数理解析研究所講究録
第 1979 巻 2015 年 89-106

Kirchhoff 型方程式に対する特異摂動問題

金沢大学理工研究域数物科学系　生駒　典久[1]
Faculty of Mathematics and Physics, Institute of Science and Engineering,
Kanazawa University

1 序

このノートは論文 [25] の要約であり，次の Kirchhoff 型方程式に対し正値凝集解の存在を考察する: (なお正値凝集解の定義は以下を参照のこと)

$$(P_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\varepsilon^2 m\left(\varepsilon^{2-N}\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)\Delta u + V(x)u = f(u) & \text{in } \mathbf{R}^N, \\ & u \in H^1(\mathbf{R}^N). \end{cases}$$

ここで, $N \geq 1$ とし，$m \in C([0,\infty), \mathbf{R})$, $V \in C(\mathbf{R}^N, \mathbf{R})$, $f \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ は与えられた関数, $0 < \varepsilon \ll 1$ はパラメータであり，

$$\|\nabla u\|_{L^2}^2 := \int_{\mathbf{R}^N} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x$$

とする．また，(u_ε) が (P_ε) の正値凝集解であるとは, (u_ε) が (P_ε) の正値解であり，部分列 (ε_n) と点列 (x_n), また正値関数 $U \in H^1(\mathbf{R}^N)$ が存在して

$$u_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n x + x_n) \to U \quad \text{strongly in } H^1(\mathbf{R}^N)$$

を満たすときを言う．更に $x_n \to x_0$ となるとき，x_0 に凝集する解と呼ぶことにする．

$N = 1$ かつ $m(s) = a + bs$ $(a, b > 0)$ とした場合，$m(\|\nabla u\|_{L^2}^2)\Delta u$ という形の作用素を Kirchhoff [36] が導入したので問題 (P_ε) は Kirchhoff 型方程式と呼ばれている．更に $m(s) \not\equiv \text{const.}$ とすると, 項 $m(\varepsilon^{2-N}\|\nabla u\|_{L^2}^2)$ は解の $\mathbf{R}^N$ 上全体の情報を含んでいるため, 非局所な効果を持っている．一方，方程式 (P_ε) において $m(s) \equiv 1$ とすると次の非線型 Schrödinger 方程式が得られる:

$$\text{(NLS)} \qquad -\varepsilon^2\Delta u + V(x)u = f(u) \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad u \in H^1(\mathbf{R}^N).$$

したがって，(P_ε) は (NLS) の一般化であるとも考えられる．

方程式 (NLS) に対する研究は [28] を初めとしてこれまでに数多くの研究がなされている [3, 4, 5, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 34, 35, 39, 45, 48, 51, 52]. 一方，Kirchhoff 型方程式 (P_ε) や (P_ε) とは異なるモデルの Kirchhoff 型方程式に対しては [42, 46] を皮切りに活発に研究されるようになってきた [1, 2, 6, 7, 8, 24, 26, 27, 30, 37, 38, 40, 41, 44, 50, 53]. 特に，[30] では $N = 3$, $m(s) = a + bs$ $(a, b > 0)$ かつ $f(s)$ に対し，$s \mapsto f(s)/s^3$ に単調性を仮定し, 原点付近で $f(s) = o(s^3)$ という条件を課した下で $V(x)$ の最小値に凝集する (P_ε) の正値解の存在が示されている．[30] において非線型項に課されている条件は，大雑把に言うと, $f(s) = |s|^{p-1}s$ という非線型項に対して $p > 3$ を仮定していることになる．また [50, 37] では $N = 3$, $m(s) = a + bs$ $(a, b > 0)$, $f(s) = g(s) + |s|^4 s$ という形の非線型項を考え，$V(x)$ の最小値や極小値に凝集する (P_ε) の正値解の存在を示している．ただ

[1]本研究は特別研究員奨励費 24・2259 の援助を受けたものである．

し，$g(s)$ に対しては上で述べた様に $g(s)=o(s^3)$ かつ $s\mapsto g(s)/s^3$ の単調性が課されている．ここで $|s|^4 s$ という項は Sobolev の埋め込み定理 $H^1(\mathbf{R}^3)\subset L^6(\mathbf{R}^3)$ の臨界ケースに対応するものであることを注意しておく．

これらの先行研究に対し次の様な問題を考えることができる:

1. 3次元以外についても (P_ε) の正値凝集解，特に $V(x)$ の極小点に凝集する解，の存在を示せるか?
2. 非線型項 $f(s)$ に課されている $f(s)=o(s^3)$ という条件や単調性 $s\mapsto f(s)/s^3$ を取り除くことができないか? またできるとすればどれほど一般の非線型項 $f(s)$ に対して (P_ε) の正値凝集解の存在を示せるか?
3. 係数関数 $m(s)$ に対してどれだけ一般化することができるか?

このような一般の非線型項を扱っている研究として，非線型スカラー場方程式の場合，$V(x)\equiv\mathrm{const.}>0$ という状況下では [9, 10, 11, 49] 等が挙げられ，非線型 Schrödinger 方程式に対する特異摂動問題 (NLS) に対しては [14, 15, 16, 17] 等が挙げられる．

次に，[25] において仮定されている条件について述べる．まず，$V(x)$ については次を仮定する:

(V1) $V\in C(\mathbf{R}^N,\mathbf{R})$ かつ $\underline{V}:=\inf_{\mathbf{R}^N}V>0$.

(V2) 次を満たす有界開集合 $\Omega\subset\mathbf{R}^N$ が存在する:

$$V_0:=\inf_{\Omega}V<\inf_{\partial\Omega}V. \tag{1}$$

また $\overline{\Omega}$ 上の最小点全体を $\mathcal{M}$ と置く: $\mathcal{M}:=\{x\in\overline{\Omega}\mid V(x)=V_0\}$. (1) より $\emptyset\neq\mathcal{M}\subset\Omega$ が成立する.

また非線型項 $f(s)$ に対しては

(f1) $f\in C(\mathbf{R})$ かつ $s\le 0$ ならば $f(s)=0$.

(f2) $-\infty<\liminf_{s\to+0}\dfrac{f(s)}{s}\le\limsup_{s\to+0}\dfrac{f(s)}{s}<\underline{V}$.

(f3) $N\ge 3$ のとき，$\lim_{s\to\infty}f(s)/s^{2^*-1}=0$. ただし $2^*=2N/(N-2)$ とする．$N=2$ のときは, $\lim_{s\to\infty}f(s)/e^{\alpha s^2}=0$ が全ての $\alpha>0$ に対して成立する.

(f4) ある $s_0>0$ が存在して次が成り立つ: $F(s):=\int_0^s f(t)\mathrm{d}t$ とおいたとき，$N\ge 2$ ならば $-V_0s_0^2/2+F(s_0)>0$. $N=1$ ならば

$$-\frac{V_0}{2}s_0^2+F(s_0)=0>-\frac{V_0}{2}s^2+F(s)\quad\text{in }(0,s_0),\qquad -V_0s_0+f(s_0)>0.$$

注意 1.1. (i) 条件 (f1) において $s\le 0$ ならば $f(s)=0$ という条件は取り除くこともできる．その場合, (f3) において $s\to\infty$ を $|s|\to\infty$ に置き換えることになる．一方，(f1) と (f3) を仮定すると, 楕円型方程式の正則性定理と Bony の最大値原理 [12, 23, 43] より $H^1(\mathbf{R}^N)$ に属する (P_ε) の全ての非自明な弱解は正値解となることも示すことができる.
(ii) 条件 (f3) は $N\ge 2$ の場合にのみ課される条件である.
(iii) 条件 (f1)–(f4) は [10, 11](cf. [9]) に現れるものと同等のものであり，$m(s)\equiv 1$ (非線型スカラー場方程式) の場合については非自明解が存在する為の必要かつ十分条件に近いことが知られている．これより (f1)–(f4) は極めて一般的な条件であることが分かる．

最後に関数 $m(s)$ に関する条件を述べる:

(m1) ある $m_0 > 0$ が存在して任意の $s \geq 0$ に対して $m(s) \geq m_0$ が成り立つ.

(m2) $M(s) := \int_0^s m(t)\mathrm{d}t$ とおいたとき, $\liminf_{s\to\infty}\{M(s) - (1-2/N)m(s)s\} = \infty$.

(m3) $s \to \infty$ としたとき, $m(s)/s^{2/(N-2)} \to 0$.

(m4) 関数 $m(s)$ は $[0,\infty)$ 上単調非減少.

(m5) 関数 $s \mapsto m(s)/s^{2/(N-2)} : (0,\infty) \to \mathbf{R}$ は $(0,\infty)$ 上単調非増加.

注意 1.2. (i) 条件 (m2)–(m5) は $N \geq 3$ の場合にのみ課される.
(ii) 上の条件 (f1)–(f4), (m1)–(m5) を満たす例としては $1 < p_0 < p_1 < \cdots p_k < (N+2)/(N-2)_+$, $0 < q_1 < \cdots < q_\ell < 2/(N-2)_+$, $a_0, b_0 > 0$, $0 \leq a_i, b_i$ $(1 \leq i \leq k,\ 0 \leq j \leq \ell)$ として

$$f(s) = \sum_{i=1}^{k} a_i s_+^{p_i}, \quad m(s) = b_0 + \sum_{i=1}^{\ell} b_i s^{q_i}$$

を挙げることができる. ここで $s_+ := \max\{0, s\}$. 特に $N = 3$ とすると, $f(s) = s_+^p$ $(1 < p < 5)$, $m(s) = a + bs$ $(a, b > 0)$ が含まれることに注意する.

[25] における主結果は次のとおりである.

定理 1.3. 条件 (V1)–(V2), (f1)–(f4) が成り立ち, $N = 1, 2$ の場合は (m1) を, $N \geq 3$ の場合は (m1)–(m5) をそれぞれ仮定する. このとき, ある $\varepsilon_0 > 0$ と (P_ε) の正値解の族 $(u_\varepsilon)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ が存在して次が成立する: x_ε を u_ε の最大点とすると

(i) $\varepsilon \to 0$ としたとき, $\mathrm{dist}\,(x_\varepsilon, \mathcal{M}) \to 0$.

(ii) 部分列 (ε_n) が存在して

$$x_{\varepsilon_n} \to x_0 \in \mathcal{M}, \quad u_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n x + x_{\varepsilon_n}) \to U \quad \text{strongly in } H^1(\mathbf{R}^N).$$

ここで U は次の方程式の最小エネルギー解である (最小エネルギー解の定義については定義 2.2 を参照):

$$-m\left(\|\nabla v\|_{L^2}^2\right)\Delta v + V(x_0)v = f(v) \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^N). \tag{2}$$

定理 1.3 では, [10, 11] (cf. [9]) に対応する条件の下, $V(x)$ の極小点の周りに凝集する正値解の存在を示すことに成功している. 特に $f(s) = s_+^p$ とした場合, $1 < p \leq 3$ という例を含んでおり, [30] の結果を拡張している. 定理 1.3 と同様に一般的な非線型項を扱っている先行結果としては [6, 7] を挙げることができるが, これらの論文では $\varepsilon = 1$, $V(x) \equiv \mathrm{const.} > 0$, $N \geq 3$ としたときの (P_ε) の正値解の存在が示されており, 我々の問題とは異なっていることに注意する.

また条件 (m1)–(m5) については比較的シャープであることがわかる. 実際, 条件 (m1), (m2), (m4), (m5) を満たし, 方程式

$$-m\left(\|v\|_{L^2}^2\right)\Delta v + v = f(v) \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^N)$$

が正値解を持たない様な $m(s)$ を構成することができる．この詳細については命題 2.4 を参照のこと．

以下の節では，定理 1.3 の証明の大雑把な流れを述べることにするが，基本的には [14, 15] の枠組みに沿って議論を進めて行く．そのためには，定数係数 (2) の最小エネルギー解の構造を調べなければならない．(2) に関しては, [6, 7, 8, 38] 等において解析がなされているが, [14, 15] の枠組みに載せるためには十分ではないため更なる解析が必要となる．また，項 $m(\varepsilon^{2-N}\|\nabla u\|_{L^2}^2)$ による非局所効果についても気をつけなければいけない．実際, $V\in L^\infty(\mathbf{R}^N)$ とし，(u_n) を $\varepsilon=1$ としたときの (P_ε) の近似解の列で $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上有界なものがあったとする (言い換えると (u_n) は (P_ε) の有界な Palais–Smale 列 ((PS) 列) であったとする):

$$-m\left(\|\nabla u_n\|_{L^2}^2\right)\Delta u_n+V(x)u_n=f(u_n)+o(1)\quad \text{in } \mathbf{R}^N. \tag{3}$$

(u_n) は有界なので $u_n \rightharpoonup u_0$ weakly in $H^1(\mathbf{R}^N)$ とすると u_0 は次の方程式の解である:

$$-\alpha_0\Delta u_0+V(x)u_0=f(u_0)\quad \text{in } \mathbf{R}^N,\quad \alpha_0:=\lim_{n\to\infty} m\left(\|\nabla u_n\|_{L^2}^2\right). \tag{4}$$

方程式 (3) と (4) を見比べると, (3) は非局所効果を持つ Kirchhoff 型方程式であるが, (4) では非局所効果が消えてしまっている．一方，$m(s)\equiv 1$ とした場合 ((NLS) の場合) ではこのようなことは起こらない．このため，(P_ε) の近似解 (u_n) の強収束性を示そうとするときには注意して議論しなけばならない．このようなことを踏まえてどのような条件を $m(s)$ に課せば良いかについても考える必要がある．

2 定数係数方程式の解析

この節では，定理 1.3 において現れる定数係数方程式 (2) に対する結果を述べる．また，条件 (m3) を取り除いた際に (2) が非自明解を持たない例についても考察する．

まず方程式 (2) を少し一般化して次の定数係数方程式について考える: $\lambda>0$ とし，

$$-m\left(\|\nabla v\|_{L^2}^2\right)\Delta v+\lambda v=f(v)\quad \text{in } \mathbf{R}^N,\quad v\in H^1(\mathbf{R}^N). \tag{5}$$

ここで $\lambda=V(x_0)$ とすれば (5) は (2) と一致する．次に,

$$\overline{V}:=\sup_{x\in\Omega}V,\quad g_\lambda(s):=f(s)-\lambda s\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})\quad \text{for } \lambda\in[V_0,\overline{V}]$$

とおく．このとき (f1)–(f4) と必要であれば Ω を小さく取り直すことにより g_λ は次の性質を満たす:

(g1) $-\infty<\inf_{\lambda\in[V_0,\overline{V}]}\liminf_{s\to+0}\frac{g_\lambda}{s}\le\sup_{\lambda\in[V_0,\overline{V}]}\limsup_{s\to+0}\frac{g_\lambda}{s}<0.$

(g2) $|s|\to\infty$ としたとき，$N\ge 3$ ならば $\sup_{\lambda\in[V_0,\overline{V}]}|g_\lambda(s)|/|s|^{2^*-1}\to 0$, $N=2$ ならば $\sup_{\lambda\in[V_0,\overline{V}]}|g_\lambda(s)|/e^{\alpha s^2}\to 0$ が成立する．

(g3) 連続関数 $s_0(\lambda)\in C([V_0,\overline{V}],\mathbf{R})$ が存在し，$s_0(\lambda)>0$ かつ $N\ge 2$ ならば $0<\inf_{\lambda\in[V_0,\overline{V}]}G_\lambda(s_0(\lambda))$, $N=1$ のときは $G_\lambda(s_0(\lambda))=0>G_\lambda(s)$ が任意の $s\in(0,s_0(\lambda))$, $\lambda\in[V_0,\overline{V}]$ について成立する．ただし，$G_\lambda(s):=\int_0^s g_\lambda(t)\mathrm{d}t$ とする．

(g4) 各 $V_0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \overline{V}$, $s > 0$ に対して $g_{\lambda_2}(s) < g_{\lambda_1}(s)$.

また方程式 (5) に対応する汎関数 L_λ を次で定める:

$$L_\lambda(v) := \frac{1}{2} M\left(\|\nabla v\|_{L^2}^2\right) - \int_{\mathbf{R}^N} G_\lambda(v)\mathrm{d}x.$$

条件 (g1)–(g4) より $L_\lambda \in C^1(H^1(\mathbf{R}^N), \mathbf{R})$ かつ

$$L'_\lambda(v)\varphi = \int_{\mathbf{R}^N} m\left(\|\nabla v\|_{L^2}^2\right) \nabla v \cdot \nabla\varphi \mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^N} g_\lambda(v)\varphi \mathrm{d}x \qquad \text{for } \varphi \in H^1(\mathbf{R}^N)$$

が成立する. したがって $L'_\lambda(v) = 0$ であることと v が (5) の解 (弱解) であることは同値となる. また, $s \leq 0$ に対して $f(s) = 0$ であったことを思い出すと, $v \not\equiv 0$, $L'_\lambda(v) = 0$ であれば $v > 0$ となることも示せる. したがって, L_λ の非自明な臨界点は (5) の正値解に対応する.

次に以下の集合と量を定める:

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\lambda) &:= \left\{ v \in H^1(\mathbf{R}^N) \;\middle|\; v \not\equiv 0,\ L'_\lambda(v) = 0,\ \max_{\mathbf{R}^N} v = v(0) \right\}, \\
E(\lambda) &:= \inf_{v \in \mathcal{S}(\lambda)} L_\lambda(v), \\
\mathcal{S}_0(\lambda) &:= \left\{ v \in \mathcal{S}(\lambda) \;\middle|\; L_\lambda(v) = E(\lambda) \right\}.
\end{aligned}$$

注意 2.1. (5) は平行移動不変性を持っているため ($v(x)$ が解ならば任意の $y \in \mathbf{R}^N$ に対して $v(x+y)$ も解), (5) の全ての非自明解は $\mathcal{S}(\lambda)$ の元を平行移動することによって得られる.

定義 2.2. $E(\lambda)$ を (5) の最小エネルギーといい, $\mathcal{S}_0(\lambda)$ の元のことを (5) の最小エネルギー解という.

[14, 15] の議論を利用するためには, 定数係数方程式 (5) に対して次を示すことが目標であるが, このノートでは証明を与えない.

定理 2.3 (Theorems 2.1 and 2.10, Proposition 2.9 in [25]). $N \geq 1$ とし, $N = 1, 2$ ならば (m1) を, $N \geq 3$ ならば (m1)–(m5) を仮定する. このとき, 次が成立する:

(i) 各 $\lambda \in [V_0, \overline{V}]$ に対して $\mathcal{S}_0(\lambda) \neq \emptyset$.

(ii) 各 $\lambda \in [V_0, \overline{V}]$ に対して,

$$c_{\mathrm{MP}}(\lambda) := \inf_{\gamma \in \Gamma(\lambda)} \max_{0 \leq t \leq 1} L_\lambda(\gamma(t))$$

とおく. ただし,

$$\Gamma(\lambda) := \left\{ \lambda \in C([0,1], H^1(\mathbf{R}^N)) \mid \gamma(0) = 0,\ L_\lambda(\gamma(1)) < 0 \right\}$$

とする. このとき, $c_{\mathrm{MP}}(\lambda) = E(\lambda) > 0$ が成立する.

(iii) 各 $\delta > 0, \lambda \in [V_0, \overline{V}]$ に対して path $\gamma_\lambda^\delta \in C([0,1], H^1(\mathbf{R}^N))$ が存在して

$$\begin{cases} \gamma_\lambda^\delta(0) = 0, \quad L_\lambda(\gamma_\lambda^\delta(1)) < 0, \quad \max_{0\le t\le 1} L_\lambda(\gamma_\lambda^\delta(t)) = E(\lambda), \quad \gamma_\lambda^\delta([0,1]) \cap \mathcal{S}_0(\lambda) \neq \emptyset, \\ L_\lambda(\gamma_\lambda^\delta(t)) < E(\lambda) \quad \text{if } \|\gamma_\lambda^\delta(t) - \mathcal{S}_0(\lambda)\|_{H^1} \geq \delta. \end{cases}$$

(iv) 各 $V_0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq \overline{V}$ に対して $E(\lambda_1) < E(\lambda_2)$ が成り立ち，関数 $\lambda \mapsto E(\lambda)$: $[V_0, \overline{V}] \to \mathbf{R}$ は連続．更に $\cup_{\lambda \in [V_0, \overline{V}]} \mathcal{S}_0(\lambda)$ は $H^1(\mathbf{R}^N)$ において compact.

定理 2.3 では, 峠の定理に現れる臨界値 $c_{\mathrm{MP}}(\lambda)$ と最小エネルギー $E(\lambda)$ が等しく，また c_{MP} を達成する path で付加的な性質を持つものが存在することを示している．また, $c_{\mathrm{MP}}(\lambda) = E(\lambda)$ を示すために $c_{\mathrm{MP}}(\lambda)$ が L_λ の臨界値であることを証明するが, このためには (m4), (m5) は必要ではなく，(m1)–(m3) だけで良い．詳しくは [25, Proposition 2.13] を参照されたい．条件 (m4), (m5) は定理 2.3 (iii) に現れる path の存在を示すために必要となる.

また, 定理 2.3 のような特徴付けは特異摂動問題 (P_ε) だけでなく，ポテンシャル項を含んだ Kirchhoff 型方程式の最小エネルギー解の存在を証明するときにも有効である．実際, [32] ではそのような特徴を用いて Kirchhoff 型方程式に対する最小エネルギー解の存在を示している.

この節の残りでは定理 2.3 の証明を与える代わりに $N \geq 3$ かつ (m3) を外した場合, (5) が非自明解を持たない例について考える．このような例は $m(s) = a + bs$, $N \geq 4$ の場合, [7] において考察されている.

まず，準備として次の問題を考える:

$$-\Delta w = g_\lambda(w) \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad w \in H^1(\mathbf{R}^N). \tag{6}$$

ただし，g_λ は (g1)–(g4) を満たしているとする．(6) に対応する汎関数を

$$J_\lambda(w) := \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} |\nabla w|^2 \mathrm{d}x - \int_{\mathbf{R}^N} G_\lambda(w)\mathrm{d}x \in C^1(H^1(\mathbf{R}^N), \mathbf{R})$$

で定義する．上と同様に $J_\lambda'(w) = 0$ であることと (6) の解であることは同値である．このとき，次のことが知られている ([9, 10, 31] を参照のこと):

(i) $0 < \widetilde{E}(\lambda) := \inf\{J_\lambda(w) \mid w \not\equiv 0,\ J_\lambda'(w) = 0\}$.

(ii) $\emptyset \neq \widetilde{\mathcal{S}}_0(\lambda) := \{w \in H^1(\mathbf{R}^N) \mid w \not\equiv 0,\ J_\lambda'(w) = 0,\ J_\lambda(w) = \widetilde{E}(\lambda)\}$.

命題 2.4 (cf. [6, 7]). $N \geq 3$ とし, $m \in C([0,\infty), \mathbf{R})$ は (m1) と (m4) を, g_λ は (g1)–(g4) を満たすとする．このとき，方程式

$$-m\left(\|\nabla v\|_{L^2}^2\right)\Delta v = g_\lambda(v) \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad v \in H^1(\mathbf{R}^N) \tag{7}$$

が非自明解を持つ必要十分条件は次の関数 $h(t)$ が $(0,\infty)$ 上で零点をとることである:

$$h(s) := m\left(\widetilde{E}(\lambda) N s^{N-2}\right) - s^2.$$

特に, $m(s) := a + bs^{2/(N-2)}$ $(a, b > 0)$ とおくと, (m1), (m2), (m4), (m5) を満たすが, (m3) は満たさない. この場合, 命題 2.4 から (7) が非自明解を持つための必要十分条件は $b\left(\widetilde{E}(\lambda)N\right)^{2/(N-2)} - 1 < 0$ となる. したがって, $b \geq (\widetilde{E}(\lambda)N)^{-2/(N-2)}$ ならば (7) は非自明解を持たない.

証明. [6, 7] にある議論を用いる. まず (7) が非自明解 v_0 を持ったとする. このとき, $\alpha_0^2 := m\left(\|\nabla v_0\|_{L^2}^2\right)$, $w_0(x) := v_0(\alpha_0 x)$ とおくと w_0 は (6) を満たすことが分かる. したがって, $\widetilde{E}(\lambda)$ の定義より $\widetilde{E}(\lambda) \leq J_\lambda(w_0)$.

一方, 任意の (6) の解 w は次の Pohozaev の恒等式を満たす (証明については [10] を参照のこと):

$$0 = \frac{N-2}{2N}\|\nabla w\|_{L^2}^2 - \int_{\mathbf{R}^N} G_\lambda(w)\mathrm{d}x.$$

したがって, w が (6) の解ならば

$$J(w) = \frac{1}{N}\|\nabla w\|_{L^2}^2 \tag{8}$$

が成立し,

$$\widetilde{E}(\lambda) \leq J_\lambda(w_0) = \frac{1}{N}\|\nabla w_0\|_{L^2}^2 = \frac{\alpha_0^{2-N}}{N}\|\nabla v_0\|_{L^2}^2.$$

を得る. $N\widetilde{E}(\lambda)\alpha_0^{N-2} \leq \|\nabla v_0\|_{L^2}^2$, (m4) と α_0 の定義から

$$\alpha_0^2 = m\left(\|\nabla v_0\|_{L^2}^2\right) \geq m\left(N\widetilde{E}(\lambda)\alpha_0^{N-2}\right).$$

故に $h(\alpha_0) \leq 0$. 最後に (m1) から $h(0) > 0$ が成立するので中間値の定理より $h(s_0) = 0$ となる $s_0 \in (0, \alpha_0]$ が存在する.

次に $h(s_0) = 0$ が成立したとする. $\emptyset \neq \widetilde{\mathcal{S}}_0(\lambda)$ より $w_0 \in \widetilde{\mathcal{S}}_0(\lambda)$ とし, $v_0(x) := w_0(s_0^{-1}x)$ とおく. (8) より

$$\widetilde{E}(\lambda) = J_\lambda(w_0) = \frac{1}{N}\|\nabla w_0\|_{L^2}^2$$

が成立する. また $h(s_0) = 0$ より

$$s_0^2 = m\left(N\widetilde{E}(\lambda)s_0^{N-2}\right) = m\left(\|\nabla w_0\|_{L^2}^2 s_0^{N-2}\right) = m\left(\|\nabla v_0\|_{L^2}^2\right).$$

ここで v_0 は $-s_0^2\Delta v_0 = g_\lambda(v_0)$ を満たすことに注意すると v_0 は (7) の非自明解となる. □

注意 2.5. $N = 1, 2$ の場合でも (g1)–(g4) の条件の下, $\widetilde{\mathcal{S}}(\lambda) \neq \emptyset$ を示すことができ ([9, 31, 33] または [25, Section 2]), 上の議論はそのまま有効である. 特に $h(s)$ が $(0, \infty)$ 上零点を持っていれば m の単調性や連続性を仮定することなく (7) の非自明解を構成できる. したがって, $N = 1, 2$ の場合, $m \in C([0, \infty)$ が (m1) を満たせば, $h(s)$ は常に $(0, \infty)$ 上零点を持つことが分かるので, (7) は非自明解を持つ.

3 定理 1.3の証明

この節では [14, 15] の枠組みを使い，定理 2.3 において述べられている性質を用いて定理 1.3 の証明の大雑把な流れを述べる．この節では常に (V1), (V2), (f1)–(f4), (m1) を仮定し，$N \geq 3$ の場合は (m2)–(m5) も仮定する．また，平行移動を考えることにより $0 \in \mathcal{M} \subset \Omega$ と仮定しても良い．

まず初めに次のスケール変換 $\varepsilon y = x$ を施すことにより (P_ε) は次の問題に書き直せる:

$$-m\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)\Delta u + V(\varepsilon y)u = f(u) \quad \text{in } \mathbf{R}^N. \tag{9}$$

次に $\lambda = V_0$ として定理 2.3 を適用すると以下を満たす path $\gamma^\delta \in C([0,1], H^1(\mathbf{R}^N))$ が存在する:

$$\begin{cases} \gamma^\delta(0) = 0, \quad L_{V_0}(\gamma^\delta(1)) < -1, \quad \max\limits_{0\leq t\leq 1} L_{V_0}(\gamma^\delta(t)) = E(V_0), \\ \gamma^\delta([0,1]) \cap \mathcal{S}_0(V_0) \neq \emptyset, \quad L_{V_0}(\gamma^\delta(t)) < E(V_0) \quad \text{if } \|\gamma^\delta(t) - \mathcal{S}_0(V_0)\|_{H^1} \geq \delta. \end{cases} \tag{10}$$

$\delta > 0$ は命題 3.3 の後で固定される．

最後に (9) に対応する汎関数 I_ε と補助汎関数 J_ε を導入する．まず，各 $\varepsilon > 0$ に対して $\chi_\varepsilon, H_\varepsilon, H_\varepsilon^*$ を次の様に定める:

$$\chi_\varepsilon(y) := \begin{cases} 0 & \text{if } y \in \varepsilon^{-1}\Omega := \{\varepsilon^{-1}z \mid z \in \Omega\}, \\ \varepsilon^{-1} & \text{if } y \notin \varepsilon^{-1}\Omega, \end{cases}$$

$$H_\varepsilon := \left\{ u \in H^1(\mathbf{R}^N) \;\middle|\; \int_{\mathbf{R}^N} V(\varepsilon y)u^2 \mathrm{d}y < \infty \right\}, \quad H_\varepsilon^* := H_\varepsilon \text{ の双対空間},$$

$$\langle u, v\rangle_{H_\varepsilon} := \int_{\mathbf{R}^N} \nabla u \cdot \nabla v + V(\varepsilon y)uv\mathrm{d}y, \quad \|u\|_{H_\varepsilon} := \langle u, u\rangle_{H_\varepsilon}^{1/2}.$$

χ_ε はペナルティ関数であり，$(H_\varepsilon, \langle\cdot,\cdot\rangle_{H_\varepsilon})$ は Hilbert 空間である．また汎関数 $I_\varepsilon, Q_\varepsilon, J_\varepsilon \in C^1(H_\varepsilon, \mathbf{R})$ を

$$I_\varepsilon(u) := \frac{1}{2}M\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2\right) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^N} V(\varepsilon y)u^2\mathrm{d}y - \int_{\mathbf{R}^N} F(u)\mathrm{d}y,$$

$$Q_\varepsilon(u) := \left\{ \left(\int_{\mathbf{R}^N} \chi_\varepsilon u^2 \mathrm{d}y - 1 \right)_+ \right\}^2, \quad J_\varepsilon(u) := I_\varepsilon(u) + Q_\varepsilon(u).$$

ここで I_ε は (10) に対応する汎関数であり，I_ε の臨界点であることと H_ε に属する (10) の解であることは同値である．同様に J_ε は次の方程式に対応する汎関数である:

$$-m\left(\|\nabla u\|_{L^2}^2\right)\Delta u + V(\varepsilon y)u + 4\{Q_\varepsilon(u)\}^{1/2}\chi_\varepsilon u = f(u) \quad \text{in } \mathbf{R}^N, \quad u \in H_\varepsilon. \tag{11}$$

特に (11) の解 u で $Q_\varepsilon(u) = 0$ となるようなものを見つけることができれば (9) の解となる．

次に，$V(x)$ の増大度によっては $\gamma^\delta(t) \notin H_\varepsilon$ となるかもしれないので次の様な cut-off 関数を用意する．$10\beta := \operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathbf{R}^N \setminus \Omega)$ とおき，$\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$ として

$$0 \leq \varphi \leq 1, \quad \varphi(y) = 1 \quad \text{for } |y| \leq \beta, \quad \varphi(y) = 0 \quad \text{for } |y| \geq 2\beta$$

を満たすものをとる．$\varepsilon>0$ に対して $\varphi_\varepsilon(y):=\varphi(\varepsilon y)$ とおき，$\gamma_\varepsilon^\delta(t)(y):=\varphi_\varepsilon(y)\gamma^\delta(t)(y)$ を考えると $\gamma_\varepsilon^\delta\in C([0,1],H_\varepsilon)$. そこで,

$$C_{\varepsilon,\delta}:=\inf_{\gamma\in\Gamma_{\varepsilon,\delta}}\max_{0\le t\le 1}J_\varepsilon(\gamma(t)),\quad \Gamma_{\varepsilon,\delta}:=\left\{\gamma\in C([0,1],H_\varepsilon)\mid \gamma(0)=0,\ \gamma(1)=\gamma_\varepsilon^\delta(1)\right\}$$

とおく．ここで $\gamma_\varepsilon^\delta\in\Gamma_{\varepsilon,\delta}$ より $\Gamma_{\varepsilon,\delta}\neq\emptyset$ かつ

$$C_{\varepsilon,\delta}\le D_{\varepsilon,\delta}:=\max_{0\le t\le 1}J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^\delta(t))$$

が成立する．

補題 3.1. 各 $\delta>0$ に対して $\lim_{\varepsilon\to 0}C_{\varepsilon,\delta}=E(V_0)=\lim_{\varepsilon\to 0}D_{\varepsilon,\delta}$.

証明. $\lim_{\varepsilon\to 0}D_{\varepsilon,\delta}=E(V_0)$ を示す．まず，$\gamma^\delta\in C([0,1],H^1(\mathbf{R}^N))$ に注意すると $\gamma^\delta([0,1])$ は $H^1(\mathbf{R}^N)$ 上 compact. したがって，φ_ε の定義から次が成立する:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sup_{0\le t\le 1}\|\gamma^\delta(t)-\gamma_\varepsilon^\delta(t)\|_{H^1}=0.$$

これより，$t\in[0,1]$ について一様に

$$\frac{1}{2}M\left(\|\nabla\gamma_\varepsilon^\delta(t)\|_{L^2}^2\right)\to\frac{1}{2}M\left(\|\nabla\gamma^\delta(t)\|_{L^2}^2\right),\quad \int_{\mathbf{R}^N}\gamma_\varepsilon^\delta(t)\mathrm{d}y\to\int_{\mathbf{R}^N}\gamma^\delta(t)\mathrm{d}y.$$

更に $0\in\mathcal{M}$, $\operatorname{supp}\varphi_\varepsilon$ 上 $V(\varepsilon y)\le\overline{V}$ かつ $V(\varepsilon y)\to V(0)=V_0$ in $L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$ が成立しているので, $t\in[0,1]$ について一様に

$$\int_{\mathbf{R}^N}V(\varepsilon y)(\gamma_\varepsilon^\delta(t))^2\mathrm{d}y\to\int_{\mathbf{R}^N}V_0(\gamma^\delta(t))^2\mathrm{d}y.$$

これらのことと $Q_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^\delta(t))=0$ に注意すると

$$\lim_{\varepsilon\to 0}D_{\varepsilon,\delta}=\lim_{\varepsilon\to 0}\max_{0\le t\le 1}J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^\delta(t))=\max_{0\le t\le 1}L_{V_0}(\gamma^\delta(t))=E(V_0).$$

一方, $\liminf_{\varepsilon\to 0}C_{\varepsilon,\delta}\ge E(V_0)$ については [14, Proposition 3] と同様にすれば証明できる． □

次に,

$$X_\varepsilon:=\left\{\varphi_\varepsilon\left(y-\frac{x}{\varepsilon}\right)U\left(y-\frac{x}{\varepsilon}\right)\ \middle|\ x\in\mathcal{M}^\beta,\ U\in\mathcal{S}_0(V_0)\right\},\quad \mathcal{M}^\beta:=\mathcal{M}+B_\beta(0)$$

とおく．ここで各 $x\in\mathcal{M}^\beta$ に対して $Q_\varepsilon(\varphi_\varepsilon(\cdot-\varepsilon^{-1}x)U(\cdot-\varepsilon^{-1}x))=0$ となるので

$$\begin{aligned}&I_\varepsilon'(\varphi_\varepsilon(\cdot-\varepsilon^{-1}x)U(\cdot-\varepsilon^{-1}x))\psi=J_\varepsilon'(\varphi_\varepsilon(\cdot-\varepsilon^{-1}x)U(\cdot-\varepsilon^{-1}x))\psi\\ =&\int_{\mathbf{R}^N}m\left(\|\nabla(\varphi_\varepsilon U)\|_{L^2}^2\right)\nabla(\varphi_\varepsilon U)(y)\cdot\nabla\psi(y+\varepsilon^{-1}x)+V(\varepsilon y+x)(\varphi_\varepsilon U)(y)\psi(y+\varepsilon^{-1}x)\mathrm{d}y\\ &-\int_{\mathbf{R}^N}f(\varphi_\varepsilon U)(y)\psi(y+\varepsilon^{-1}x)\mathrm{d}y\\ =&o(1)\|\psi\|_{H_\varepsilon}\end{aligned}$$

となる．したがって，X_ε は (9) または (11) の近似解の集合である．

次に X_ε の近傍の点列の挙動に関する命題を述べる．この命題が X_ε の近傍上の Palais–Smale 列の生成や定理 1.3 の証明においても用いられるので以後の議論の中で重要な命題となる (命題3.3, 命題3.4 を参照のこと).

命題 3.2. ある $d_0 > 0$ が存在して

$$\begin{cases} \varepsilon_n \to 0, \quad u_{\varepsilon_n} \in X_{\varepsilon_n}^{d_0} := X_\varepsilon + B_{d_0}(0) = \{v \in H_\varepsilon \mid \mathrm{dist}_{H_\varepsilon}(v, X_\varepsilon) < d_0\}, \\ \lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}) \le E(V_0), \quad \|J'_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n})\|_{H^*_{\varepsilon_n}} \to 0 \end{cases}$$

を満たす任意の $(\varepsilon_n), (u_{\varepsilon_n})$ に対して部分列をとれば (部分列を取った後でも (ε_n) 等と記す), ある $(y_n) \subset \mathbf{R}^N$, $x_0 \in \mathcal{M}$ と $U \in \mathcal{S}_0(V_0)$ が存在して

$$y_n \to x_0, \quad \lim_{n\to\infty} \left\| u_{\varepsilon_n} - \varphi_{\varepsilon_n}\left(\cdot - \frac{y_n}{\varepsilon_n}\right) U\left(\cdot - \frac{y_n}{\varepsilon_n}\right)\right\|_{H_{\varepsilon_n}} = 0 \tag{12}$$

が成立する.

この命題は

$$\begin{cases} \varepsilon_n \to 0, \quad R_{\varepsilon_n} \ge \varepsilon_n^{-1}\mathrm{diam}\,\Omega, \ u_{\varepsilon_n} \in X_{\varepsilon_n}^{d_0} \cap H_0^1(B_{R_{\varepsilon_n}}(0)), \\ \lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}) \le E(V_0), \quad \|J'_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n})\|_{(H_0^1(B_{R_{\varepsilon_n}}(0)))^*} \to 0 \end{cases}$$

を満たす列に対しても成立する ($R_{\varepsilon_n} \ge \varepsilon^{-1}\mathrm{diam}\,\Omega$ より $X_{\varepsilon_n} \subset H_0^1(B_{R_{\varepsilon_n}}(0))$ となることに注意する).

命題 3.2 については証明しないが, (12) より $X_\varepsilon^{d_0}$ 内において (11) の解で $Q_\varepsilon(u) = 0$ となるものを見つけることができれば定理 1.3 において述べられている挙動をしていることに注意する.

次に, $X_\varepsilon^{d_0}$ 上に J_ε の (PS)-列が存在することを証明するのに必要な命題を述べる. これは命題 3.2 から導かれる. 合わせて $\delta > 0$ を固定するために必要な命題も述べる.

命題 3.3. (i) $d_0 > 0$ を命題 3.2 で現れた数とする. このとき, 任意の $d \in (0, d_0)$ に対して, $\varepsilon_d > 0$, $\rho_d > 0$, $\omega_d > 0$ が存在して

$$\|J'_\varepsilon(u)\|_{(H_0^1(B_R(0)))^*} \ge \omega_d$$

が全ての $u \in [J_\varepsilon \le E(V_0) + \rho_d] \cap \left(X_\varepsilon^{d_0} \setminus X_\varepsilon^d\right) \cap H_0^1(B_R(0))$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_d)$, $R \ge \varepsilon^{-1}\mathrm{diam}\,\Omega$ に対して成立する. ただし $[J_\varepsilon \le c] := \{u \in X_\varepsilon \mid J_\varepsilon(u) \le c\}$ とする.
(ii) ある $T_0 > 0$ が存在し次を満たす. 任意の $\delta > 0$ に対してある $\alpha_\delta > 0$ と $\varepsilon_\delta \in (0, 1]$ が存在して

$$\varepsilon \in (0, \varepsilon_\delta), \ J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^\delta(t)) \ge E(V_0) - \alpha_\delta \quad \Rightarrow \quad \gamma_\varepsilon^\delta(t) \in X_\varepsilon^{T_0\delta}.$$

証明. (i) だけ証明する. もし (i) の主張が成り立たないとすると, ある $d \in (0, d_0)$, (ε_n), (ρ_n), $(R_n), (u_n)$ が存在して, $\varepsilon_n, \rho_n \to 0$, $R_n \ge \varepsilon_n^{-1}\mathrm{diam}\,\Omega$,

$$u_n \in [J_{\varepsilon_n} \le E(V_0) + \rho_n] \cap \left(X_{\varepsilon_n}^{d_0} \setminus X_{\varepsilon_n}^d\right) \cap H_0^1(B_{R_n}(0)), \ \|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_{(H_0^1(B_{R_n}(0)))^*} \le \frac{1}{n}$$

が成り立つ. これより命題 3.2 が適用でき, $(y_n) \subset \mathbf{R}^N$, $x_0 \in \mathcal{M}$ と $U \in \mathcal{S}_0(V_0)$ が存在して

$$y_n \to x_0, \quad \left\| u_n - \varphi_{\varepsilon_n}\left(\cdot - \frac{y_n}{\varepsilon_n}\right) U\left(\cdot - \frac{y_n}{\varepsilon_n}\right)\right\|_{H_{\varepsilon_n}} \to 0.$$

したがって, 十分大きい n に対して $u_n \in X_{\varepsilon_n}^d$ となり矛盾する. □

命題 3.2 と命題 3.3 (ii) より $\delta_1 > 0$ を $T_0\delta_1 \leq d_0/4$ が成立するように取り，固定する．$\delta = \delta_1$ とすると命題 3.3 (ii) より $\alpha_1 := \alpha_{\delta_1}$, $\hat{\varepsilon}_1 := \varepsilon_{\delta_1}$ を固定できる．また，命題 3.3 (i) において現れる $d \in (0, d_0)$ を $d_1 = d := d_0/4$ として固定し，$\tilde{\varepsilon}_1 := \varepsilon_{d_1}$, $\rho_1 := \rho_{d_1}$, $\omega_1 := \omega_{d_1}$ とおく．以後は $\varepsilon \leq \min\{\hat{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_1\}$ として考える．

次に任意の $R > \varepsilon^{-1}\mathrm{diam}\,\Omega$ に対して

$$\gamma_\varepsilon^{\delta_1}(t) \in H_0^1(B_R(0)) \quad \text{for } 0 \leq t \leq 1, \quad X_\varepsilon \subset H_0^1(B_R(0))$$

が成り立つことに注意して

$$C_{\varepsilon,R} := \inf_{\gamma\in\Gamma_{\varepsilon,R}} \sup_{0\leq t\leq 1} J_\varepsilon(\gamma(t)),$$
$$\Gamma_{\varepsilon,R} := \{\gamma \in C([0,1], H_0^1(B_R(0))) \mid \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = \gamma_\varepsilon^{\delta_1}(1)\}$$

と定める．$\gamma_\varepsilon^{\delta_1} \in \Gamma_{\varepsilon,R}$ に注意すると次が分かる: 任意の $\varepsilon \in (0, \min\{\hat{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_1\})$ と $R > \varepsilon^{-1}\mathrm{diam}\,\Omega$ に対して

$$C_{\varepsilon,\delta_1} \leq C_{\varepsilon,R} \leq D_{\varepsilon,\delta_1}, \quad [J_\varepsilon \leq D_{\varepsilon,\delta_1}] \cap X_\varepsilon \cap H_0^1(B_R(0)) \neq \emptyset.$$

次に X_ε の $H_0^1(B_R(0))$ 上の近傍に J_ε に対する Palais–Smale 列が存在することを示す:

命題 3.4. ある $\bar{\varepsilon} \in (0, \min\{\hat{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_1\})$ が存在して，任意の $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ と $R > \varepsilon^{-1}\mathrm{diam}\,\Omega$ に対して

$$\inf\left\{\|J_\varepsilon'(u)\|_{(H_0^1(B_R))^*} \mid u \in [J_\varepsilon \leq D_{\varepsilon,\delta_1} + \varepsilon] \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap H_0^1(B_R(0))\right\} = 0. \tag{13}$$

証明. まず $\varepsilon \to 0$ とすると $C_{\varepsilon,\delta_1}, D_{\varepsilon,\delta_1} \to E(V_0)$, $J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^{\delta_1}(1)) \to L_{V_0}(\gamma^{\delta_1}(1)) < -1$ より $\bar{\varepsilon} \in (0, \min\{\hat{\varepsilon}_1, \tilde{\varepsilon}_1\})$ を次の様に固定する: $0 < \varepsilon < \bar{\varepsilon}$ ならば

$$D_{\varepsilon,\delta_1} + \varepsilon \leq E(V_0) + \rho_1, \quad D_{\varepsilon,\delta_1} - C_{\varepsilon,\delta_1} < \frac{\omega_1 d_0}{8}, \quad E(V_0) - \frac{\alpha_1}{2} < C_{\varepsilon,\delta_1}, \quad J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^{\delta_1}(1)) < 0. \tag{14}$$

(13) を示すために背理法を用いる．そこで，ある $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ と $R > \varepsilon^{-1}\mathrm{diam}\,\Omega$ が存在して

$$\tau(\varepsilon, R) := \inf\left\{\|J_\varepsilon'(u)\|_{(H_0^1(B_R))^*} \mid u \in [J_\varepsilon \leq D_{\varepsilon,\delta_1} + \varepsilon] \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap H_0^1(B_R(0))\right\} > 0 \tag{15}$$

が成立したとする．$Y(v)$ を $H_0^1(B_R(0))$ 上の J_ε に対する pseudo-gradient vector field とする．すなわち，$Y : \{u \in H_0^1(B_R(0)) \mid J_\varepsilon'(u) \neq 0\} \to H_0^1(B_R(0))$ は局所 Lipschitz 連続であり次の 2 つの性質を満たす:

$$\|Y(v)\|_{H_0^1(B_R(0))} \leq 2\|J_\varepsilon'(v)\|_{(H_0^1(B_R(0)))^*}, \quad J_\varepsilon'(v)Y(v) \geq \|J_\varepsilon'(v)\|^2_{H_0^1(B_R(0))^*}.$$

もし $J_\varepsilon \in C^2$ であれば $Y(v) := \nabla J_\varepsilon(v)$ とおけば良い．ただし $\nabla J_\varepsilon(v) \in H_0^1(B_R(0))$ は $J_\varepsilon'(v)u = \langle\nabla J_\varepsilon(v), u\rangle_{H_\varepsilon}$ をみたすものとする．$J_\varepsilon \in C^1$ の場合については [47] を参照のこと．また $\psi_1, \psi_2 : H_0^1(B_R(0)) \to \mathbf{R}$ を locally Lipschitz 連続関数かつ $0 \leq \psi_i(u) \leq 1$,

$$\psi_1(u) := \begin{cases} 1 & \text{if } u \in [E(V_0) - \alpha_1 \leq J_\varepsilon \leq D_{\varepsilon,\delta_1}], \\ 0 & \text{if } u \in [J_\varepsilon \leq E(V_0) - 2\alpha_1] \cup [D_{\varepsilon,\delta_1} + \varepsilon \leq J_\varepsilon], \end{cases}$$

$$\psi_2(u) := \begin{cases} 1 & \text{if } \|u - X_\varepsilon\|_{H_\varepsilon} \leq \dfrac{3}{4}d_0, \\ 0 & \text{if } \|u - X_\varepsilon\|_{H_\varepsilon} \geq d_0 \end{cases}$$

を満たすものをとり，次の常微分方程式を考える:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\eta(s;u) = -\frac{Y(\eta)}{\|Y(\eta)\|_{H_\varepsilon}}\psi_1(\eta)\psi_2(\eta), \quad \eta(0;u) = u. \tag{16}$$

(15), cut-off 関数 ψ_i と (16) の右辺の norm は 1 以下であるので各 u に対して (16) は一意解 $\eta(s;u)$ を持ち，更に命題 3.3 と合わせると次を満たす:

(i) $\eta \in C([0,\infty) \times H_0^1(B_R(0)), H_0^1(B_R(0)))$.
(ii) 各 $0 \le s < \infty$ と $u \in H_0^1(B_R(0))$ に対して $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}J_\varepsilon(\eta(s;u)) \le 0$.
(iii) $\eta(s,u) \in [J_\varepsilon \le D_{\varepsilon,\delta_1}] \cap \overline{X_\varepsilon^{3d_0/4} \setminus X_\varepsilon^{d_0/4}}$ ならば $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}J_\varepsilon(\eta(s;u)) \le -\omega_1/2$.
(iv) $\eta(s;u) \in [E(V_0) - \alpha_1 \le J_\varepsilon \le D_{\varepsilon,\delta_1}] \cap X_\varepsilon^{3d_0/4}$ ならば $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}J_\varepsilon(\eta(s;u)) \le -\tau(\varepsilon,R)/2$.
(v) $J_\varepsilon(\eta(s;u)) \le 0$ ならば $\eta(s;u) = u$.

次に

$$s_1 := \frac{\omega_1 d_0}{\tau(\varepsilon,R)}, \quad \zeta(t) := \eta(s_1;\gamma_\varepsilon^{\delta_1}(t)) \in C([0,1], H_0^1(B_R(0)))$$

とおく．(14) と上の性質を合わせると $\zeta \in \Gamma_{\varepsilon,R}$ となることが分かる．故に，$\eta(s;u)$ の性質をもう一度用いることにより，以下を成り立たせる $t_1 \in (0,1)$ が存在する:

$$E(V_0) - \frac{\alpha_1}{2} < C_{\varepsilon,\delta_1} \le C_{\varepsilon,R} \le J_\varepsilon(\zeta(t_1)) \le J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^{\delta_1}(t_1)) \le D_{\varepsilon,\delta_1}. \tag{17}$$

δ_1 の取り方と命題 3.3 (ii) を思い出すと $\gamma_\varepsilon^{\delta_1}(t_1) \in X_\varepsilon^{d_0/4} \cap [E(V_0) - \alpha_1 \le J_\varepsilon \le D_{\varepsilon,\delta_1}]$ となる．ここで次の２つの場合が考えられる:
(I) ある $s \in [0,s_1]$ が存在して $\eta(s;\gamma_\varepsilon^{\delta_1}(t_1)) \notin X_\varepsilon^{3d_0/4}$.
(II) 全ての $s \in [0,s_1]$ に対して $\eta(s;\gamma_\varepsilon^{\delta_1}(t_1)) \in X_\varepsilon^{3d_0/4}$.

(I) が起こったとすると，$\|\mathrm{d}\eta/\mathrm{d}s\|_{H_\varepsilon} \le 1$ かつ $\gamma_\varepsilon^{\delta_1}(t) \in X_\varepsilon^{d_0/4}$ より，ある区間 $[s_2,s_3] \subset [0,s_1]$ が存在して

$$s_3 - s_2 \ge \frac{d_0}{2}, \quad \eta(s;\gamma_\varepsilon^{\delta_1}(t_1)) \in \overline{X^{3d_0/4} \setminus X_\varepsilon^{d_0/4}} \quad \text{in } [s_2,s_3].$$

したがって，(14) と $\eta(s;u)$ の性質より

$$\begin{aligned} C_{\varepsilon,\delta_1} \le J_\varepsilon(\zeta(t_1)) &= J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^{\delta_1}(t_1)) + \int_0^{s_1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}J_\varepsilon(\eta(s;\gamma_\varepsilon^{\delta_1}))\mathrm{d}s \\ &\le D_{\varepsilon,\delta_1} + \int_{s_2}^{s_3} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}J_\varepsilon(\eta(s;\gamma_\varepsilon^{\delta_1}(t_1)))\mathrm{d}s \le D_{\varepsilon,\delta_1} - \frac{\omega_1 d_0}{4} < C_{\varepsilon,\delta_1} \end{aligned}$$

となり矛盾する．したがって，(I) は起こらない．

次に (II) が起こったとする．(14) と s_1 の定義より

$$C_{\varepsilon,\delta_1} \le J_\varepsilon(\zeta(t_1)) \le D_{\varepsilon,\delta_1} - \frac{1}{2}\tau(\varepsilon,R)s_1 = D_{\varepsilon,\delta_1} - \frac{\omega_1 d_0}{2} < C_{\varepsilon,\delta_1}$$

となり矛盾する．故に (II) も起こりえないので (15) は成立しない．これで命題 3.4 の証明が終わる． □

定理 1.3 の証明を与える:

定理 1.3 の証明. 命題 3.4 により, 各 $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$ と $R > \varepsilon^{-1}\mathrm{diam}\,\Omega$ に対して次を満たす列 $(u_{\varepsilon,R,n})$ を見つけることができる:

$$u_{\varepsilon,R,n} \in [J_\varepsilon \le D_{\varepsilon,\delta_1} + \varepsilon] \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap H_0^1(B_R(0)), \quad \|J_\varepsilon'(u_{\varepsilon,R,n})\|_{(H_0^1(B_R(0)))^*} \to 0 \quad \text{as } n \to \infty.$$

まず, $(u_{\varepsilon,R,n})$ は $X_\varepsilon^{d_0}$ に属しており, X_ε は $H_0^1(B_R(0))$ の有界集合であるので, $(u_{\varepsilon,R,n})$ も $H_0^1(B_R(0))$ 上の有界列である. これより弱収束部分列を引き抜くことができるので $u_{\varepsilon,R,n} \rightharpoonup u_{\varepsilon,R}$ とする. 埋め込みの compact 性から $1 \le p < 2^*$ ($N = 1,2$ のときは $2^* = \infty$, それ以外の場合 $2^* = 2N/(N-2)$ とする) に対して $u_{\varepsilon,R,n} \to u_{\varepsilon,R}$ strongly in $L^p(B_R(0))$ とできる. したがって, 仮定 (f3) を用いると

$$f(u_{\varepsilon,n,R}) \to f(u_{\varepsilon,R}) \quad \text{strongly in } L^{p_N}(B_R(0)).$$

ただし, $p_N = 2$ $(N = 1,2)$, $p_N = 2N/(N+2)$ $(N \ge 3)$ である. 特に, $(H_0^1(B_R))^*$ において強収束する: $f(u_{\varepsilon,n,R}) \to f(u_{\varepsilon,R})$. 同様に $(Q_\varepsilon'(u_{\varepsilon,R,n}))_{n=1}^\infty$ も $(H_0^1(B_R))^*$ 上強収束する部分列を持ち, $m_n := m\left(\|\nabla u_{\varepsilon,R,n}\|_{L^2}^2\right)$ は正の値に収束する部分列を持つ. 故に $(-\Delta + V(\varepsilon y)/m_n)^{-1} : (H_0^1(B_R(0)))^* \to H_0^1(B_R(0))$ の有界性と

$$u_{\varepsilon,n,R} = (-\Delta + V(\varepsilon y)/m_n)^{-1}\, m_n^{-1}\left\{f(u_{\varepsilon,R,n}) - Q_\varepsilon'(u_{\varepsilon,R,n}) + o(1)\right\} \quad \text{in } H_0^1(B_R(0))$$

より $(u_{\varepsilon,n,R})$ が $H_0^1(B_R(0))$ において強収束列を持つことが分かる: $u_{\varepsilon,R,n} \to u_{\varepsilon,R}$ strongly in $H_0^1(B_R(0))$. このとき, $u_{\varepsilon,R}$ は次の方程式の解となっている:

(18)

$$\begin{cases} -m\left(\|\nabla u_{\varepsilon,R}\|_{L^2}^2\right)\Delta u_{\varepsilon,R} + \left\{V(\varepsilon y) + 4\left(Q_\varepsilon(u_{\varepsilon,R})\right)^{1/2}\chi_\varepsilon(y)\right\}u_{\varepsilon,R} = f(u_{\varepsilon,R}) & \text{in } B_R(0), \\ u_{\varepsilon,R} = 0 & \text{on } \partial B_R(0). \end{cases}$$

更に $u_{\varepsilon,R} \in [J_\varepsilon \le D_{\varepsilon,\delta_1} + \varepsilon] \cap X_\varepsilon^{d_0}$ も満たしている. したがって, $(u_{\varepsilon,R})_R$ は H_ε 上の有界列であり, $J_\varepsilon(u_{\varepsilon,R}) \le D_{\varepsilon,\delta_1} + \varepsilon$ より $(Q(u_{\varepsilon,R}))_R$ も有界. これより

$$u_{\varepsilon,R} \rightharpoonup u_\varepsilon \quad \text{weakly in } H_\varepsilon, \quad 4\left(Q_\varepsilon(u_{\varepsilon,R})\right)^{1/2} \to \beta_\varepsilon, \quad m\left(\|\nabla u_{\varepsilon,R}\|_{L^2}^2\right) \to \alpha_\varepsilon \tag{19}$$

とできる. $(u_{\varepsilon,R})_R$ の弱収束性と X_ε の compact 性および $X_\varepsilon^{d_0}$ の定義から $u_{\varepsilon,R} \in X_\varepsilon^{d_0}$ となることがわかり, また $u_{\varepsilon,R} \ne 0$ かつ

$$-\alpha_\varepsilon \Delta u_\varepsilon + (V(\varepsilon y) + \beta_\varepsilon \chi_\varepsilon(y))\, u_\varepsilon = f(u_\varepsilon) \quad \text{in } \mathbf{R}^N. \tag{20}$$

次の目標は, 十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して $(u_{\varepsilon,R})_R$ の H_ε における強収束性を示すことである. まず, 仮定 (f3), Brezis–Kato の方法 ([13]) と楕円型正則性 ([29]) を用いると, 全ての $p < \infty$ に対して $u_{\varepsilon,R} \to u_\varepsilon$ in $W^{2,p}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^N)$. 一方, $Q_\varepsilon(u_{\varepsilon,R}) \le C_0$ が全ての $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$, $R > \varepsilon^{-1}\mathrm{diam}\,\Omega$ について成り立つことに注意すると

$$\int_{\mathbf{R}^N \setminus \varepsilon^{-1}\Omega} |u_{\varepsilon,R}|^2 \mathrm{d}y \le C_1 \varepsilon$$

を得ることができる. この L^2-評価と Brezis–Kato の議論, 楕円型正則性を合わせると次の主張を示すことができる: 任意の $\eta > 0$ に対してある $\varepsilon_\eta > 0$ が存在して $\varepsilon \le \varepsilon_\eta$ かつ $R > 2\varepsilon^{-1}\mathrm{diam}\,\Omega$ ならば

$$u_{\varepsilon,R}(y) \le \eta \quad \text{for all } y \in \mathbf{R}^N \setminus \left(2\varepsilon^{-1}\Omega\right).$$

ここで仮定 (f2) を思い出すと, ある $\xi_0 > 0$ が存在して $\eta = \eta_0 > 0$ を十分小さくとることにより

$$f(u_{\varepsilon,R}(y)) < (\underline{V} - \xi_0)\, u_{\varepsilon,R}(y) \leq V(\varepsilon y) u_{\varepsilon,R}(y) \quad \text{for each } y \in B_R(0) \setminus (2\varepsilon^{-1}\Omega).$$

故に (18) と $\alpha_{\varepsilon,R} := m(\|\nabla u_{\varepsilon,R}\|_{L^2}^2)$ が 0 から一様に浮いていることを用いると,

$$-\Delta u_{\varepsilon,R} + \xi_1 u_{\varepsilon,R} \leq 0 \quad \text{in } B_R(0) \setminus (2\varepsilon^{-1}\Omega)$$

を満たすような $\xi_1 > 0$ が存在する. 比較原理を用いると ε, R に無関係な $c_1, c_2 > 0$ が存在して各 $\varepsilon < \varepsilon_{\eta_0}$, $R > 2\varepsilon^{-1}\mathrm{diam}\,\Omega$ に対して

$$u_{\varepsilon,R}(y) \leq c_1 \exp(-c_2|y|) \quad \text{for all } y \in \mathbf{R}^N.$$

特に, 任意の $q < \infty$ に対して $u_{\varepsilon,R} \to u_\varepsilon$, $f(u_{\varepsilon,R}) \to f(u_\varepsilon)$ strongly in $L^q(\mathbf{R}^N)$ となり, $(u_{\varepsilon,R})$ の H_ε 上における強収束性を導ける. 実際, (18), (19), (20) と上の強収束性より

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbf{R}^N} \alpha_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 + (V(\varepsilon y) + \beta_\varepsilon \chi_\varepsilon) u_\varepsilon^2 \mathrm{d}y \\
\leq &\liminf_{R\to\infty} \int_{\mathbf{R}^N} m(\|\nabla u_{\varepsilon,R}\|_{L^2}^2)|\nabla u_{\varepsilon,R}|^2 + (V(\varepsilon y) + 4(Q_\varepsilon(u_{\varepsilon,R}))^{1/2}\chi_\varepsilon) u_{\varepsilon,R}^2 \mathrm{d}y \\
\leq &\limsup_{R\to\infty} \int_{\mathbf{R}^N} m(\|\nabla u_{\varepsilon,R}\|_{L^2}^2)|\nabla u_{\varepsilon,R}|^2 + (V(\varepsilon y) + 4(Q_\varepsilon(u_{\varepsilon,R}))^{1/2}\chi_\varepsilon) u_{\varepsilon,R}^2 \mathrm{d}y \\
\leq &\limsup_{R\to\infty} \int_{\mathbf{R}^N} f(u_{\varepsilon,R}) u_{\varepsilon,R} \mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^N} f(u_\varepsilon) u_\varepsilon \mathrm{d}y = \int_{\mathbf{R}^N} \alpha_\varepsilon |\nabla u_\varepsilon|^2 + (V(\varepsilon y) + \beta_\varepsilon \chi_\varepsilon) u_\varepsilon^2 \mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

したがって,

$$\|\nabla u_{\varepsilon,R}\|_{L^2}^2 \to \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}^2, \quad \int_{\mathbf{R}^N} V(\varepsilon y) u_{\varepsilon,R}^2 \mathrm{d}y \to \int_{\mathbf{R}^N} V(\varepsilon y) u_\varepsilon^2 \mathrm{d}y$$

が成り立ち, $(u_{\varepsilon,R})$ が u_ε に H_ε 上弱収束していたので $u_{\varepsilon,R} \to u_\varepsilon$ strongly in H_ε が成り立つ.

以上により $u_\varepsilon \in [J_\varepsilon \leq D_{\varepsilon,\delta_1} + \varepsilon] \cap X_\varepsilon^{d_0}$, $\beta_\varepsilon = 4\,(Q_\varepsilon(u_\varepsilon))^{1/2}$ となり, u_ε は次の正値解:

$$-m\left(\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}^2\right) \Delta u_\varepsilon + \left(V(\varepsilon y) + 4\,(Q_\varepsilon(u_\varepsilon))^{1/2}\,\chi_\varepsilon(y)\right) u_\varepsilon = f(u_\varepsilon) \quad \text{in } \mathbf{R}^N.$$

最後に $Q_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$ を示すことができれば, (u_ε) は (9) の正値解であり, $u_\varepsilon \in [J_\varepsilon \leq D_{\varepsilon,\delta_1} + \varepsilon] \cap X_\varepsilon^{d_0}$ かつ補題 3.1, 命題 3.2 を用いると定理 1.3 において記述されている挙動を持つことが分かる. 背理法で示すのである列 (ε_n) が存在して $\varepsilon_n \to 0$, $Q_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}) > 0$ が成り立つとする. このとき, 命題 3.2 を適用することにより, ある $U_0 \in \mathcal{S}_0(V_0)$ と $(y_n) \subset \mathcal{M}^\beta$ を見つけることができ,

$$y_n \to y_0 \in \mathcal{M}, \quad \left\| u_{\varepsilon_n} - \varphi_{\varepsilon_n}\left(\cdot - \frac{y_n}{\varepsilon_n}\right) U_0 \left(\cdot - \frac{y_n}{\varepsilon_n}\right) \right\|_{H_{\varepsilon_n}} \to 0.$$

そこで, $v_n(y) := u_n(y + \varepsilon_n^{-1} y_n)$ とおくと v_n は $v_n \to U_0$ strongly in $H^1(\mathbf{R}^N)$ かつ

$$-m\left(\|\nabla v_n\|_{L^2}^2\right) \Delta v_n + \left\{V(\varepsilon_n y + y_n) + 4\,(Q(u_{\varepsilon_n}))^{1/2}\,\chi(\varepsilon_n y + y_n)\right\} v_n = f(v_n) \quad \text{in } \mathbf{R}^N$$

を満たす．再び楕円型正則性や比較原理をを用いることにより

$$v_n \to U_0 \quad \text{strongly in } L^\infty(\mathbf{R}^N), \quad v_n(y) \le c_1 \exp(-c_2|y|) \quad \text{in } \mathbf{R}^N$$

を示すことができる．ただし $c_1, c_2 > 0$ は n に依存していない．$0 \in \mathcal{M}$, $y_n \in \mathcal{M}^\beta$ かつ $\mathcal{M}^{2\beta} \subset \Omega$ に注意すると，$y \notin \varepsilon_n^{-1}(\Omega - y_n)$ であれば $\varepsilon_n|y| \ge \beta$ が成り立つ．したがって，

$$\varepsilon_n^{-1} \int_{\mathbf{R}^N \setminus \varepsilon_n^{-1}\Omega} u_n^2 \mathrm{d}y = \varepsilon_n^{-1} \int_{\mathbf{R}^N \setminus \varepsilon_n^{-1}(\Omega - y_n)} v_n^2(y) \mathrm{d}y \le \varepsilon_n^{-1} \int_{|y| \ge \varepsilon_n^{-1}\beta} c_1 \exp(-c_2|y|) \mathrm{d}y \to 0.$$

Q_ε の定義を思い出すと十分大きな n に対して $Q_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}) = 0$ となるがこれは矛盾する．故に十分小さな $\varepsilon > 0$ に対しては $Q_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$ が成り立ち，定理 1.3 の証明が完了する． □

References

[1] C.O. Alves, F.J.S.A. Corrêa and T.F. Ma, *Positive solutions for a quasilinear elliptic equation of Kirchhoff type.* Comput. Math. Appl., **49** (2005), no. 1, 85–93.

[2] C.O. Alves and G. M. Figueiredo, *Nonlinear perturbations of a periodic Kirchhoff equation in* $\mathbb{R}^N$. Nonlinear Anal. **75** (2012), no. 5, 2750–2759.

[3] A. Ambrosetti, M. Badiale and S. Cingolani, *Semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations.* Arch. Rational Mech. Anal. **140** (1997), no. 3, 285–300.

[4] A. Ambrosetti and A. Malchiodi, Perturbation methods and semilinear elliptic problems on $\mathbf{R}^n$. Progress in Mathematics, **240**. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.

[5] A. Ambrosetti, A. Malchiodi and W.-M. Ni, *Singularly perturbed elliptic equations with symmetry: existence of solutions concentrating on spheres. I.* Comm. Math. Phys. **235** (2003), no. 3, 427–466.

[6] A. Azzollini, *The elliptic Kirchhoff equation in* $\mathbb{R}^N$ *perturbed by a local nonlinearity.* Differential Integral Equations **25** (2012), no. 5-6, 543–554.

[7] A. Azzollini, *A note on the elliptic Kirchhoff equation in* $\mathbb{R}^N$ *perturbed by a local nonlinearity.* to appear in Communications in Contemporary Mathematics.

[8] A. Azzollini, d'Avenia and A. Pomponio, *A. Multiple critical points for a class of nonlinear functionals.* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **190** (2011), no. 3, 507–523.

[9] H. Berestycki, T. Gallouët and O. Kavian, *Équations de champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **297** (1983), no. 5, 307–310.

[10] H. Berestycki and P.-L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state.* Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), no. 4, 313–345.

[11] H. Berestycki and P.-L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. II. Existence of infinitely many solutions.* Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), no. 4, 347–375.

[12] J.M. Bony, *Principe du maximum dans les espaces de Sobolev.* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B **265**(1967), A333–A336.

[13] H. Brézis and T. Kato, *Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials.* J. Math. Pures Appl. (9) **58** (1979), no. 2, 137–151.

[14] J. Byeon, and L. Jeanjean, *Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity.* Arch. Ration. Mech. Anal. **185** (2007), no. 2, 185–200 and Arch. Ration. Mech. Anal. **190** (2008), no. 3, 549–551.

[15] J. Byeon, L. Jeanjean and K. Tanaka, *Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity: one and two dimensional cases.* Comm. Partial Differential Equations **33** (2008), no. 4-6, 1113–1136.

[16] J. Byeon and K. Tanaka, *Semi-classical standing waves for nonlinear Schrödinger equations at structurally stable critical points of the potential.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **15** (2013), no. 5, 1859–1899.

[17] J. Byeon and K. Tanaka, *Semiclassical Standing Waves with Clustering Peaks for Nonlinear Schrödinger Equations.* Mem. Amer. Math. Soc. **229** (2014), no. 1076.

[18] J. Byeon and Z.Q. Wang, *Standing waves with a critical frequency for nonlinear Schrödinger equations.* Arch. Ration. Mech. Anal. **165** (2002), 295–316.

[19] M. del Pino and P.L. Felmer, *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains.* Calc. Var. Partial Differential Equations **4** (1996), no. 2, 121–137.

[20] M. del Pino and P.L. Felmer, *Semi-classical states for nonlinear Schrödinger equations.* J. Funct. Anal. **149** (1997), no. 1, 245–265.

[21] M. del Pino and P.L. Felmer, *Multi-peak bound states for nonlinear Schrödinger equations.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **15** (1998), no. 2, 127–149.

[22] M. del Pino, and P.L. Felmer, *Semi-classical states of nonlinear Schrödinger equations: a variational reduction method.* Math. Ann. **324** (2002), no. 1, 1–32.

[23] Y. Du, Order Structure and Topological Methods in Nonlinear Partial Differential Equations, Vol. 1, Maximum Principles and Applications, World Scientific, Singapore, 2006.

[24] G.M. Figueiredo, *Existence of positive solution for a Kirchhoff problem type with critical growth via truncation argument.* J. Math. Anal. Appl. **401** (2013), no. 2, 706–713.

[25] G.M. Figueiredo, N. Ikoma and J.R. Santos Júnior, *Existence and concentration result for the Kirchhoff type equations with general nonlinearities.* Arch. Ration. Mech. Anal. **213** (2014), no. 3, 931–979.

[26] G. M. Figueiredo and J. R. Santos Junior, *Multiplicity of solutions for a Kirchhoff equation with subcritical or critical growth.* Differential Integral Equations **25** (2012), no. 9-10, 853–868.

[27] G.M. Figueiredo and J.R. Santos Junior, *Multiplicity and concentration behavior of positive solutions for a Schrödinger-Kirchhoff type problem via penalization method.* ESAIM Control Optim. Calc. Var. **20** (2014), no. 2, 389–415.

[28] A. Floer and A. Weinstein, *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential.* J. Funct. Anal. **69** (1986), no. 3, 397–408.

[29] D. Gilbarg and N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[30] X. He and W. Zou, *Existence and concentration behavior of positive solutions for a Kirchhoff equation in* $\mathbb{R}^3$. J. Differential Equations **252** (2012), no. 2, 1813–1834.

[31] J. Hirata, N. Ikoma and K. Tanaka, *Nonlinear scalar field equations in* $\mathbf{R}^N$*: mountain pass and symmetric mountain pass approaches.* Topol. Methods Nonlinear Anal. **35** (2010), no. 2, 253–276.

[32] N. Ikoma, *Existence of ground state solutions to the nonlinear Kirchhoff type equations with potentials.* Discrete Contin. Dyn. Syst. **35** (2015), no. 3, 943–966.

[33] L. Jeanjean and K. Tanaka, *A note on a mountain pass characterization of least energy solutions.* Adv. Nonlinear Stud. **3** (2003), no. 4, 445–455.

[34] L. Jeanjean and K. Tanaka, *Singularly perturbed elliptic problems with superlinear or asymptotically linear nonlinearities.* Calc. Var. Partial Differential Equations **21** (2004), no. 3, 287–318.

[35] X. Kang and J. Wei, *On interacting bumps of semi-classical states of nonlinear Schrödinger equations.* Adv. Differential Equations **5** (2000), no. 7-9, 899–928.

[36] G. Kirchhoff, Mechanik, Teubner, Leipzig, 1883.

[37] G. Li and H. Ye, *Existence of positive solutions for nonlinear Kirchhoff type problems in* $\mathbb{R}^3$ *with critical Sobolev exponent.* Math. Methods Appl. Sci. **37** (2014), no. 16, 2570–2584 .

[38] G. Li and H. Ye, *Existence of positive ground state solutions for the nonlinear Kirchhoff type equations in* $\mathbb{R}^3$. J. Differential Equations **257** (2014), no. 2, 566–600.

[39] Y. Li, *On a singularly perturbed elliptic equation.* Adv. Differential Equations **2** (1997), no. 6, 955–980.

[40] Y. Li, F. Li and J. Shi, *Existence of a positive solution to Kirchhoff type problems without compactness conditions.* J. Differential Equations **253** (2012), no. 7, 2285–2294.

[41] Z. Liang, F. Li and J. Shi, *Positive solutions to Kirchhoff type equations with nonlinearity having prescribed asymptotic behavior.* Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **31** (2014), no. 1, 155–167.

[42] J.-L. Lions, *On some questions in boundary value problems of mathematical physics.* Contemporary developments in continuum mechanics and partial differential equations (Proc. Internat. Sympos., Inst. Mat., Univ. Fed. Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1977), pp. 284–346, North-Holland Math. Stud., **30**, North-Holland, Amsterdam-New York, 1978.

[43] P.-L. Lions, *A remark on Bony maximum principle.* Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), no. 3, 503–508.

[44] T.F. Ma, *Remarks on an elliptic equation of Kirchhoff type.* Nonlinear Anal., **63** (2005), no. 5-7, e1967–e1977.

[45] Y.-G. Oh, *Existence of semiclassical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials of the class* $(V)_a$. Comm. Partial Differential Equations **13** (1988), no. 12, 1499–1519 and Comm. Partial Differential Equations **14** (1989), no. 6, 833–834.

[46] S.I. Pohozaev, *A certain class of quasilinear hyperbolic equations,* Mat. Sb. (N.S.) **96** (**138**) (1975), 152–166, 168.

[47] P.H. Rabinowitz, Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, **65**. the American Mathematical Society, Providence, RI, 1986.

[48] P. H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations.* Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), no. 2, 270–291.

[49] W.A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions.* Comm. Math. Phys. **55** (1977), no. 2, 149–162.

[50] J. Wang, L. Tian, J. Xu and F. Zhang, *Multiplicity and concentration of positive solutions for a Kirchhoff type problem with critical growth.* J. Differential Equations **253** (2012), no. 7, 2314–2351.

[51] X. Wang, *On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations.* Comm. Math. Phys. **153** (1993), no. 2, 229–244.

[52] X. Wang and B. Zeng, *On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations with competing potential functions.* SIAM J. Math. Anal. **28** (1997), no. 3, 633–655.

[53] X. Wu, *Existence of nontrivial solutions and high energy solutions for Schrödinger-Kirchhoff-type equations in* $\mathbf{R}^N$. Nonlinear Anal. Real World Appl. **12** (2011), no. 2, 1278–1287.