a_{ij} b_{kl})_{(i,k),(j,l) \in [M] \times [N]}$ とおく．

この命題 7.2 は命題 7.1 から導ける．これは命題 2.4 とそれに似た次の関係に注意すればわかる（ここで A は N 次の複素正方行列で, $x_1, \ldots, x_N$ は A の固有値）：

$$\mathrm{tr}(A^k) = p_k(x_1, \ldots, x_N).$$

反可換な枠組みで, 命題 7.2 の類似を考えよう．次の条件をみたす行列 $A \in \mathrm{Mat}_{M,M}(\mathcal{A})$, $B \in \mathrm{Mat}_{N,N}(\mathcal{A})$ を考える（このとき Knonecker 積 $A \otimes B$ の成分は互いに可換）：

(i) A の成分は互いに反可換;

(ii) B の成分は互いに反可換;

(iii) A の成分は B の成分と互いに可換.

この行列 A, B に対して次のような命題 7.2 の類似がなりたつ:

定理 7.3. 次がなりたつ:

$$\begin{aligned}\det{}_n(A\otimes B) &= \operatorname{per}_n(A\otimes B)\\ &= \sum_{\lambda\in P_{\text{self-conj}}(n)} (-)^{m(\lambda)}\operatorname{imm}_n^{*\lambda} A\ \operatorname{imm}_n^{*\lambda} B\\ &= \sum_{(\mu_1,\dots,\mu_r)\in P_{\text{strict,odd}}(n)} \frac{1}{\mu_1\cdots\mu_r}\operatorname{tr}(A^{\mu_1})\cdots\operatorname{tr}(A^{\mu_r})\operatorname{tr}(B^{\mu_1})\cdots\operatorname{tr}(B^{\mu_r}).\end{aligned}$$

注意. 条件 (iii) は

(iii′) A の成分は B の成分と反可換

という条件に置き換えても大差はない. 実際 (i), (ii), (iii′) という条件の下で次がなりたつ:

$$\begin{aligned}\det{}_n(A\otimes B) &= \operatorname{per}_n(A\otimes B)\\ &= \varepsilon_n \sum_{\lambda\in P_{\text{self-conj}}(n)} (-)^{m(\lambda)}\operatorname{imm}_n^{*\lambda} A\ \operatorname{imm}_n^{*\lambda} B\\ &= \varepsilon_n \sum_{(\mu_1,\dots,\mu_r)\in P_{\text{strict,odd}}(n)} \frac{1}{\mu_1\cdots\mu_r}\operatorname{tr}(A^{\mu_1})\cdots\operatorname{tr}(A^{\mu_r})\operatorname{tr}(B^{\mu_1})\cdots\operatorname{tr}(B^{\mu_r}).\end{aligned}$$

ただし ε_n は次で定める:

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0,1 \mod 4,\\ -1, & n = 2,3 \mod 4.\end{cases}$$

References

[AL] A. S. Amitsur and J. Levitzki, *Minimal identities for algebras,* Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 449–463.

[BPS] M. Brešar, C. Procesi, and Š. Špenko, *Quasi-identities on matrices and the Cayley-Hamilton polynomial,* arXiv:1212.4597v3.

[DPP] C. De Concini, P. Papi, and C. Procesi, *The adjoint representation inside the exterior algebra of a simple Lie algebra,* Adv. Math. **280** (2015), 21–46.

[D] S. Dolce, *On certain modules of covariants in exterior algebras,* arXiv:1404.2855v4, to appear in Algebr. Represent. Theory.

[F] G. Frobenius, Über die Charaktere der alternierenden Gruppe, *Sitzgsber. preuss. Akad. Wiss.* 1901, pp.303–315.

[I1] M. Itoh, *Extensions of the tensor algebra and their applications,* Comm. Algebra **40** (2012), 3442–3493.

[I2] ———, *Invariant theory in exterior algebras and Amitsur–Levitzki type theorems,* arXiv:1404.1980v2.

[I3] ———, *Twisted immanant and matrices with anticommuting entries,* arXiv:1504.04689.

[JK] G. James and A. Kerber, The representation theory of the symmetric group, Encyclopedia of mathematics and its applications, vol.16, Addison-Wesley, 1981.

[K1] B. Kostant, *A theorem of Frobenius, a theorem of Amitsur-Levitski and cohomology theory,* J. Math. Mech. **7** (1958), 237–264.

[K2] ———, *A Lie algebra generalization of the Amitsur-Levitski theorem,* Adv. Math. **40** (1981), 155–175.

[Ma] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials. Second edition, Oxford University Press, New York, 1995.

[Me] E. Meinrenken, Clifford algebras and Lie theory, Springer, 2013.

[P] C. Procesi, *On the theorem of Amitsur–Levitzki,* Israel J. Math. **207** (2015), 151–154.

[R] S. Rosset, *A new proof of the Amitsur–Levitski identity,* Israel J. Math. **23** (1976), no. 2, 187–188.