数理解析研究所講究録
第 1978 巻 2015 年 125-128

レーダーチャートの描く造形美

高知工業高等専門学校・総合科学科　高木 和久 (Kazuhisa Takagi)
National Institute of Technology,
Kochi College

1　はじめに

平成25年度から施行された現行の学習指導要領では数学 I と数学 A に課題学習の設定がある．学習は数学 I または数学 A における履修内容に関連した課題を設け，それらの解説を通して数学のよさを認識できるようにするものである．

課題学習の実施にあたっては，一方的に知識を与えるのではなく，数学的活動を一層重視することが大切である．例えば，課題を理解する，結果を予想する，解決の方向を構想する，解決する，解決の過程を振り返ってよりよい解決を考えたり，更に課題を発展させたりする，という一連の過程に沿って必要な場面で適切な指導を工夫するとともに適宜自分の考えを発表したり議論したりするなどの活動を取り入れるよう配慮する，とされている ([1]).

今回，数学の授業の中で整数の性質に関する課題学習を行った．対象とした学生は高知工業高等専門学校の1年生でクラスの人数は43名である．

まず学生を6つの班に分け累乗の下2桁を求めさせる課題学習を行った（2コマ100分間）．その翌日にノートパソコンの画面をプロジェクターを使って教室前方のスクリーンに映し出す形で課題学習の内容を補完する一斉授業を行った（1コマ50分間）．

この一斉授業の中では整数の下2桁をレーダーチャートを用いて表示した．この方法を用いると規則性が視覚的に明瞭にわかり，大変好評であった．

2　課題学習の内容

a と k を指定して a^k の下2桁を電卓等を用いて求めさせた．表1は学生に完成させた表である．表を完成させたのち，表をじっくり観察することにより数値の規則性を発見し，それを数式で表すことを求めた．

授業の最後に回収した用紙を見ると学生は実に様々な規則性を発見していた．ある学生は $3^k, 4^k, 6^k$ について更に詳しく調べ，3^k については10の位は20毎に繰り返し，1の位は3,9,7,1を順に繰り返すことを発見した．幾つかの数が繰り返すことは他の全ての学生も気づき，その周期（幾つの数がグループになって繰り返すか）を色々な a の値について調べていた．

ある学生は $a=2$ のとき，公式 $k^2+a^2-(k+a)=a^k$ が成り立つと授業中に発言した．残念ながらこの公式は $k=1,2,3$ のときのみ成り立つものであったが，この学生は大変嬉しそうであった．別の学生は 5 の倍数以外の奇数の 20 乗，100 乗の下 2 桁は 01 となることを発見した．これはオイラーの定理より直ちに得られる結果である．その他，多くの規則性が発見された．

k \ a	11	24	74	76	25	49	2	3	4	5	6	7	8	9
1	11	24	74	76	25	49	02	03	04	05	06	07	08	09
2	21	76	26	76	25	01	04	09	16	25	36	49	64	81
3	31	24	74	76	25	49	08	27	64	25	16	43	12	29
4	41	76	26	76	25	01	16	81	56	25	96	01	96	61
5	51	24	74	76	25	49	32	43	24	25	76	07	68	49
6	61	76	26	76	25	01	64	29	96	25	56	49	44	41
7	71	24	74	76	25	49	28	87	84	25	36	43	52	69
8	81	76	26	76	25	01	56	61	36	25	16	01	16	21
9	91	24	74	76	25	49	12	83	44	25	96	07	28	89
10	01	76	76	76	25	01	24	49	76	25	76	49	24	01
20	01	76	76	76	25	01	76	01	76	25	76	01	76	01
100	01	76	76	76	25	01	76	01	76	25	76	01	76	01

表 1　a^k の下 2 桁

3　レーダーチャートを用いた解説

レーダーチャートは統計でよく用いられるグラフで学生にも馴染みが深い（図 1）．

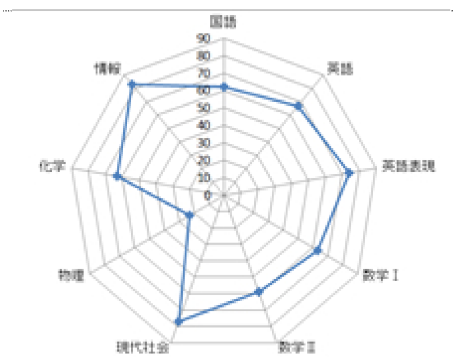

図 1　レーダーチャートの例

例えば、$3^k(k=0,1,\cdots,9)$ の下 1 桁をレーダーチャートで表すと図 2 のようになる．

1	3
2	9
3	7
4	1
5	3
6	9
7	7
8	1
9	3

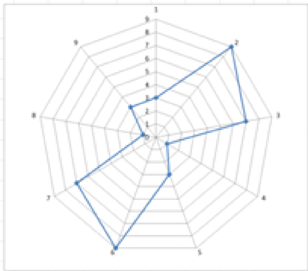

図 2　$3^k(k=0,1,\cdots,9)$ の下 1 桁

$11^k(k=0,1,\cdots,99)$ の下 2 桁をレーダーチャートで表すと図 3 のようになる．プロペラの羽のような模様となり，大変興味深い．羽が 10 枚あることから合同式

$$11^{k+10} \equiv 11^k \mod 100$$

が成り立っていることが予想される．

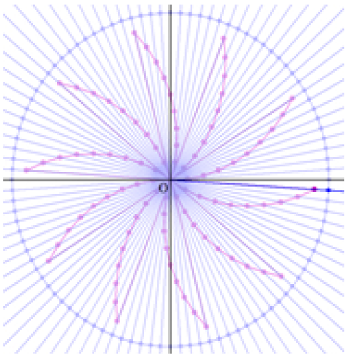

図 3　$11^k(k=0,1,\cdots,99)$ の下 2 桁

また，$76^k(k=0,1,\cdots,99)$ の下 2 桁をレーダーチャートで表すと図 4 のようになる．

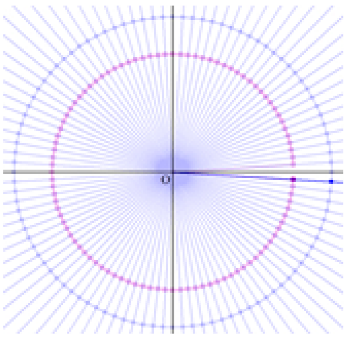

図 4　$76^k(k=0,1,\cdots,99)$ の下 2 桁

$k \geqq 2$ のとき　$76^k \equiv 76 \mod 100$　であることがひと目でわかる．

また，x を 0 から 99 まで変化させたときの x^2 の下 2 桁の描くレーダーチャートは図 5 のようになる．

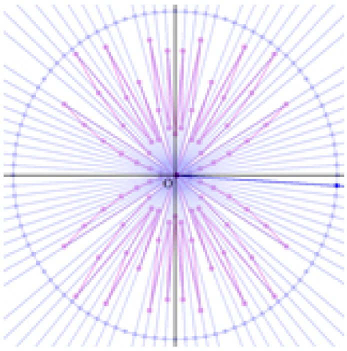

図 5　$x^2(x = 0, 1, \cdots, 99)$ の下 2 桁

チャートが上下対称になっている点が興味深い．今回の授業では行わなかったが，次回は学生にこの理由を考えさせてみたい．先に述べたように課題学習の実施にあたっては，一方的に知識を与えるのではなく，数学的活動を一層重視することが大切である．例えば，課題を理解する，結果を予想する，解決の方向を構想する，解決する，解決の過程を振り返ってよりよい解決を考えたり，更に課題を発展させたりすることが求められている．

x^2 の下 2 桁の描くレーダーチャートの対称性は

$$(100 - x)^2 \equiv x^2 \mod 100$$

のように数式化できる．この合同式は左辺を展開して

$$(100 - x)^2 = 10000 - 200x + x^2 \equiv x^2 \mod 100$$

とすることにより簡単に証明することができる．対称性を式で表す作業を学生自身に行わせ，そしてその予想を自分の力で証明させることは課題学習の教育目標に沿っていると言える．

4　まとめ

本論文で取り上げた課題学習は数学の習熟度の低い学生にとっても取り組みやすい内容であり，また下 2 桁の示す様々な規則性を容易に発見することができるため学生が達成感を得ることができる．

課題学習はまだ始まったばかりで，使いやすい題材の数が限られている．今後も様々な分野で新しい課題学習のテーマを創出してゆきたい．

参考文献

[1] 高等学校学習指導要領解説（数学編），文部科学省，2009