数理解析研究所講究録
第 1978 巻 2015 年 28-36

動的幾何ソフトによる図形認識力の育成

静岡県立磐田南高等学校　入谷 昭 (Akira Iritani)
Iwata Minami Highschool

1　はじめに

「数学は紙と鉛筆があればできる」とよく言われる．しかし，それは「誰にでも」できるわけではない．例えば,「辺の長さが 2 である正四面体に内接する球の半径」を求めるにあたっては，正四面体と内接球の位置関係が把握できる必要があるが，この問題が教科書に登場する高校 1 年生の多くは，計算に必要な図を描くことができないのが現状である．また，図形の変化を動的にイメージすることが苦手で，平面での軌跡の問題では,「条件を満たしながら点が動く」という状況を動的に捉えることができない生徒が多い．これらを説明しようとすると，黒板とチョークではどうしても限界がある．空間図形では実際に模型を作ったりしているが，問題ごとに模型が作れるわけでもない．

そこで，動的幾何ソフトの Cinderella.2 を用いて，図形認識力を育成するための教材開発を行った．プログラミング言語 Cindyscript を用いれば状況に応じたインタラクティブな教材をつくることができる．これにより，生徒の図形認識力がどう変わるかを検証するのが狙いである．

2　教材の例と効果

静岡県立磐田南高等学校 3 年生を対象に，大学入試問題の内容把握を目的とした課外講座を週 1 回のペースで実施した． 3 年生の課外講座を対象にしたのは，電子黒板の搬入や題材の選択などで，通常の授業よりも自由度が高いからである．

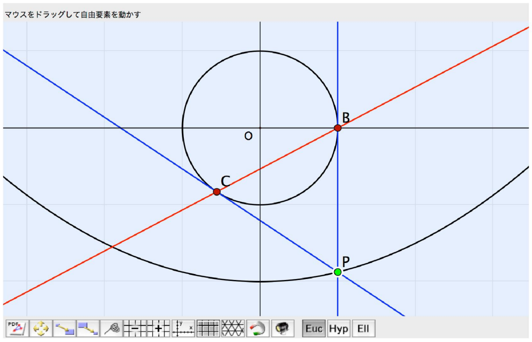
授業では，まず問題を読んで各自に作図をさせ，その後教室の前方に配置した電子黒板で確認・解説を行った．内容は 2 年生までに学ぶ図形・ベクトルなどで，基本的な内容についてはすでに履修済みである．そこで，大学入試問題の中でも教科書の例題レベルより発展した内容のものを主に扱った．電子黒板で表示するとき，インタラクティブに図を動かすことのできる動的ソフトウェアが効果を発揮する．条件やパラメータを手動で変化させたり，アニメーションで軌跡を描いていくことができる．

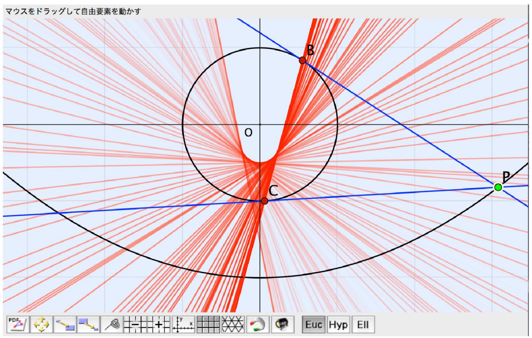
2.1 極線と包絡線

---

xy 平面上に，曲線 C_1: $y=\dfrac{x^2}{8}-2$ と，原点を中心とする半径 1 の円 C_2 がある．曲線 C_1 上の点 $P\left(t, \dfrac{t^2}{8}-2\right)$ から C_2 へ引いた 2 本の接線が，それぞれ点 B, C で C_2 と接する．B, C を通る直線 ℓ は，t の値に関わらず，ある円に接する．

円の極線と包絡線の問題である．高等学校の教科書には「極線」や「包絡線」の用語は出てこないが，用語とともにその概念を知っておくことは有用である．その用語によって図形が頭の中で形成されるからである．しかし，単に暗記するのでは理解にはつながらない．黒板とチョークだけの講義では，下図左の図を描き，指示棒などを利用して放物線上の点 P を動かしたときの 3 本の直線の動きを示すのだが，3 本を同時に動かすのは難しい．これらを Cinderella で作図し，点 P をドラッグして動かし，直線の動いた後を「足跡」表示機能によって，右図のように表示することができる．このとき，中央付近にできる包絡線が，問題の「ある円」であり,「すべての直線 (極線) に接する曲線（ここでは円)」というイメージが形成される．





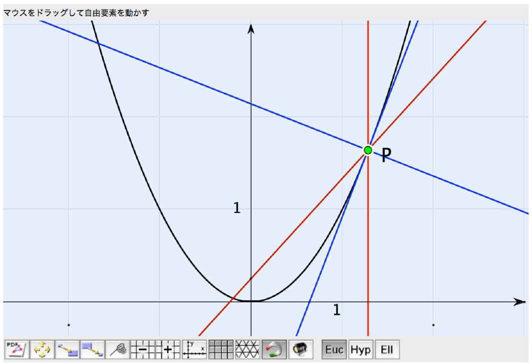
ここで，問題文の「B, C を通る直線 ℓ は，t の値に関わらず，ある円に接する.」という部分を,「点 P を動かしたとき，B, C を通る直線 ℓ は，常にある円に接する.」と読み替え，動的にとらえることが重要であり，これにより図形の認識力が強化される．点 P をドラッグすることにより図形が動的に変化していく様子を見せることが，状況の把握力につながる．

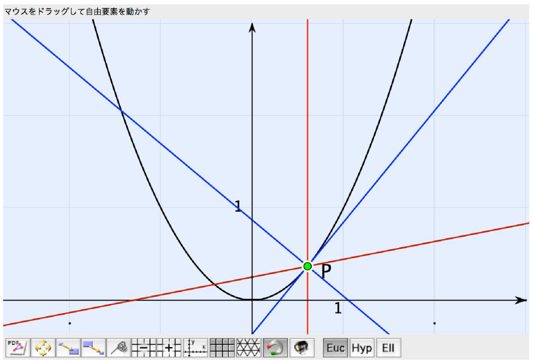
2.2　放物線の焦点

放物線 C : $y = x^2$ に対して，C 上の点 $\mathrm{P}(a, a^2)$ を通り，P における C の接線に直交する直線 ℓ がある．$a \neq 0$ のとき，直線 $x = a$ を ℓ に関して対称に折り返して得られる直線 m は，a の値によらず定点 F を通る．

放物線の焦点の問題であり，2 次曲線としての放物線の準線と焦点の知識があれば，問題文から作図した時点で答は出る．放物線の焦点に関する問題は，文の表現にいろいろなバリエーションがあるが，ここでは，履修範囲を数学 II としており，2 次曲線は数学 III で学ぶので，数学 III を履修していない文型コースの生徒は 2 次曲線としての放物線の準線と焦点は知らないことになっている．しかし，放物線の「焦点」の物理的な意味，すなわち，接線と法線，曲面における光の反射についての知識は常識としても知っておきたい内容であり，その意味さえ知っていれば，結果はわかっているのであとは計算だけの問題となる．その「焦点」の意味を説明するとき，どこに入射光をとっても，法線に関して入射角と反射角が等しくなるように，つまり対称に反射すると定点を通ることを，インタラクティブに動かして見せることが，イメージの形成に役に立つ．

Cinderella では，この問題で必要な図は全て作図ツールで描くことができる．プログラミング言語 Cindyscript を用いれば，アニメーションもできるが，この問題ではそこまでは必要ないだろう．次の図は，P の位置を動かした様子を示す．





2.3　円に関する鏡映

xy 平面において，原点 O を通る半径 $r(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする．O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件 (a)，(b) で定まる点 Q を考える．

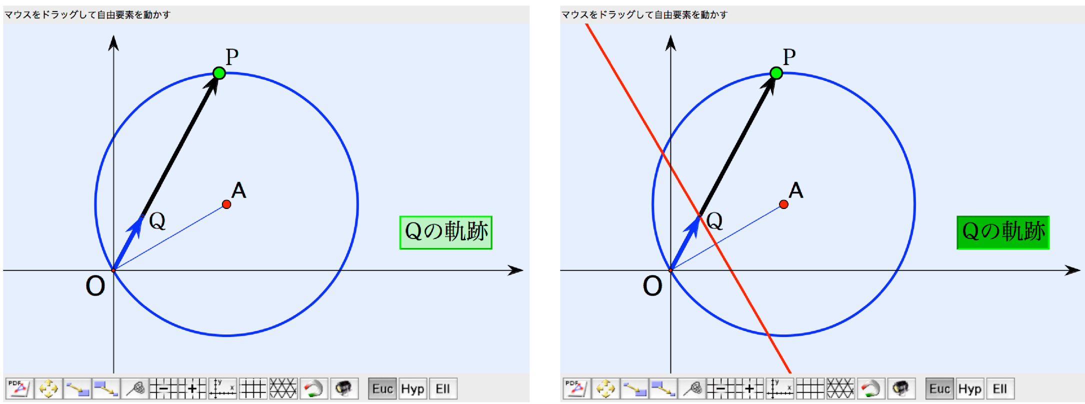
(a) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ．

(b) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 1$

点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動く．

円に関する鏡映（反転）は，現在の指導要領に基づく教科書では，発展内容あるいは「研究」として複素数平面の章に掲載されている．ただし，無限遠点についての言及などはなく，中途半端な内容となっている．単に円や直線の像を求めるのであれば複素数を用いなくても計算ができ，実際，数学 II までの試験範囲として過去に何度も出題されている．上記がその一例である．問題表現はこれに限らずいろいろある．そこで，やはり「円に関する鏡映」もしくは「反転」という言葉とともに，状況を知っておくのが望ましいと思われるが，鏡映による像は，計算はできてもイメージがしにくいものである．

そこで，まずは問題に即した図で状況を理解させ，計算を行って結果を出したのち，「円に関する鏡映」という言葉を紹介するとともに，点や線分，円の像についていくつかの例を示すこととした．まず，下図左の図で，点 P をドラッグすると，点 Q が動く．「Q の軌跡」というボタンを押すと，右図のように Q の軌跡が表示される．

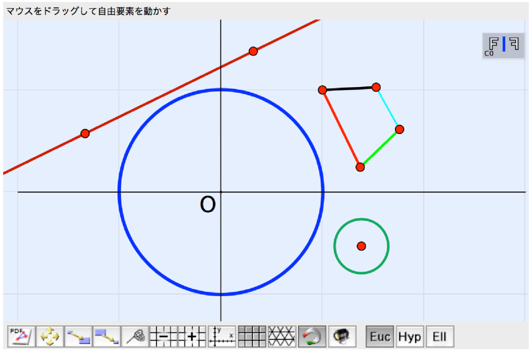


円などの図形は，Cinderella の作図ツールで描き，ボタンを押したときの軌跡の直線の表示/非表示のみを Cindyscript で記述する．それも，以下のわずか 3 行である．スクリプト中，Text0 がボタンで，E0 は軌跡の直線である．E0 は，Cinderella の作図ツールの「軌跡」で点 Q の軌跡として作図できるので，スクリプトで描く必要はない．

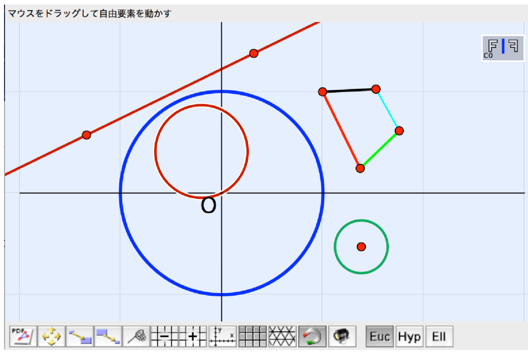
```
nv=P.xy/|P.xy|;
Q.xy=nv/|P.xy|;
if(Text0.pressed,E0.visible=true,E0.visible=false);
```

問題をひと通り解いたあとで見せたのが次の図である．図は，Cinderella の作図機能だけで作ることができる．

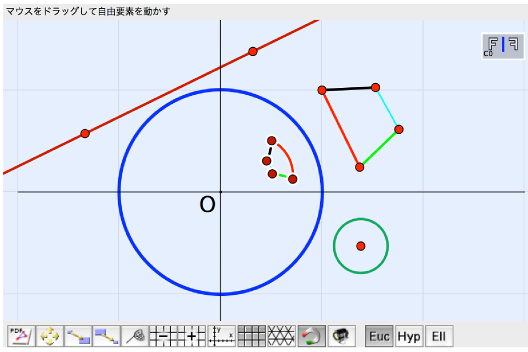
右上のボタンが鏡映の像を作るボタン



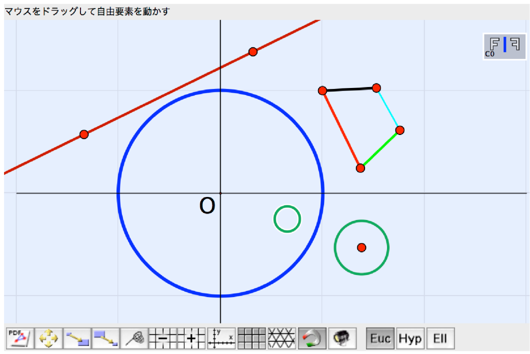
直線の像



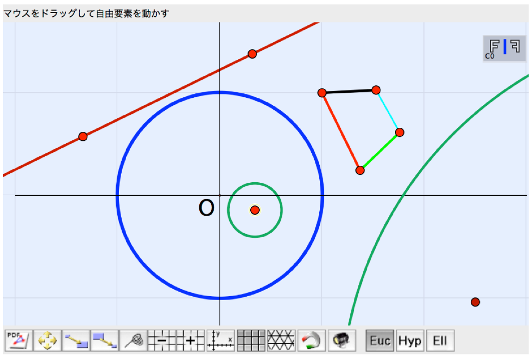
台形の像



円の像



円を単位円の中に入れると像は単位円の外になる．



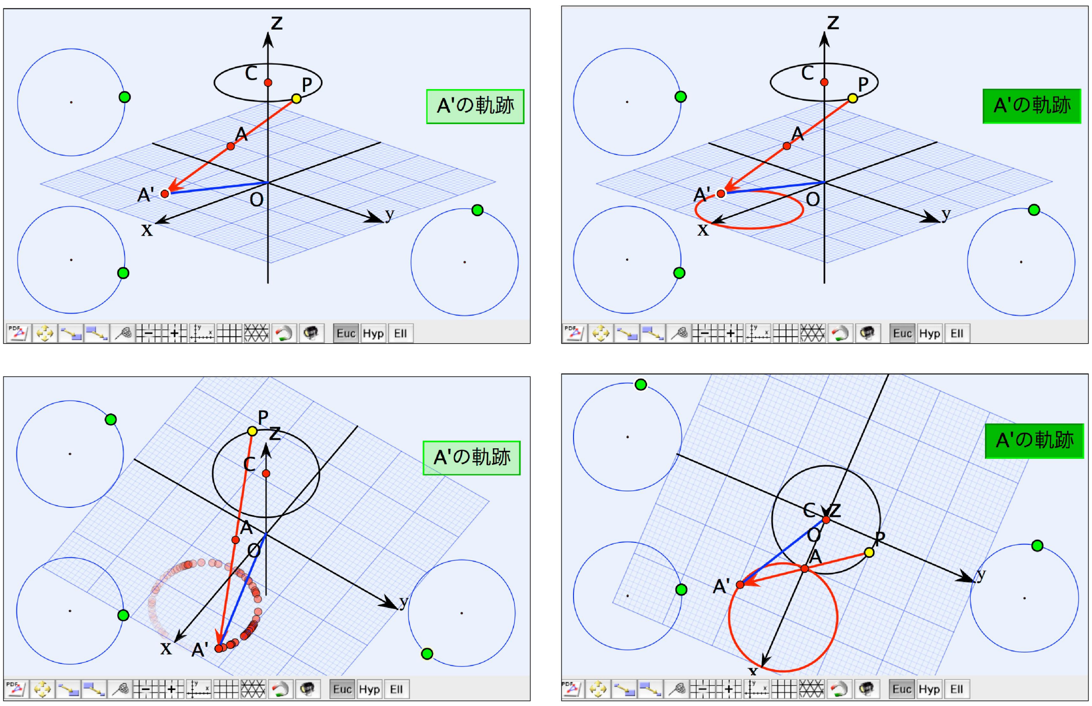
最後の例では，円の中心が原点に近づくにつれ，中心の像と円の像の位置関係が逆転する．点はどんどん遠ざかり，原点に一致したときは無限遠点という，という説明をすると，生徒は興味深げに説明を聞いていた．

2.4 空間から平面への射影

座標空間内において，２点 O(0, 0, 0)，A(1, 0, 1) を端点とする線分 OA，平面 $z = 2$ 上に点 (0, 0, 2) を中心とする半径 1 の円周 C，および C 上に動点 P がある．直線 PA と xy 平面との交点を A’ とするとき，線分 OA’ が動いてできる xy 平面上の図形．

高校の教科書で扱われる円は,「球面と xy 平面とが交わってできる円」程度で，平面 $z = 2$ 上の円のようなものは登場しない.「平面 $z = 2$」がイメージできて，さらにその上の円周上の点から xy 平面への射影となると図を書くだけでも大変である．

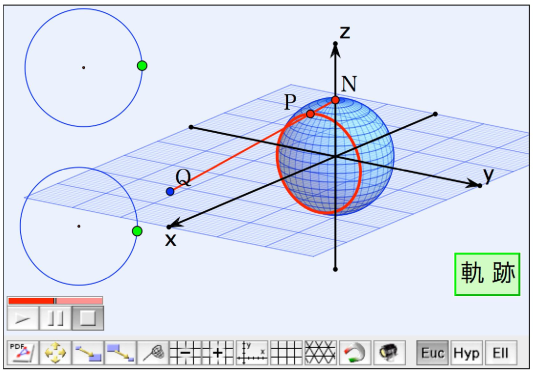
下図は，Cinderella で空間図形を描くための関数群を用意した SpaceCindy (自作) を用いて描いた図である．円形のスライダが３つあり，左の２つは SpaceCindy に標準的に備わっているもので，これにより視点移動ができる．右は本問用に用意したスライダで，動点 P を動かすことができる．視点移動によりこの図を立体的に見ることができるようになり，その上で，動点 P を動かすことで，平面 $z = 2$ 上の円周上を動かしているイメージができることが狙いである．点の「足跡」を表示すると下段左のようになり，「軌跡表示」ボタンを押すと右のように点 A’ の軌跡が表示される．

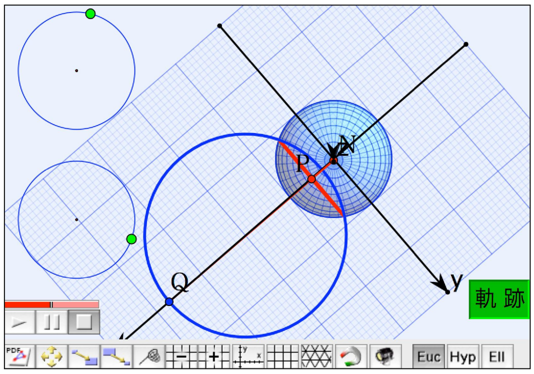


2.5　立体射影

座標空間内において，原点を中心とする半径 1 の球面を S とし，その上に点 $\mathrm{N}(0,0,1)$ をとる．球面 S 上の N と異なる点 $\mathrm{P}(p,q,r)$ に対して，直線 NP と xy 平面との交点を $\mathrm{Q}(u,v,0)$ とする．yz 平面を x 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動して得られる平面を T とし，点 P が球面 S と平面 T との交線の上を動くとき，対応する点 Q が xy 平面上に描く軌跡．

立体射影で，大学入試問題としてよく出題されている．平面 T が，$z=\frac{1}{2}$ であれば前問と同様になるが，こちらは平面 $y=\frac{1}{2}$ 上の円であり，難度が高い．手書きの図で，楕円になりそうだと予想できれば上出来だろう．前問同様，SpaceCindy を用いて図を描き，視点を移動したり軌跡を表示したりして，空間内での点の動きをイメージ化する．まずは，下図左の状態で，ベクトルを使った計算方法を確認して計算を行う．視点を z 軸方向に移して，真上から見た図にすると，軌跡は楕円ではなく円であることがわかり，計算結果と一致することになる．





この図では，左下にコントローラが表示されているが，プレイボタンを押すと，アニメーションで点 P が動くようになっている．問題文に「交線の上を動くとき」とあるので，実際に点 P を動かしてみようということである．これにより，手動で点 P を動かすときとはまた違ったイメージ化ができる．

なお，今回は電子黒板に表示して教師が解説をしながら操作をしたが，パソコン教室で生徒ひとりひとりが自分で操作をすることも考えられる．自分の意思で動かす方がイメージ形成にはより効果があると考えられ，２年生の授業での実践を計画している．

3　検証

教育においては，新しい指導法の効果の検証はなかなか難しい．よく行われるような，群を２つに分けて，従来の手法によるものと新しい手法によるものを比べる方法は，明らかな差が出た場合に一方の群の生徒に不利な教育をしたことになってしまう．そこで，考えられるのは，過年度との比較なのだが，もともと学年ごとの差がかなりあり，同一の条件下でやったことにならないのである．そのため，アンケート調査などにより検証をする方法によらざるをえない．今回も，講座実施後にアンケート調査を実施した．こ

の場合も，質問項目が誘導にならないように留意する必要がある．他の講座でも実施している一般的な課外講座の質問事項に加え，次の項目を用意した．

1．解答例プリントについて　（○をつけてください）
（　）わかりやすかった
（　）読んでもわからないところがあった
（　）あまり役に立たなかった
2．パソコンを用いた図の解説について（○をつけてください．複数回答可）
（　）自分で考えたことの確認にとどまった．
（　）自分で考えたことの理解が深まった．
（　）新しい発見があった．
（　）板書の図より見やすい．
（　）板書で十分だ．パソコンはいらない．
※文字の大きさや見やすさ，図を動かしたときの効果（イメージがつかみやすくなる，理解が深まるなど）について，よかったこと，改善するとよいことなどについて感想を書いてください．今後の改善に役立てます．

1．については，わかりやすかったという回答が多かった．電子黒板で示した図と同じものをKETCindyを使ってTeXの図にしたことも効果があったのではないかと思われる．

2．については，２番目の「自分で考えたことの理解が深まった.」が多かった．単に確認にとどまらず，理解につながったと自覚しているという意味であり，本実践の目的である「図形認識力の育成」につながったのではないかと考えられる．また，自由記述については肯定的な記述が多かった．以下はその一例である．

- 自分は空間認識能力に欠けていて，図もなかなか描けず問題の意図すら読み取れないということが，空間，幾何の問題においてよくあるので，パソコンを用いたり，専門的用語を交えたりした今回の課外はとてもわかりやすくて大変ためになった．
- 実際に値が変わることで変化していく過程を視覚的にとらえることができたので，イメージが湧きやすくなった．
- 点を動かしたときの軌跡のイメージがつかみやすくてよかったと思います．もうちょっと色分けしていただけると，特に立体のときは把握しにくかったのでお願いしたいです．そもそも平面の画面で立体をうつすのは難しいとは思いますが．
- 実際にパソコン上で図が表現されたことで，自分では想定できなかったところのイメージをつかむことができた．
- 立体図がコンピュータ上だとキレイで，しかも動くので，イメージがとてもとりやすく，問題の答えを見すえながら取り組むことができた．

ところで，中に，このようなものがあった．

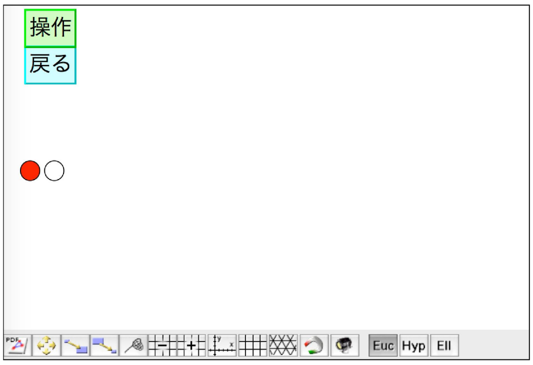
- 想像しづらいものが明確になるのでよかった．とくに確率とベクトル．

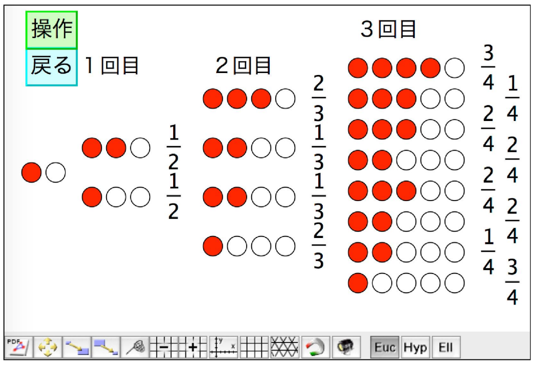
確率は図形認識力とは異なるのだが，ここで「とくに確率と」と書いてあることが興味深い．確率の講義は 4 回あったが，次のような例ではないかと推察される．

袋の中に赤と白の玉が 1 個ずつ入っている.「この袋から玉を 1 個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率 $p_N(m)$ を求める．

確率と数列の典型的な例である．第 1 問として「$p_3(m)$ を求めよ」があり，はじめは具体的に起こりうる場合を考え，そこから一般の場合を予想して数学的帰納法で証明をするタイプであり，$N = 1, 2, 3 \cdots$ と増やしながら状況をくまなく調べていくのがなかなか厄介である．ここでは，次のような教材を用意した．

まず，初期状態が左図である.「操作」ボタンを押すと 1 回操作を行いその結果を表示する．右図は 3 回操作をおこなったものである．





これだけのものを黒板に書くとなるとかなりの手間である．書いている時間が無駄ともいえる．その点，パソコンであらかじめ作っておけばすぐに指示棒で指して説明ができ，生徒が自分で書いた場合分けのものと比較ができる．しかも,「赤，白」や「R,W」という文字でなく，実際に赤と白の玉（円）なので状況は一目瞭然である．

Cinderella ではこのような教材も作成でき，効率的な教材提示が生徒の状況認識の思考とうまくマッチした例であると考えられる．

以上，動的な教材提示が，学習者の状況認識，とりわけ軌跡や空間図形の認識力の育成または強化につながることを実感として得ることができた．前述のように，その効果を客観的な数値データとして得ることは困難であるが，継続した実践，たとえば過年度比較などにより，より確実な検証ができていくのではないだろうか．

参考文献

[1] 安居院猛，中嶋正之，木見尻秀子：「C 言語によるコンピュータグラフィクス」，昭晃堂，1987.

[2] D. マンフィールド，C. シリーズ，D. ライト著，小森洋平訳：「インドラの真珠」，日本評論社，2013.