

# 信号処理における再生核, Reproducing Kernel in Signal Processing

東京都市大学 知識工学部 自然科学科  
吉野邦生

Kunio Yoshino

Tokyo City University, Faculty of Knowledge Engineering,  
Department of Natural Sciences

## 1 Introduction

デジタル信号処理とは簡単に言えば, アナログ・データ (連続変数の関数, 信号) からデジタル・データ (離散変数の関数, 言い換えると数列) を取りだし, 取り出したデジタル・データから元のアナログ・データを再現する事である. デジタル信号処理で最も重要な定理は, シヤノン - 染谷の標本化定理であろう. 標本化定理は, デジタル信号処理だけでなくレーザーの研究に関係するコヒーレンス理論の分野でも使われている ([7]). この論説では, 標本化定理に関係するペーリー・ウイナー空間における再生核, 及びテプリッツ作用素について報告する. テプリッツ作用素の固有関数は, 偏重楕円体関数と呼ばれ興味深い性質を持ちデジタル信号処理に応用されている ([2], [18], [19]).

## 2 シヤノン - 染谷の標本化定理

ここでは, クロード・シヤノンと染谷勲により, 1949年に独立に発表されたデジタル信号処理で有名なシヤノン - 染谷の標本化定理 ([15],[16]) を紹介する.

—— 標本化定理 ([3], [4], [20]) ——

関数  $f(t)$  が次の条件 (1), (2)

$$(1) \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt < \infty, \quad (2) \hat{f}(\xi) = 0, \quad (|\xi| > \pi).$$

を満たしているとき

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

が成り立つ。

次の展開式はシャノン - 染谷の標本化定理の例である ([7]).

$$\frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)} \frac{\sin \pi(y-n)}{\pi(y-n)}$$

**注意** シャノン - 染谷の標本化定理の歴史的背景等については [12], [17] が詳しい. シャノンの著書 ”通信の数学的理論” は, 2009 年に復刊されたので入手可能であるが染谷の著書 ”波形伝送” は, 現在入手困難である.

## 2.1 帯域制限関数 (Band Limited Functions)

関数 (信号)  $f(t)$  のフーリエ変換  $\hat{f}(\xi)$  が有界な台を持つ時,  $f(t)$  は”帯域制限関数 (信号)” であると呼ばれる. いくつかの例を挙げよう.

### 例 1

$$f(x) = \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)}, \quad \hat{f}(\xi) = e^{-i\xi n} \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi)$$

ここで  $\chi_{[-\pi, \pi]}(\xi)$  は, 閉区間  $[-\pi, \pi]$  の特性関数である.

### 例 2 ([5], [10])

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} J_{\nu}(x), \quad (J_{\nu}(x) : \nu \text{ 次のベッセル関数})$$

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} (1-\xi^2)^{\nu-1/2}, & |\xi| < 1 \\ 0, & |\xi| > 1 \end{cases}$$

### 例 3

$$f(x) = \cos ax$$

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \{ \delta(\xi + a) + \delta(\xi - a) \}, \quad (\delta: \text{ディラックのデルタ関数})$$

#### 例 4([10])

$$f(x) = \frac{\Gamma(a+b-1)}{\Gamma(a+x)\Gamma(b-x)}, \quad \Gamma: \text{オイラー・ガンマ関数}$$

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} (2 \cos \frac{\xi}{2})^{a+b-2} \exp(\frac{i(b-a)\xi}{2}), & |\xi| < \pi \\ 0, & |\xi| > \pi \end{cases}$$

#### 例 5([4], [18], [19]) 偏重楕円体関数

**注意 1** ガウス関数  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  のフーリエ変換は、 $\sqrt{2\pi}e^{-\frac{\xi^2}{2}}$  であり台が全空間に広がっているのでガウス関数は帯域制限関数ではない。

**注意 2** 実数値を取る帯域制限関数に対しては、次が成り立つ。

#### 命題 1

1.  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp } \hat{f}(\xi) \subset [0, \infty)$  とする.  $f(x)$  が実数値関数 ( $f(x) \in \mathbb{R}$ ) であると  $f(x) = 0$ .
2.  $f(x) \in L^2(\mathbb{R})$ ,  $\text{supp } \hat{f}(\xi) \subset [0, a]$  とする.  $f(x)$  が実数値関数 ( $f(x) \in \mathbb{R}$ ) であると  $f(x) = 0$ .

## 2.2 帯域制限関数とシャノン - 染谷の標本化定理

帯域制限という言葉を使うと標本化定理を次の様に表現できる。

### 標本化定理 ([3], [4], [20])

関数 (信号)  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  が帯域制限条件  $\hat{f}(\xi) = 0$ , ( $|\xi| > \pi$ ) を満たしているとき

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

が成り立つ。

標本化定理を証明する方法にはいくつかの方法がある。

1. フーリエ変換とフーリエ級数を組み合わせる方法 (非常に標準的な方法でデジタル信号処理の本では大体この方法が採用されている)

2. 佐藤超関数 (hyperfunctions) による方法 ([20])
3. 再生核の理論を使う方法 (すぐあとで紹介する)
4. Poisson(ポワソン) 和公式を用いる方法 ([6])

ここで 1 のフーリエ変換とフーリエ級数を組み合わせる標準的な方法で標本化定理を導いてみよう. フーリエ逆変換の公式と帯域制限条件から

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\xi) e^{i\xi t} d\xi \text{ が成り立つ.}$$

$\hat{f}(\xi)$  のフーリエ展開

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\xi}, \quad (a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(\xi) e^{in\xi} d\xi = f(n))$$

を代入すると

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\xi} \right) e^{i\xi t} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\xi} e^{i\xi t} d\xi \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\xi} e^{i\xi t} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}. \end{aligned}$$

**注意** 佐藤超関数については [14], [21], [22], [23] を参照してください。

### 3 Paley - Wiener Space(ペーリー・ウィナー空間) $PW(a)$

$a > 0$  に対し  $PW(a) = \{f(x) \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp}(\hat{f}(\xi)) \subset [-a, a]\}$  とおく. 定義から判るように  $PW(a)$  は, 帯域が  $[-a, a]$  に制限された二乗可積分関数の作る空間である. 指数型整関数に対するペーリー・ウィナーの定理 ([1], [8], [13]) を使うと

$PW(a) = \{f(x) \in L^2(\mathbb{R}) : f(x+iy)$  は整関数,  $\exists A > 0, s.t. |f(x+iy)| \leq Ae^{a|y|}\}$  と表示する事もできる.

#### 3.1 $L^2(\mathbb{R})$ の直交分解とペーリー・ウィナー空間 $PW(a)$

$PW(a)$  と  $L^2(\mathbb{R})$  との関係を説明しよう.

$$A = \{h(x) \in L^2(\mathbb{R}) : h(x) = 0, \quad (|x| \leq a)\}$$

$$A^\perp = \{h(x) \in L^2(\mathbb{R}) : h(x) = 0, \quad (|x| > a)\}$$

とおくと  $L^2(\mathbb{R})$  は次のように直交分解される.

$$L^2(\mathbb{R}) = A \oplus A^\perp$$

$A, A^\perp$  共に  $L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間である.  $g(x) \in L^2(\mathbb{R})$  の閉部分空間  $A^\perp$  への射影は  $\chi_{[-a,a]}(x)g(x)$  で与えられる.  $\chi_{[-a,a]}(x)$  は閉区間  $[-a, a]$  の特性関数である. 信号処理の分野では, この操作をフィルターを掛けるという. ここで上の直交分解の両辺をフーリエ逆変換するとプランシエル (Plancherel) の定理により  $\mathfrak{F}(L^2(\mathbb{R})) = L^2(\mathbb{R})$  であり, フーリエ逆変換  $\mathfrak{F}^{-1}$  は, ユニタリー変換なので次の直交分解を得る.

$$L^2(\mathbb{R}) = \mathfrak{F}^{-1}(A) \oplus \mathfrak{F}^{-1}(A^\perp)$$

$\mathfrak{F}^{-1}(A^\perp)$  がペーリー・ウィナー空間  $PW(a)$  である.

### 3.2 ペーリー・ウィナー空間における再生核

**命題 2**  $\frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)}$  は  $PW(a)$  における再生核である.

(証明)  $f(x) \in PW(a)$  であると帯域制限条件から  $\hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi)\chi_{[-a,a]}(\xi)$  が成り立つ. 両辺を逆フーリエ変換すると,

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} dy$$

を得る. これは  $\frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)}$  が  $PW(a)$  における再生核である事を意味する.

### 3.3 ペーリー・ウィナー空間における標本化定理の定式化

標本化定理を次のように言い換える事ができる

標本化定理 ([3], [4], [20])

$f(t) \in PW(\pi)$  に対し

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

が成り立つ.

### 3.4 再生核の方法による標本化定理の証明

ここで再生核の方法による標本化定理の証明を紹介する。まず次の命題を準備する。

**命題 3([24])** 整関数  $g(z)$  が次の条件

1.  $|g(z)| \leq C \exp(2\pi|z|), \quad (\forall z \in \mathbb{C})$
2.  $\int_{\mathbb{R}} |g(x)| dx < \infty$

を満たしているとき  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dx$  が成り立つ。

(再生核の方法による標本化定理の証明)  $f(z) \in PW(\pi)$  に対し、

$g(z) = f(z) \frac{\sin \pi(t-z)}{\pi(t-z)}$  とおくと  $g(z)$  は命題 3 の条件を満足する。したがって、

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{\sin \pi(t-y)}{\pi(t-y)} dy = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

が成り立つ。  $\frac{\sin \pi(t-y)}{\pi(t-y)}$  は、 $PW(\pi)$  における再生核であるので

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\sin \pi(t-y)}{\pi(t-y)} dy$$

が成り立っている。以上から標本化定理

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$$

を得る。

**注意**

1.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)} \frac{\sin \pi(x-m)}{\pi(x-m)} dx = \delta_{n,m}, \quad (n, m \in \mathbb{Z})$

が成り立つので標本化定理から  $\left\{ \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は  $PW(\pi)$  における

正規直交基底である事がわかる。しかし  $\left\{ \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$  は  $L^2(\mathbb{R})$  における基底ではない。

実際、 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  が  $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\sin \pi(t-n)}{\pi(t-n)}$  と展開されているとす

る。両辺をフーリエ変換すると

$$\hat{f}(\xi) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\xi} \right) \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi)$$

これから  $\hat{f}(\xi) = 0, |\xi| > \pi$  が結論され  $f(t)$  が帯域制限関数である事が結論される. したがって, 帯域制限関数でない限り  $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$  は,  

$$\left\{ \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$
で展開できない事がわかる.

2. 信号処理の分野では  $\frac{\sin \pi t}{\pi t}$  を  $\text{sinc } t$  と表す事がある.

### 3.5 $PW(\pi)$ における再生核 $\text{sinc } x$ と標本化定理

ペーリー・ウィナー空間  $PW(\pi)$  における再生核  $\text{sinc } x$  と標本化定理の関係について考えてみる.  $g(x) = \text{sinc } x$  とおくと標本化定理から

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)g(x-n), \quad (\forall f(x) \in PW(\pi))$$

が成り立つ.

逆に  $g(x) \in PW(\pi)$  が存在して標本化定理

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)g(x-n), \quad (\forall f(x) \in PW(\pi))$$

が成り立つとする. 両辺をフーリエ変換すると

$$\hat{f}(\xi) = \left( \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\xi} \right) \hat{g}(\xi)$$

ここで  $f(x)$  として  $\frac{\sin \pi x}{\pi x}$  を取ると  $\hat{f}(\xi) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi)$  であり,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)e^{-in\xi} = 1 \text{ であるので } \hat{g}(\xi) = \chi_{[-\pi, \pi]}(\xi) \text{ が判る. 逆フーリエ変換}$$

すると  $g(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$  となる. つまり再生核  $\text{sinc } x$  のみがペーリー・ウィナー空間  $PW(\pi)$  において標本化定理を成立させる事ができるのである.

## 4 $L^2(\mathbb{R})$ からペーリー・ウィナー空間 $PW(a)$ への直交射影

$L^2(\mathbb{R})$  からペーリー・ウィナー空間  $PW(a)$  への直交射影について説明する.  $L^2(\mathbb{R})$  からその閉部分空間  $\{g(\xi) : \text{supp}(g(\xi)) \subset [-a, a]\}$  への直交射影  $P$  は  $P(h)(\xi) = \chi_{[-a, a]}(\xi)h(\xi)$  で与えられる. したがってフーリエ変換を考えると

$f(x) \in L^2(\mathbb{R})$  の  $PW(a)$  への射影  $P_a$  は,  $\frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)}$  を積分核として持

つ積分作用素  $P_a(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} f(y) dy$  で与えられる.

特に,  $PW(a)$  に属する関数  $f(x)$  に対しては  $P_a(f)(x) = f(x)$  であるので

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} f(y) dy$$

が成立する. 言い換えると,  $\frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)}$  は  $PW(a)$  の再生核である (命題 2).

#### 4.1 $L^2(\mathbb{R})$ からペーリー・ウィナー空間 $PW(\pi)$ への直交射影のデジタル化

$g(x) \in L^2(\mathbb{R})$  の  $PW(\pi)$  への射影作用素  $P_\pi$  は,  $\frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)}$  を積分核と

して持つ積分作用素  $P_\pi(g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)} g(y) dy$  で与えられる.

等式

$$\frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)} \frac{\sin \pi(y-n)}{\pi(y-n)}.$$

を代入すると

$$P_a(g)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)} \int_{\mathbb{R}} g(y) \frac{\sin \pi(y-n)}{\pi(y-n)} dy$$

を得る.

特に,  $PW(\pi)$  に属する関数  $g(x)$  に対しては  $P_\pi(g)(x) = g(x)$  であり,

$\frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)}$  は  $PW(\pi)$  の再生核であるので標本化定理

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(n) \frac{\sin \pi(x-y)}{\pi(x-y)}$$

が成立する.



## 4.2 まとめ

$$\begin{array}{ccc}
 L^2(\mathbb{R}) = L^2([-a, a]) \oplus L^2(\mathbb{R} \setminus [-a, a]) & \xrightarrow{P} & L^2([-a, a]) \\
 \mathfrak{F} \downarrow & & \downarrow \mathfrak{F} \\
 L^2(\mathbb{R}) = PW(a) \oplus PW(a)^\perp & \xrightarrow{P_a} & PW(a)
 \end{array}$$

- $\mathfrak{F}$ : フーリエ変換
- 射影  $P : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2([-a, a])$  は次の掛け算作用素で与えられる.

$$(Pg)(\xi) = \chi_{[-a, a]}(\xi)g(\xi), \quad (g \in L^2(\mathbb{R}))$$

- 射影  $P_a : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow PW(a)$  は次の積分作用素で与えられる

$$(P_a f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} dy, \quad (f \in L^2(\mathbb{R}))$$

- $f(x) = P_a(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} dy, \quad (f \in PW(a))$

つまり  $\frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)}$  は,  $PW(a)$  の再生核である.

- $f(x) \in PW(\pi)$  であると標本化定理

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\sin \pi(x-n)}{\pi(x-n)}$$

が成り立つ.

## 5 再生核 $\text{sinc } x$ から派生するテプリッツ (Toeplitz) 作用素

### 5.1 テプリッツ作用素

有界関数  $\phi(y)$  をシンボル関数とするテプリッツ作用素は, 掛け算作用素  $m_\phi f(y) = \phi(y)f(y)$ , ( $f(y) \in L^2(\mathbb{R})$ ) と  $L^2(\mathbb{R})$  から  $L^2(\mathbb{R})$  のある閉部分

空間への射影作用素  $P$  との合成  $P \circ m_\phi$  で定義される. ここでは閉区間  $[-b, b]$  の特性関数  $\chi_b(y)$  をシンボル関数とする掛け算作用素  $m_b f(y) = \chi_b(y) f(y)$  とペーリー・ウイナー空間への射影  $P_a$  との合成で定義されるテプリッツ作用素を考える. このテプリッツ作用素は積分作用素  $(P_a \circ m_b)(f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_b(y) f(y) \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} dy = \int_{-b}^b f(y) \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} dy,$  で与えられる,

## 5.2 テプリッツ作用素 $P_a \circ m_b$ の固有関数

テプリッツ作用素  $T_{a,b} = P_a \circ m_b$  の固有関数を偏重楕円体関数 (Prolate spheroidal functions) と呼ぶ. 偏重楕円体関数は微分作用素

$(b^2 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} - a^2 x^2$  の固有関数でもある.

$D_{a,b} = (b^2 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} - a^2 x^2$  とおくと

$T_{a,b} \circ D_{a,b} = D_{a,b} \circ T_{a,b}$  が成り立ち, 偏重楕円体関数は, これら 2 つの可換な作用素  $T_{a,b}, D_{a,b}$  の同時固有関数である ([4], [18], [19]).

## 5.3 帯域制限関数としての偏重楕円体関数

$f(x)$  を偏重楕円体関数とすると  $f(x)$  はテプリッツ作用素  $T_{a,b} = P_a \circ m_b$  の固有関数であるので積分方程式  $\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_b(y) f(y) \frac{\sin a(x-y)}{\pi(x-y)} dy$  を満たしている. この両辺をフーリエ変換すると

$\lambda \mathfrak{F}(f)(\xi) = \mathfrak{F}(\chi_b f)(\xi) \chi_a(\xi)$  となり  $\mathfrak{F}(f)(\xi) = 0$  ( $|\xi| > a$ ) が導かれる.

この事から偏重楕円体関数が帯域制限関数である事が判る. 偏重楕円体関数の面白い性質やデジタル信号処理への応用等については, [2], [4], [9], [11], [18], [19] を参照してください.

## 参考文献

- [1] M. Andersson : *Topics in Complex Analysis*, Springer Verlag, New York, Heidelberg(1996)
- [2] 安藤繁 : 超解像における逆問題とその解法, 数理科学, no. 274, April, p. 56 - 61(1986)

- [3] R. P. Boas : *Entire Functions*, Academic Press, New York(1982)
- [4] I. Daubechies : *Ten Lectures on Wavelets*, Springer Verlag(2003)
- [5] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger and F. G. Tricomi : *Higher Transcendental Functions*, Bateman Manuscript Project Vol. I, McGraw - Hill, New York, Tront, London(1953)
- [6] M. Holschneider: *Wavelets, An Analysis Tool* Oxford Science Publications, Clarendon Press, Oxford(1995)
- [7] 加野泰 : コヒーレンス理論とその応用, 岩波書店 (1976)
- [8] Y. Katznelson : *Introduction to Harmonic Analysis*, Dover(1968)
- [9] H. J. Landau : *On the density of phase space expansions*, IEEE Transaction on Information Theory, Vol. 39, no. 4, July., 40, pp. 1152-1156(1993)
- [10] 森口, 宇田川, 一松 : 数学公式 III, 岩波全書 (1960)
- [11] D. Slepian and H. O. Pollak : *Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and unctainty I*, Bell System Tech. J., 40, pp. 43-66(1961)
- [12] H. Ogawa : *Sampling Theory and Isao Someya; A Historical Note*, Sampling Theory in Signal and Image Processing, vol.5, no.3, Sept., p. 247-256(2006)
- [13] W. Rudin : *Real and Complex Analysis*, McGraw - Hill, New York, Tokyo(1986)
- [14] 佐藤幹夫 : 佐藤幹夫の数学, 日本評論社 (2007)
- [15] C. E. Shannon and W. Weaver: 通信の数学的理論, ちくま学芸文庫, 筑摩書房 (2009)
- [16] 染谷勲: 波形伝送, 修教社 (1949)
- [17] 寅市和男: ホイッタカー-染谷-シャノンの標本化定理, 数学セミナー 5月号, 日本評論社, p. 42-48(2008)

- [18] G. G. Walter : *Wavelet and Other Orthogonal Systems with Applications*, CRC Press, Florida (1994)
- [19] G. G. ウォルター著 榊原進, 萬代武史, 芦野隆一 訳 : ウェーブレットと直交関数系, 東京電機大学出版局 (2001)
- [20] K. Yoshino : *Liouville type theorem for entire functions of exponential type*, *Complex Variables*, 5(1985) p. 21-51.
- [21] 吉野邦生, 荒井隆行: デジタル信号と超関数, 海文堂 (1995)
- [22] 吉野邦生: デジタル信号と母関数, 数学セミナー 10月号, 日本評論社, p. 24-27(2001)
- [23] 吉野邦生: ヘビサイドの超関数を知る, 数理科学 5月号, p. 54-55(2009)
- [24] R. M. Young : *An Introduction to Nonharmonic Fourier Series*, Academic Press, New York (1980)