数理解析研究所講究録
第 1978 巻 2015 年 79-86

Moodle と STACK による 微分方程式, ガンマ関数, ベータ関数の問題

日本大学医学部　谷口 哲也 [1] (Tetsuya Taniguchi)
日本大学医学部　宇田川 誠一 [2] (Seiichi Udagawa)
School of Medicine,
Nihon University
名古屋大学大学院情報科学研究科　中村 泰之 [3] (Yasuyuki Nakamura)
Graduate School of Information Science,
Nagoya University
三玄舎　中原 敬広 [4] (Takahiro Nakahara)
Sangensha LLC

1 はじめに

STACK (System for Teaching and Assessment using a Computer algebra Kernel) の version 3 と moodle 2 を用いた, 微分方程式, ガンマ関数, ベータ関数等の問題の作成例を紹介する. また, STACK を受験することによる, 定期試験の点数への効果を分析する.

2 シラバス

平成 27 年度の前期に以下の内容で数学の授業を行った. 全 15 回の授業で, 1 回の授業が 55 分である. 毎回, 紙ベースの演習問題を翌日に提出させた. また, e ラーニングの一環として, Moodle 上で STACK 形式の問題を学生に強制的ではないが, 解けば成績に若干加味するということで, 解いてもらった. その際, 配置した STACK の問題の図の番号を同時に記す.

1. (4/14)　ロールの定理, ラグランジュの平均値の定理.　図 1, 2.
2. (4/21)　コーシーの平均値の定理, マクローリンの定理.　図 3, 4.
3. (4/28)　指数関数と三角関数のマクローリン級数展開.　図 6, 7.
4. (5/2)　対数関数と逆三角関数のマクローリン級数展開.　図 4, 5, 8.
5. (5/12)　1 階の線形微分方程式とそれらの解法.
6. (5/16)　定数係数高階線形微分方程式とそれらの解法.　図 9, 10, 11, 12.
7. (5/19)　2 変数関数の偏微分係数. 停留点の求め方.　図 13.

[1] taniguchi.tetsuya@nihon-u.ac.jp
[2] udagawa.seiichi@nihon-u.ac.jp
[3] nakamura@nagoya-u.jp
[4] nakahara@3strings.co.jp

8. (5/26)　2 変数関数の極値の求め方．最小 2 乗法と回帰直線．　図 14.
9. (5/30)　無限区間の積分．ガンマ関数とベータ関数．　図 15, 16.
10. (6/2)　ガンマ関数とベータ関数の応用．　図 17.
11. (6/9)　ガウス積分．その求め方と応用について．
12. (6/16)　3 次ベクトルの外積と 3 次の行列式．　図 18.
13. (6/23)　2 重積分の概念．面積分．
14. (6/30)　3 重積分．　図 19.
15. (7/7)　ガウスの発散定理．　図 20.

関数 $f(x) = 8\exp(-x) + \exp(x)$ を区間 $[-1, \log(8e)]$ で考えるとき，Rolle の定理でいう点 c を求めなさい．

(1) $f(-1) =$

(2) $f(\log(8e)) =$

(3) $f'(c) = 0 \Longleftrightarrow c =$

図 1 Rolle の定理 (m1 の類題)

関数 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 5x + 1$ を区間 $[1, 6]$ で考えるとき，Lagrange の平均値の定理でいう点 c を求めなさい．

(1) 関数 f の区間 $[1, 6]$ における平均変化量は

(2) $f'(x) =$

(3) $c =$

図 2 Lagrange の平均値の定理 (m1 の類題)

関数 $f(x) = \log x$ と $g(x) = x^2$ を区間 $[3, 6]$ で考えるとき，Cauchy の平均値の定理でいう点 c を求めなさい．

(1) $\dfrac{f(6) - f(3)}{g(6) - g(3)} =$

(2) $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} =$

(3) $c =$

図 3 Cauchy の平均値の定理 (m1 の類題)

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} x^{n-1}$$

とおくとき，以下の問いに答えなさい。

(1) $I_n + x \times I_n$ を計算することにより

$$I_n = \qquad + \frac{(-1)^{n-1}}{1+x}$$

が得られる。よって，

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} x^{k-1} - \frac{(-1)^{n-1}}{1+x}$$

である。

(2) $|x| < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ であるから

(1)で得られた最後の式で $n \to \infty$ とすれば

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$$

を得る。

(3) $-1 < x \leqq 1$ で $\log(1+x)$ はマクローリン展開可能で

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

である。

図 4 マクローリン展開 1

小問 | 問題のテストを実行

$$J_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\cdots + (-1)^n x^{2n}$$

とおくとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $J_n + x^2 \times J_n$ を計算することにより

$$J_n = \qquad + \frac{(-1)^n}{1+x^2}$$

が得られる．よって，

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k} - \frac{(-1)^n}{1+x^2}$$

である．

(2) $|x| < 1$ のとき $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ であるから

(1)で得られた最後の式で $n \to \infty$ とすれば

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$$

を得る．

(3) $|x| = 1$ のときは，(1)の最後の式の右辺の第2項は0に収束しないが，0 から 1 まで積分すると $n \to \infty$ のとき0に収束する．よって $|x| \leqq 1$ のとき

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}\,dx = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

が成り立つ．

図 5 マクローリン展開 2

マクローリン展開を用いて，次の極限値を求めなさい．

(1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} =$

(2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} =$

(3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} =$

(4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2}{x^3} =$

(5) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} =$

図 6 マクローリン展開 3

次の無限級数の和を求めなさい。

(1) $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3!}(\frac{\pi}{6})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{\pi}{6})^5 - \cdots\cdots = \square$

(2) $1 - \frac{1}{2!}(\frac{\pi}{3})^2 + \frac{1}{4!}(\frac{\pi}{3})^4 - \cdots\cdots = \square$

(3) $-\frac{1}{3!}(\frac{\pi}{3})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{\pi}{3})^5 - \frac{1}{7!}(\frac{\pi}{3})^7 + \cdots\cdots = \square$

(4) $\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots\cdots = \square$

(5) $1 + \log 2 + \frac{1}{2!}(\log 2)^2 + \frac{1}{3!}(\log 2)^3 + \cdots\cdots = \square$

図 7 マクローリン展開 4

(1) 関数 $f(x) = \log(\frac{1+x}{1-x})$ をマクローリン展開したとき, 0 でない最初の4項までを求めると

$f(x) = 2x + \square x^3 + \frac{2}{5}x^5 + \square x^7 + \cdots\cdots$

(2) log 5 の近似値を求めるためには, (1) で $x = \square$
とおくと $\log 5 \fallingdotseq \square$ である。(小数第5位まで入力。)

図 8 マクローリン展開 5

つぎの 2 階線形微分方程式を解きなさい。

$\ddot{x} - 8\dot{x} + 15x = 0$

(1) 特性方程式を用いて与式を書き直すと、$D = \frac{d}{dt}$ として

$(D - \square)(D - \square)x = 0$

となる。

(2) よって, 解は

$x = C_1 * \square + C_2 * \square$

である。

図 9 微分方程式の問題 1(m4 の類題)

つぎの 2 階線形微分方程式を解きなさい。

$\ddot{x} - 10\dot{x} + 25x = 0$

(1) 特性方程式を用いて与式を書き直すと、$D = \frac{d}{dt}$ として

$(D - \square)^2 x = 0$

となる。

(2) よって, 解は

$x = C_1 * \square + C_2 * \square$

である。

図 10 微分方程式の問題 2(m4 の類題)

つぎの 2 階線形微分方程式を解きなさい。

$\ddot{x} + 3\dot{x} + 5x = 0$

(1) 特性方程式 $\lambda^2 + 3\lambda + 5 = 0$

の解は, $\lambda = \square \pm \square i$. (i は虚数単位)

となる。

(2) よって, 解は

$x = \square \{C_1 * \square + C_2 * \square\}$

である。

図 11 微分方程式の問題 3(m4 の類題)

つぎの 2 階線形微分方程式を解きなさい.　小問 | 問題のテ

$\ddot{x} - 8\dot{x} + 12x = 12t^2 - 32t + 4$

(1) 特性方程式を用いて与式を書き直すと, $D = \frac{d}{dt}$ として

$(D - \square)(D - \square)x = 12t^2 - 32t + 4$

となる。

(2) よって, 解は

$x = C_1 * \square + C_2 * \square + \square$

である.

図 12 微分方程式 (非斉次) の問題 4

次の2変数の関数の偏導関数を求めなさい.

(1) $f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 7y^2 - 5x - 4y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \square$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \square$

(2) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \square$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \square$

(3) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = \square$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \square$

図 13 2 変数関数の偏微分 (m5 の類題)

$f(x, y) = (4x + y - 9)^2 + (5x + y - 13)^2 + (7x + y - 23)^2$

について, 以下の問いに答えなさい.

(1)

$\frac{\partial f}{\partial x}$ を求めなさい.

$\frac{\partial f}{\partial x} = \square$

(2)

$\frac{\partial f}{\partial y}$ を求めなさい.

$\frac{\partial f}{\partial y} = \square$

(3) 停留点 (x_0, y_0) を求めなさい.

$x_0 = \square$

$y_0 = \square$

(4) 2階偏微分を行って、判別式 D の値を求めなさい.

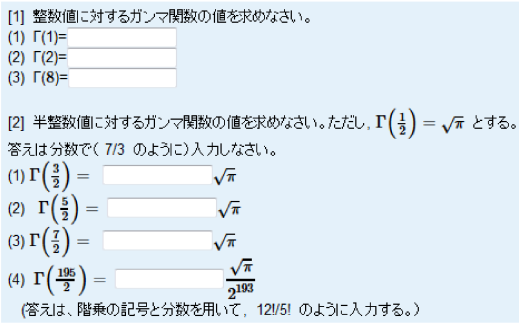
$D = \square$

(5) 3点 $(4, 9)$, $(5, 13)$, $(7, 23)$ に最小2乗法を適用して回帰直線を求めると

$y = \square x + (\square)$

である.

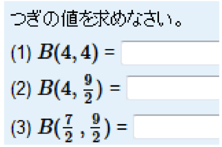
図 14 2 変数関数の偏微分と最小 2 乗法 (m5 の類題)



[1] 整数値に対するガンマ関数の値を求めなさい。
(1) Γ(1)=
(2) Γ(2)=
(3) Γ(8)=

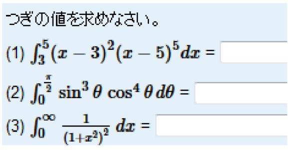
[2] 半整数値に対するガンマ関数の値を求めなさい。ただし，$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ とする。
答えは分数で(7/3 のように)入力しなさい。
(1) $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=$ $\sqrt{\pi}$
(2) $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=$ $\sqrt{\pi}$
(3) $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=$ $\sqrt{\pi}$
(4) $\Gamma\left(\frac{195}{2}\right)=$ $\frac{\sqrt{\pi}}{2^{193}}$
(答えは、階乗の記号と分数を用いて、12!/5! のように入力する。)

図 15 ガンマ関数の問題 (m6 の類題)



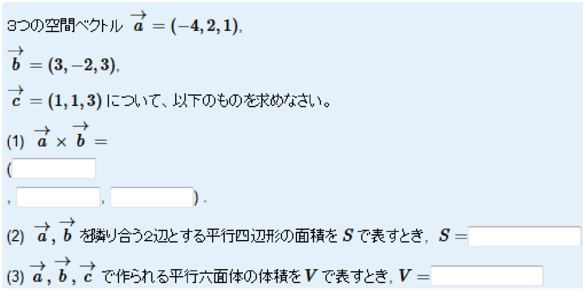
つぎの値を求めなさい。
(1) $B(4,4)=$
(2) $B(4,\frac{9}{2})=$
(3) $B(\frac{7}{2},\frac{9}{2})=$

図 16 ベータ関数の問題 1(m6 の類題)



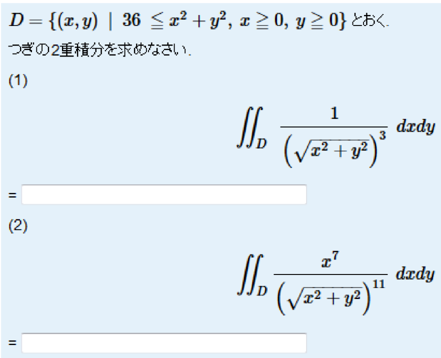
つぎの値を求めなさい。
(1) $\int_3^5 (x-3)^2(x-5)^5 dx=$
(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^4\theta \, d\theta=$
(3) $\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx=$

図 17 ベータ関数の問題 2(m6 の類題)



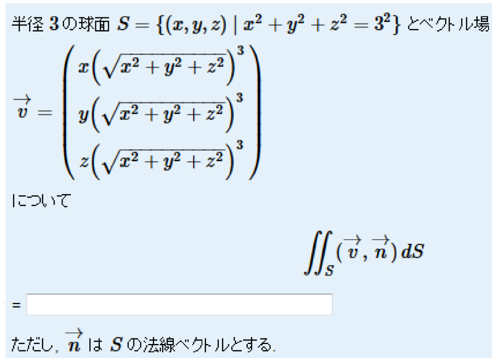
3つの空間ベクトル $\vec{a}=(-4,2,1)$,
$\vec{b}=(3,-2,3)$,
$\vec{c}=(1,1,3)$ について、以下のものを求めなさい。
(1) $\vec{a}\times\vec{b}=$
(, ,).
(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ を隣り合う2辺とする平行四辺形の面積を S で表すとき，$S=$
(3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で作られる平行六面体の体積を V で表すとき, $V=$

図 18 平行 6 面体の体積と行列式の問題 (m7 の類題)



$D=\{(x,y)\mid 36\leqq x^2+y^2,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0\}$ とおく.
つぎの2重積分を求めなさい.
(1)
$$\iint_D \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}\,dxdy$$
=
(2)
$$\iint_D \frac{x^7}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^{11}}\,dxdy$$
=

図 19 重積分の問題 (m8 の類題)



半径 3 の球面 $S=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=3^2\}$ とベクトル場
$$\vec{v}=\begin{pmatrix} x\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 \\ y\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 \\ z\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^3 \end{pmatrix}$$
について
$$\iint_S (\vec{v},\vec{n})\,dS$$
=
ただし，$\vec{n}$ は S の法線ベクトルとする.

図 20 ガウスの発散定理

3　順序ロジスティック回帰分析

数学の全 8 問 からなる定期試験を以下の内容で行った.

問題 m1 (1) ロールの定理の問題.

(2) Lagrange の平均値の定理.

(3) コーシーの平均値の定理.

問題 m2 (1) a を任意の正の実数とするとき，$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!}=0$ を証明しなさい.

(2) マクローリンの定理を $\sin x$ に適用して，剰余項の収束を示すことにより $\sin x$ のマクローリン展開を求めなさい.

問題 m3 $\arctan x$ のマクローリン展開とその応用問題.

問題 m4 以下の微分方程式を解きなさい.

(1) $\ddot{x} - 7\dot{x} + 12x = 0$　(2) $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 0$　(3) $\ddot{x} + 2\dot{x} + 3x = 0$

問題 m5 2 変数の関数 $f(x,y) = (2x+y-3)^2 + (4x+y-7)^2 + (5x+y-12)^2$ について以下の問いに答えなさい.

(1) 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ を求めなさい.

(2) 偏微分 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ を求めなさい.

(3) $z = f(x,y)$ のグラフの停留点を求めなさい.

x	2	4	5
$ax+b$			
y			
誤差の 2 乗			

(4) 平面上の 3 点 $(2,3)$, $(4,7)$, $(5,12)$ について最小 2 乗法を適用して回帰直線を求めなさい. ただし, 以下の空欄を埋めて表を完成し, 誤差の 2 乗の合計値を明示して説明を加えながら求めること.

問題 m6 p, q は正とする. $\Gamma(p) = \displaystyle\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx$ はガンマ関数とするとき, 以下の空欄に適する値を書きなさい.

(1) $\Gamma(1) = \boxed{}$　(2) $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right) = \boxed{}$　(3) $\Gamma(10) = \boxed{}\Gamma(7)$

また, $B(p,q) = \displaystyle\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$ をベータ関数とするとき,

(4) $B(1,2) = \boxed{}$　(5) $B\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{1}{2}\right) = \boxed{}$

問題 m7 $\vec{a} = (1,3,-2)$, $\vec{b} = (2,-1,5)$, $\vec{c} = (1,1,1)$ とするとき,

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積を求めなさい.

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で作られる平行六面体の体積を求めなさい.

問題 m8 (1) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ のとき,

$$\det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} \text{ を求めなさい.}$$

(2) $r\theta$-平面上の領域 E を $E = \{(r,\theta) \mid 1 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ とおく. (1) の変換によって E が xy-平面上の領域 D に移されたとする. E を $r\theta$-平面上に, D を xy-平面上に図示しなさい.

(3) つぎの積分の計算をしなさい. $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2+y^2}\,dxdy$

ただし, $D = \{(x,y) \mid 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$ である.

つぎの試験の結果が得られた.

問題	平均 (点)	得点率 (%)	標準偏差 (点)
m1(15 点満点)	13.6	90.8	2.0
m2(12 点満点)	4.7	39.4	3.5
m3(8 点満点)	7.0	86.8	2.2
m4(15 点満点)	13.4	89.4	2.3
m5(20 点満点)	16.4	82.1	3.9
m6(10 点満点)	8.9	88.5	1.7
m7(6 点満点)	4.5	75.3	1.9
m8(14 点満点)	11.9	83.7	3.2
合計 (100 点満点)	80.2	80.2	11.9

問題 m2 は証明問題であることより, 得点率が悪いのは理解できる. また, 2 番目に悪いのは問題 m7 であった.

つぎの表は, STACK の問題である m7 の類題 (図 18) の未受験者と受験者に分けたときの試験の結果である (性別以外は mean ± SD).

問題	STACK 未受験者 N = 77	STACK 受験者 N=52
m1(15 点満点)	13.5 ±1.9	13.8 ±2.1
m2(12 点満点)	5.0 ±3.7	4.3 ±3.2
m3(8 点満点)	6.7 ±2.4	7.3 ±1.6
m4(15 点満点)	13.2 ±2.5	13.7 ±2.1
m5(20 点満点)	15.9 ±3.9	17.1 ±3.8
m6(10 点満点)	8.6 ±1.8	9.3 ±1.5
m7(6 点満点)	4.2 ±2.0	5.0 ±1.6
m8(14 点満点)	11.1 ±3.5	12.7 ±2.5
合計 (100 点満点)	78.2 ±12.0	83.2 ±11.1
性別 (女性)	62 (15)	39 (13)

さて, m7 の類題の STACK 問題受験が試験問題 m7 の得点に効果があることを示そう. ただし, m7 の類題の STACK 問題未受験者と受験者はランダムに割り付けられていない. そこで, 0 点から 6 点まで変化する m7 の得点を順序変数とみなし, 順序ロジスティック回帰分析を行うことにした.

従属変数を m7 の得点, 説明変数を m1, m2, m3, m4, m5, m6, m8, *stack*, *gender* に設定して, R version 3.2.2 にて順序ロジスティック回帰分析を行った. ただし, カテゴリー変数 *stack* は m7 の類題を STACK で受験したものは 1, そうでないものは 0 に設定した. また, カテゴリー変数 *gender* は男性なら 0, 女性なら 1 に設定した. つぎの結果が得られた.

```
Logistic Regression Model

lrm(formula = m7 ~ m1 + m2 + m3 + m4 + m5 + m6 + m8 + stack +
    gender, data = DatasetRkakou)
Frequencies of Responses

 0  1  2  3  4  5  6
10  1  6 27  8  5 72

                         Model Likelihood      Discrimination       Rank Discrim.
                            Ratio Test             Indexes              Indexes
Obs            129     LR chi2      35.18     R2          0.257     C        0.746
max |deriv| 3e-07      d.f.             9     g           1.273     Dxy      0.492
                       Pr(> chi2) <0.0001     gr          3.572     gamma    0.495
                                              gp          0.130     tau-a    0.313
                                              Brier       0.106

        Coef    S.E.   Wald Z Pr(>|Z|)
y>=1     0.4034 1.5912  0.25  0.7999
y>=2     0.2873 1.5886  0.18  0.8565
y>=3    -0.2495 1.5786 -0.16  0.8744
y>=4    -1.7063 1.5773 -1.08  0.2794
y>=5    -2.0370 1.5793 -1.29  0.1971
y>=6    -2.2362 1.5826 -1.41  0.1577
m1      -0.0223 0.0912 -0.24  0.8066
m2       0.2260 0.0639  3.54  0.0004
m3       0.0113 0.0891  0.13  0.8989
m4      -0.0791 0.0805 -0.98  0.3259
m5       0.0135 0.0492  0.27  0.7839
m6       0.1921 0.1167  1.65  0.0990
m8       0.0396 0.0581  0.68  0.4952
stack    1.1066 0.4164  2.66  0.0079
gender  -0.4562 0.4632 -0.98  0.3247
```

図 21 順序ロジスティック回帰分析

よって, 回帰式は

$$\log\frac{p_k}{1-p_k} = \beta_k - 0.0223\,m1 + 0.2260\,m2 + 0.0113\,m3 - 0.0791\,m4 + 0.0135\,m5 + 0.1921\,m6 + 0.0396\,m8 + 1.1066\,stack - 0.4562\,gender.$$

で与えれる. ただし, p_k は $m7$ が k 以上になる確率である.

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
0.4034	0.2873	-0.2495	-1.7063	-2.0370	-2.2362

変数 $stack$ の箇所の P 値が 0.0079 と有意であることが判明した. m7 の類題の STACK 問題受験が試験問題 m7 の得点に効果があるといえる. ちなみに 変数 $m2$ の箇所の P 値も 0.0004 で有意である. これは難しい証明問題 m2 ができる人は 問題 m7 はその人にとってみれば簡単であることを反映していると思われる.

さて, 本来投入できるモデルの説明変数の個数を計算すると, 全体の m7 の得点分布から

得点	0	1	2	3	4	5	6	計
人数	10	1	6	27	8	5	72	129

$(129-(10^3+1^3+6^3+27^3+\cdots+72^3)/129^2)/15=7.018$ と計算され, 7 個まで投入できるが, いまのモデルの個数は 9 個でオーバーしている. そこで, m1, m2, m3, m4, m5, m6, m8, *gender* を傾向スコア ([1]) *ps* に 1 つにまとめ順序ロジスティック回帰分析を再度行った結果がつぎである.

```
Logistic Regression Model

lrm(formula = m7 ~ stack + ps, data = DatasetRkakou)
Frequencies of Responses

 0  1  2  3  4  5  6
10  1  6 27  8  5 72

                       Model Likelihood     Discrimination      Rank Discrim.
                          Ratio Test           Indexes             Indexes
Obs              129   LR chi2      7.52    R2          0.061    C       0.610
max |deriv| 1e-13      d.f.            2    g           0.501    Dxy     0.220
                       Pr(> chi2) 0.0233    gr          1.650    gamma   0.230
                                            gp          0.052    tau-a   0.140
                                            Brier       0.113

       Coef    S.E.   Wald Z Pr(>|Z|)
y>=1    2.0707 0.4689  4.42  <0.0001
y>=2    1.9654 0.4592  4.28  <0.0001
y>=3    1.4709 0.4213  3.49  0.0005
y>=4    0.1975 0.3828  0.52  0.6058
y>=5   -0.0802 0.3828 -0.21  0.8340
y>=6   -0.2454 0.3842 -0.64  0.5229
stack   0.9151 0.3980  2.30  0.0215
ps      0.3132 0.9623  0.33  0.7448
```

図 22 傾向スコアをもちいた順序ロジスティック回帰分析

よって, 回帰式は

$$\log\frac{p_k}{1-p_k}=\beta_k+0.9151\,stack+0.3132\,ps$$

で与えられる. ただし, p_k は $m7$ が k 以上になる確率である.

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6
2.0707	1.9654	1.4709	0.1975	-0.0802	-0.2454

依然として, 変数 *stack* の箇所の P 値が 0.0215 と有意であることが判明した. すなわち, m7 の類題の STACK 問題受験が試験問題 m7 の得点に効果があるといえる.

参考文献

[1] 星野崇宏：「調査観察データの統計科学 因果推論・選択バイアス・データ融合」, 岩波書店, 2009