数理解析研究所講究録
第 1980 巻 2016 年 139-151

L^2拡張定理における最近の二三の進展

大沢健夫
Takeo Ohsawa

名古屋大学・多元数理
Graduate School of Mathematics
Nagoya University

はじめに $\mathbf{C}^n$ 上の擬凸領域DとD内の解析集合Σに対し、Σ上の正則関数がつねにD上の正則関数として拡張できることは岡潔の**上空移行の原理**として知られるが、これは不定域イデアル論或はH.カルタンの解析的連接層のコホモロジー論、および岡潔によるレビ問題の解の系として、およそ1948~53年の間に確立されたことである（**岡・カルタンの定理**）。これは一般論で、この拡張定理をDとΣの取り方に応じて精密化することが可能である。特に $\sup_D |z_n|\le 1$ かつ $\Sigma=\{z\in D;\ z_n=0\}$ (=: D') の場合、関数族 PSH(D):=$\{\varphi;\ \varphi$ はD上の多重劣調和関数$\}$に対してL^2条件つきの拡張定理が成り立つ。これに関して最近著しい展開があった。そもそもの発端は次の定理である。

定理1. (L^2拡張定理 cf. [Oh-T]) $\sup_D |z_n|\le 1$ のとき、ある定数C ($\le 1620\pi$)が存在して、D上の任意の多重劣調和関数φおよびD'上の任意の正則関数 f に対し、D上の正則関数$\tilde{f}$で$\tilde{f}|D'=f$かつ

$$\int_D |\tilde{f}|^2 e^{-\varphi} \le C\int_{D'} |f|^2 e^{-\varphi} \quad (\in[0,\infty])$$

をみたすものが存在する。

（原型は$D\subset\mathbf{C}^n$の場合に述べられているが、証明は同様である。）

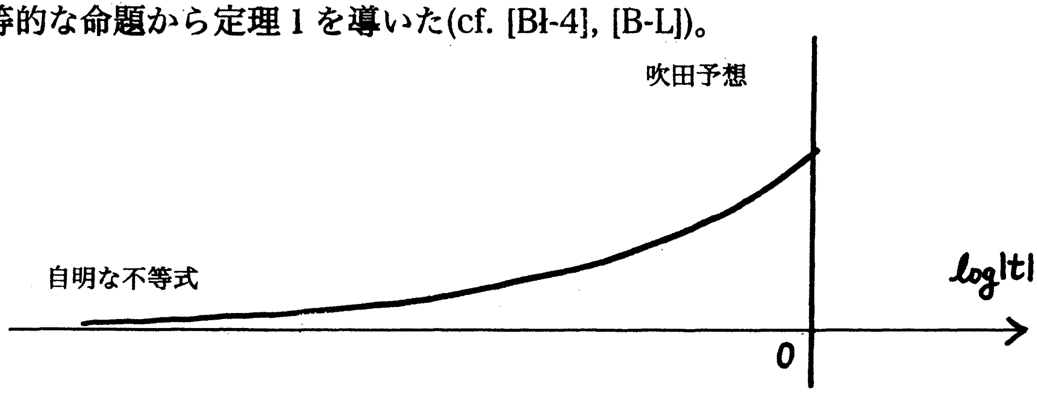
系. $D\subset\subset \mathbf{C}^n$, $\partial D\in C^2 \Rightarrow K_D(z) \gtrsim \mathrm{dist}(z,\partial D)^{-2}$.

ただしDのベルグマン核を$K_D(z,w)$とし、$K_D(z)=K_D(z,z)$, $\mathrm{dist}(z,\partial D)=\inf\{\|z-w\|;\ w\in D^c\}$ とおく。

定理1の証明は、非斉次コーシー・リーマン方程式をL^2評価式の方法で解くという、リーマンの学位論文以来の方法による。もちろん周知のごとく、ヒルベルト、ワイル、小平、ヘルマンダーらによって改良を重ねられた形があり、それにさらに手を入れて用いたのである。

小論の目的は、定理1の一般化と精密化について、特にこの3年間にZ. Błocki[Bł-2]を始めとしてあちこちで得られた結果を中心に解説することである。そのため、まず定理1を起点としてL^2拡張理論のこの展開について、おおまかな経緯を振り返っておこう。

1993年、K. Seipの論文[Sp]にヒントを得て定理1の改良形を得たが、それと同時に等角写像論における吹田予想とL^2拡張定理の関連が明らかになった(cf. [Oh-1, 2])。その後、この観点から吹田予想へのアプローチが続き、ついに2012年4月2日、Z. Błocki(ブヲツキ) [Bł-2]によって吹田予想が解決された。Błockiの仕事は定理1が$C=\pi$として成立することも含んでいる（**最良L^2拡張定理**)。これに続いてQ. Guan(関啓安)とX.-Y. Zhou(周向宇)が[G-Z]で[Oh-1]を改良した形の最良L^2拡張定理を示し、同時にそこからベルグマン核の助変数に関する対数多重劣調和性が導けることを指摘した。この劣調和性は元々ハルトークス領域の断面上のベルグマン核を観察して米谷文男と山口博史が開リーマン面のStein族の場合に確立したものだったが(cf. [M-Y])、B. Berndtsson [B] はそれを高次元化すると共に代数幾何で知られていた結果と結びつけた。つまり相対ベルグマン核の対数劣調和性をうまく一般化すれば、相対標準束の順像の半正値性になる。[B]では$\bar{\partial}$作用素のL^2評価式が順像の曲率を下から評価するのに用いられたが、[G-Z]では最良L^2拡張定理を用いて相対ベルグマン核の対数劣調和性を直接的に導いている。その一方、Błockiは[Bł-2]の続編において吹田予想の別証と高次元化を成し遂げたが(cf. [Bł-3], [Bł-Z])、これにヒントを得たL. Lempertは、相対標準束の順像の半正値性のBerndtsson流の定式化を用いて、「区間$(-\infty,0]$上の有界な凸関数は単調である。」という実に初等的な命題から定理1を導いた(cf. [Bł-4], [B-L])。



これらのめざましい成果の上にどのような新しい問題が浮上してくるか、楽しみな状況であるが、以下では今後の見通しを多少なりとも良くするため、吹田予想の背景を含め、L^2正則関数の拡張理論における上記の諸結果の解説を試みるとともに、[Oh-3]のように、定理1の原証明に多少手を入れるだけで最良L^2評価が出せることにも注意を喚起したい。

1. L^2評価式と拡張定理　定理1の原証明にせよ、相対標準束の順像の半正値性にせよ、元をたどれば$\bar{\partial}$作用素のL^2評価に行き着くので、まずそれを思い出しておこう。

Mを連結かつパラコンパクトなn次元複素多様体とし、EをM上の正則ベクトル束とする。ωをM上の完備なケーラー計量、hをEのファイバー計量とする。便宜上、ωの基本形式もωで表す。

$\mathcal{O}(M)$:={M上の正則関数}

$\Gamma(M,E)$:={Eの正則切断}

$C_0^{p,q}(M,E)$:={M上のコンパクトな台を持つC^∞級のE値(p,q)形式}

$L^2_{(p,q)}(=L^2_{(p,q)}(M,E,\omega,h))$:= {M上の2乗可積分E値(p,q)形式}

とし、閉作用素$\bar{\partial}: L^2_{(p,q)} \longrightarrow L^2_{(p,q+1)}$を、微分作用素

$$\begin{array}{ccc} C_0^{p,q}(M,E) & \longrightarrow & C_0^{p,q+1}(M,E) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \{\sum_{I,J} u_{IJ}dz_I \wedge d\bar{z}_J\} & \longrightarrow & \{\sum_{I,J}\sum_j (\partial u_{IJ}/\partial \bar{z}_j)d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\} \end{array}$$

の最大閉拡張(ωが完備だから最小閉拡張に一致)とする。

すると Ker $\bar{\partial} \cap L^2_{(0,0)} = \Gamma(M,E) \cap L^2_{(0,0)}$となるので、多変数複素解析の多くの問題が、$L^2$ドルボー複体

$$L^2_{(p,q-1)} \xrightarrow{\bar{\partial}} L^2_{(p,q)} \xrightarrow{\bar{\partial}} L^2_{(p,q+1)}$$

の解析に帰される。一般に

$$L^2_{(p,q)} = (\mathrm{Ker}\bar\partial \cap \mathrm{Ker}\bar\partial^*) \oplus [\mathrm{Im}\bar\partial] \oplus [\mathrm{Im}\bar\partial^*]$$

($\bar\partial^*$ は $\bar\partial$ の共役作用素で[·]は閉包を表す)であるが、ω とhおよび(p,q)の条件次第で $\mathrm{Ker}\bar\partial=\mathrm{Im}\bar\partial$ となる。それを主張するのが種々の消滅定理で、証明には複素ラプラシアン $\square := \bar\partial\bar\partial^*+\bar\partial^*\bar\partial$ に対する中野の公式

$$\square - \overline{\square} = [i\Theta_h\,,\ \Lambda]$$

が不可欠である。ただし$D_h = \bar\partial+\partial_h$ (Chern接続), $\overline{\square} = \partial_h(\partial_h)^*+(\partial_h)^*\partial_h$
$\Theta_h = D_h^2$ (曲率), Λ は $u \longrightarrow \omega\wedge u$ の共役。

中野の公式から部分積分によって

$$(\#) \qquad \|\bar\partial u\|^2 + \|\bar\partial^* u\|^2 \geq ([i\Theta_h\,,\Lambda]u,u)$$

(ただし$\|\cdot\|$はL^2ノルムで (,) は内積)が得られ、小平消滅定理を始めとする有用な消滅定理群が得られることは周知であろう。

実はここからが本題で、中野の公式は h=1 (Eは自明束)のときには $\square - \overline{\square} = 0$ となり、従って(#)をそのまま使って評価式を出すのは無理だが、ハーディーの不等式

$$4\int_0^1\{f(t)\}^2dt \leq \int_0^1\{f'(t)/t\}^2dt \qquad (f\in C^1,\ f(0)=0)$$

を用いると、計量 ω の情報を評価式に結びつけることができる。例えばM=D:=$\{z\in\mathbb{C};\ |z|<1\}$, $\omega=i\partial\bar\partial\log(1-|z|^2)^{-1}$, h=1 のときにも(1,1)形式に対する$L^2$評価式が出せる。これを一般化しようとしていたところ、竹腰見昭氏(当時は数理研の研究員)からの手紙で H.DonnelyとC. Fefferman の仕事[D-F]を知らされた。そこではまさしくハーディーの不等式の$\bar\partial$版が示されていたのだが、これをさらに変形して次の不等式を得た。

(*) 正値関数 $\eta\in C^\infty(M)$, $c\in C^0(M)$ および $u\in C_0^{n,q}(M,E)$ $(q\geq 1)$ に対し

$$(i(\eta\Theta_h - \partial\bar{\partial}\eta - c\partial\eta\wedge\bar{\partial}\eta)\Lambda u,u) \le \|\sqrt{\eta}\,\bar{\partial}u\|^2 + \|\sqrt{\eta + c^{-1}}\,\bar{\partial}^*u\|^2.$$

ここに行き着くにあたり、[D-F]はもとより、E. Witten [W]によるラプラシアンの変形とJ.-P. Demailly[Dm-1]によるその複素版がたいへん参考になったことを書き添えておきたい。

定理1の証明に(*)をどう用いるかを、拡張問題を$\bar{\partial}$方程式に直したりDを内側から強擬凸領域で近似して極限移行したり、さらには補助的な完備計量を用いたりという標準的な議論を省いて述べるなら、

$$M = D - D', \quad \omega = i\partial\bar{\partial}\|z\|^2, \quad h = \exp(-\varphi - \log|z_n|^2 - |z_n|^2),$$

$$\eta = \log(|z_n|^2 + \varepsilon^2)^{-1} + 1, \quad c = |z_n|^2 + \varepsilon^2$$

とおけばよい。 $C=\pi$ で拡張定理を示したければ

$$\eta_0 = \begin{cases} \log 1/|z_n| & \varepsilon < |z_n| < 1 \\ -\log(1/|z_n|)\log\log(1/|z_n|) + \log(1/|z_n|) + \log(1/|z_n|)\log\log(1/\varepsilon) & \\ \varepsilon^e \le |z_n| \le \varepsilon & \\ -e\log(1/\varepsilon)(\log\log(1/\varepsilon)+1) + e\log(1/\varepsilon) + e\log(1/\varepsilon)\log\log(1/\varepsilon) & \\ |z_n| < \varepsilon^e & \end{cases}$$

とおき、η_0 を少し変形して η を作る必要がある(cf. [Oh-3]など)。

2．吹田予想とL^2拡張定理　　L^{2}拡張定理の最近の進展を促したものは吹田信之(1933-2002)によって提出された問題だったので、これについて背景をこめて復習しておきたい。

非コンパクトなリーマン面すなわち開リーマン面の分類理論は、R. Nevanlinna, L. Sarioらによって創められ、多くの人たちによって研究されて来たが、L. AhlforsとA. Beurlingの論文[A-B]以来、関数空間の退化によって「境界」の大きさを測ることが一つの指導原理であった。この流れも元をたどればリーマンの除去可能性定理に行き着く。これを詳しく見ると、孤立特異点は有界正則関数に関してもL^{2}正則関数に関しても除去可能だが、特異点集合がカントール集合などの場合

には、関数が有界かL^2かで除去可能性に違いが生ずる。この違いを検知するのが**解析容量** c_B と**対数容量** c_β で、一般のリーマン面X上でそれぞれ次のように定義される。

$$c_B(p) = \sup\{|f'(z)dz|_p \,;\, f\in\mathcal{O}(X),\ \|f\|_{L^\infty}\le 1,\ f(p)=0\}$$

$\pi:\tilde{X}\to X$ を普遍被覆として

$$c_\beta(\pi(p)) = \sup\{|f'(z)dz|_p \,;\, f\in\mathcal{O}(\tilde{X}),\ \|f\|_{L^\infty}\le 1,\ f(p)=0\}.$$

定義より明らかに $c_B \le c_\beta$ だが、次も容易に分かる。

$c_B=0 \Leftrightarrow$ X上の有界正則関数は定数に限る ($X\in O_{AB}$)

$c_\beta=0 \Leftrightarrow$ Xは放物型すなわちグリーン関数を持たない ($X\in O_G$)

X上のベルグマン核はL^2正則1形式の空間の再生核として定義されるが、それをしばらく $K(=K_X)$で表す。1941年、Nevanlinna[N]は放物型リーマン面上のL^2正則1形式の周期について調べ、特に「$X\subset C$のときは $c_\beta=0$ なら $K=0$」を含む結果を得た。1967年、L. Carleson [C]は $X\subset C$のとき $c_\beta=0$ と $K=0$ が同値であることを示し、これをふまえて及川広太郎とSarioは、$\sqrt{\pi K}$, c_B, c_β を比較せよという問題を提出した。吹田はこれに応えて次の結果を得た。

1) $c_B(z)^2 \le \pi K(z,z)$, 等号は $X\in O_G$ かまたはDから対数容量(ここでは対数ポテンシャルの積分が1以下の測度のうち台を限ったもので測って上限をとる)が0の閉集合を除いたものに限る。

2) $c_\beta(z)^2 \le \pi K(z,z)$ と予想され、これは2重連結領域では正しい。

$c_\beta(z)^2 \le \pi K(z,z)$ が吹田予想である。これが1993年のK. Seipの論文[Sp]をきっかけにして再起動したL^2拡張理論と結び付いた。SeipはD上のハーディー空間に対する古典的な補間定理を、BeurlingとMalliavin [B-M]による密度概念の双曲計量版を使ってベルグマン空間へと拡張し

た。これにヒントを得て筆者は定理 1 を次のように一般化した。

定理 2. (cf. [Oh-1]) $\psi\in PSH(D)$かつ $\sup(\psi(z)+\log|z_n|^2)\leq 0$のときある定数Cが存在して、任意の$\varphi\in PSH(D)$と$f\in\mathcal{O}(D')$に対し、$\tilde{f}\in\mathcal{O}(D)$で $\tilde{f}|D'=f$ かつ

$$\int_D|\tilde{f}|^2e^{-\varphi}\leq C\int_{D'}|f|^2e^{-\varphi-\psi}$$

をみたすものが存在する。

$\psi=0$ のときが定理 1 である。n=1のときψを適当に取れば

$$2g_D(z,0)=\psi(z)+\log|z|^2 \quad (g_D\text{はDのグリーン関数})$$

となる。これとc_β の別の定義

$$\log(c_\beta(z)/|dz|)=\lim_{w\to z}(g_D(z,w)-\log|z-w|)$$

を合わせると $c_\beta(z)^2\leq C_0K(z,z)$ $(C_0\leq 750\pi)$ が導けた(cf. [Oh-2])。その後、Błocki[Bł-1]は $c_\beta(z)^2\leq 2\pi K(z,z)$ を示し、Guan, Zhou および L. Zhuは[G-Z-Z 1, 2] で定理 1 の証明における η とφを互いに連動させて評価が改良できることを示した。Błockiはその後、L. Hörmander [H] の理論にBerndtssonとP. Charpentierの論文[B-C]由来の補助的な荷重関数を持ち込んで定理 1 の別証を与えたB.-Y. Chen [Ch]の方法を用いて評価の精密化を図り、ついにGuanとZhouに先立って吹田予想の解決に達した。GuanとZhou[G-Z]はやはり補助的な荷重を用いて、しかし定理 1 の原証明に沿って最良評価に達した。[Bł-2]でも[G-Z]でも二つの未知関数に関する連立常微分方程式を解き、定理 2 をC=πに対して示したことになっている。[G-Z]ではさらにこの最良L^2拡張定理の応用として、擬凸領域の擬凸族に対する相対ベルグマン核の対数的多重劣調和性という、1 次元の族に対しては米谷・山口[M-Y]が、一般の場合にはBerndtsson[B]が示した結果に別証を与えた。その後、Błocki [Bł-3]に示唆されたBerndtsson-Lempert [B-L] の研究、および辻元(つじ・はじめ)に示唆された J.-Y. Caoの研究[C]が続き、その結果、L^2拡張定理が一般的な状況で相対標準束の順像の半正値性と同値であると

いう、驚くべき結論が得られたのである。次節ではそれについて論じよう。

3．ベルグマン核の変動と相対標準束の順像の正値性　単刀直入に最近の結果を述べる。Dを$\mathbf{C}^n$ の擬凸領域、$\varphi \in \mathrm{PSH}(D\times D)$とし、

$$L^2_{\varphi,t} = \{g;\ g\text{はD上可測で}\int_D |g(z)|^2 e^{-\varphi(z,t)} < \infty\}$$

$$\|g\|_t^2 = \int_D |g|^2 e^{-\varphi(\cdot,t)}$$

$$\mathcal{O}^2_{\varphi,t}\,(=\mathcal{O}^2_{\varphi,t}(D)) := \mathcal{O}(D)\cap L^2_{\varphi,t}$$

とおき、$P_{\varphi,t} : L^2_{\varphi,t} \longrightarrow \mathcal{O}^2_{\varphi,t}$ を直交射影とする。$P_{\varphi,t}$ と$\mathcal{O}^2_{\varphi,t}$ の再生核 $K_{\varphi,t}$ の関係は

$$P_{\varphi,t}(g)(z) = (g(w), K_{\varphi,t}(w,z))_t, \qquad (\ ,\ )_t \text{ は} L^2_{\varphi,t} \text{ の内積}$$

である。$P_{\varphi,t}$ を(D上のφに関する)**ベルグマン射影**という。n次元複素多様体上のベルグマン射影は、二乗可積分な正則n形式の空間の再生核を用いて同様に定義される。

定理3． (cf. [B]) $\varphi \in C^\infty \cap \mathrm{PSH}$ のとき、任意の $g \in C_0^\infty(D)$ (テスト関数)に対して

(☆)　　$(\partial^2/\partial t\partial\bar{t})\log\|P_{\varphi,t}(g)\|_t \geq 0.$

証明の方針：　φの有界性を仮定して示せば十分。このとき(☆)を、自明ベクトル束 $L^2(D)\times D \to D$に内積 $\int u\bar{v}e^{-\varphi}$ を入れてエルミート束と見たものの部分束である $\coprod_{t\in D}\mathcal{O}^2_{\varphi,t}$ の曲率の半正値性から導く。その際にガウス・コダッチ型の曲率公式(P. Griffiths [G]による)を用いるが、そこに現れる第2基本形式の評価に小平・中野・ヘルマンダー型のL^2評価(すなわち(#)で$\Theta_h = \partial\bar{\partial}\varphi$としたもの)を用いる。

系1.　$\log K_{\varphi,t}(z,z) \in \mathrm{PSH}(D\times D)$.

系２． Ω(擬凸)$\subset \mathbf{C}^n$, $\Omega_t = \{z;\ z_n = t\} \cap \Omega$, $K_t(z,w) := K_{\Omega_t,\varphi}(z,w)$ ($\mathcal{O}^2_{\varphi,t}(\Omega_t)$ の再生核) $\Rightarrow$ $\log K_t(z,z) \in PSH(\Omega)$.

系２を最良L^2拡張定理を用いて導く議論は次の通り(cf. [G-Z]):

$z_0 \in \Omega_0$を固定して

(1) $f(z) = K_0(z,z_0)/\sqrt{K_0(z_0,z_0)}$ $(z \in \Omega_0)$

とおく。
定理１($C=\pi$の最良型)より、$0 < \forall r \leq 1$ $\exists f_r(z,t) \in \mathcal{O}(\{(z,t) \in \Omega;\ |t| < r\})$ s.t.

(2) $f_r|\Omega_0 = f$ かつ $\|f_r\|^2 \leq \pi r^2$.

$|t| < r$ なら明らかに

(3) $K_t(z,z) \geq |f_r(z,t)|^2 / \|f_r(\cdot,t)\|^2$.

exp x は凸関数だから

$$\exp(1/\pi r^2)\int\{2\log|f_r(z_0,t)| - \log K_t(z_0,z_0)\}$$

$$\leq (1/\pi r^2)\int_{|t|<r}\{|f_r(z_0,t)|^2/K_t(z_0,z_0)\}.$$

これと(2), (3)より上式の左辺≤ 1.
従って

$$(1/\pi r^2)\int\{2\log|f_r(z_0,t)| - \log K_t(z_0,z_0)\} \leq 0.$$

ゆえにf_r の正則性と(1)より直ちに不等式

(4) $\log K_0(z_0,z_0) \leq (1/\pi r^2)\int_{|t|<r} \log K_t(z_0,z_0)$

を得る。(4)から$\log K_t(z,z) \in PSH(\Omega)$は容易に導ける。 □

この議論を、Cao [C] は辻の示唆を受けて拡張し、次を示した。

定理4. (cf. [C]) 擬凸な(n+1)次元ケーラー多様体XからDの上への正則写像$\pi: X \longrightarrow D$があり、πは臨界点を持たないとする。このとき$\coprod_{t\in D} C_0^{n,0}(X_t) \to D$ $(X_t = \pi^{-1}(t))$ の任意の正則断面 g_t および任意の$\varphi \in PSH(X)$ に対して $(\partial^2/\partial t\partial\bar{t})\log\|P_{\varphi,t}(g_t)\|_t \geq 0$。ただし $P_{\varphi,t}$ はX_t 上のベルグマン射影。

定理3⇒定理1の最良型(略証)： $\Phi \in PSH(D\times(D-\{0\}))\cap C^\infty$ と$D\times(D-\{0\})$の部分領域 $D_\Phi = \{(z,t);\ \Phi(z,t) < 0\}$ に対し $\int |g|^2 e^{-p\Phi}$ を考え、$p\to\infty$とすることにより開集合 $D_t = \{z\ ;\ \Phi(z,t) < 0\}$ に付随する直交射影

$$L^2_\varphi(D_t) \longrightarrow \mathcal{O}^2_\varphi(D_t) \quad (\varphi \in PSH(D))$$

に対しても、定理3と同様の劣調和性を得る。一方、$\mathcal{O}^2_\varphi(D_t)$からその部分空間 $\{f\in\mathcal{O}^2_\varphi(D_t);\ f|D' = 0\}$の直交補空間への射影を Q_t としたとき、定理1 ($C\leq 1620\pi$)により保証される有界な拡張作用素 $E_t: \mathcal{O}^2(D') \to \mathcal{O}^2_\varphi(D_t)$ との合成 Q_tE_tに関し、$C_0^\infty(D')$がD'上の内積に関してQ_tの像の双対内で稠密なことから、$\|Q_tE_tf\|_t$を Q_t の像の双対上の f の作用素ノルムとみなし、

$$\|Q_tE_tf\|_t \leq \|f\| \sup\{\|P_\varphi(g)\|/\|g\|_{\mathcal{O}^2_\varphi(D_t)^*};\ g\in C_0^\infty(D')\}$$

が得られる(ただしP_φ は$\mathcal{O}^2(D')$への直交射影)。ここで上の結果を特に$\Phi(z,t) = \log|z_n| - \log|t|$ に対して適用すれば$\|g\|_{\mathcal{O}^2_\varphi(D_t)^*}$の対数多重劣調和性が得られ、従って $\log\|g\|_{\mathcal{O}^2_\varphi(D_t)^*}$ は ($\log t$ に関して劣調和なので) $\log|t|$の関数として凸になる。

D'の近傍が直積で近似できることから、各 g に対して $t\to 0$ のとき $\lim(\|P_\varphi(g)\|^2/\|g\|^2_{\mathcal{O}^2_\varphi(D_t)^*}\pi t^2) = 1$ は明らか。従って $t\to 1$ として、区間$(-\infty,0)$ $(\ni\log|t|)$上で有界な凸関数の単調性より $\|Q_1E_1f\|^2 \leq \pi\|f\|^2$ を得る。これは定理1が$C=\pi$ に対して正しいことを意味する。 □

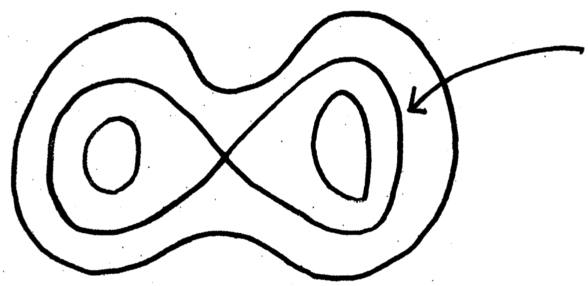
4．思いつくことなど　　予想を４つ述べる。

1)　Berndtsson-Lempertの方法で、多分次の命題が正しいことが確かめられるだろう。

$$f \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^{n-1}),\ \varphi \in PSH(\mathbf{C}^n) \Rightarrow \exists \tilde{f} \in \mathcal{O}(\mathbf{C}^n)\ \text{s.t.}$$

$$\int_{\mathbf{C}^n} |\tilde{f}(z)|^2 e^{-\pi\|z\|^2-\varphi} \leq \int_{\mathbf{C}^{n-1}} |f(z')|^2 e^{-\pi\|z'\|^2-\varphi(z',0)}.$$

2)　吹田予想に関連して、$\pi K(z,z)/c_\beta(z)^2$ がどこで最大値を取るか気になるところである。３重連結領域なら下図のようなイメージである。



3)　セゲー核も荷重つきベルグマン核の極限なので、定理３の系２と同様の対数的多重劣調和性が成り立つのであろう。

4)　関数論的零集合の観点からは、定理３をある意味で局所化することにより以下が示せても不思議ではない。

定理３系２の状況において、擬凹な閉集合 $E \subset \Omega$ (つまり$\Omega - E$ は擬凸)に対し、$\mathrm{cap}\{\ t\ ;\ \mathcal{O}^2(\Omega_t) = \mathcal{O}^2(\Omega_t - E)\ \} > 0$　(ただしcapは対数容量で、$\mathcal{O}^2 = \mathcal{O}_0^2$) ならば、$\mathrm{cap}\{\ t\ ;\ \mathcal{O}^2(\Omega_t) \neq \mathcal{O}^2(\Omega_t - E)\ \} = 0$。

引用文献

[A-B] Ahlfors, L. and Beurling, A., Conformal invariants and function theoretic null sets, Acta Math. 83 (1950), 101-129.
[B] Berndtsson, B., Curvature of vector bundles associated to holomorphic fibrations. Ann. of Math. (2) 169 (2009), no. 2, 531–560.
[B-C] Berndtsson, B. and Charpentier, P., A Sobolev mapping property of the Bergman kernel, Math. Z. 235 (2000), 1–10.
[B-L] Berndtsson, B. and Lempert, L., A proof of the Ohsawa-Takegoshi theorem with sharp estimates, to appear in J. Math. Soc. Japan.
[B-M] Beurling, A. and Malliavin, P., On the closure of characters and the zeros of entire functions, Acta Math. 118 (1967), 79–93.
[Bł-1] Błocki, Z., The Bergman kernel and pluripotential theory. Potential theory in Matsue, 1–9, Adv. Stud. Pure Math., 44, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.
[Bł-2] _____, Suita conjecture and the Ohsawa-Takegoshi extension theorem. Invent. Math. 193 (2013), no. 1, 149–158.
[Bł-3] _____, A lower bound for the Bergman kernel and the Bourgain-Milman inequality, GAFA Seminar Notes, Lect. Notes in Math., Springer (to appear)
[Bł-4] _____, Bergman kernel and pluripotential theory, to appear in Proceedings of the Conference in honor of Duong Phong, Contemporary Mathematics, American Mathematical Society.
[Bł-Z] Błocki, Z. and Zwonek,W., Estimates for the Bergman kernel and the multidimensional Suita conjecture. New York J. Math. 21 (2015), 151–161.
[C] Cao, J.-Y., Ohsawa-Takegoshi extension theorem for compact Kähler manifolds and applications, arXiv:1404.6937.
[Ch] Chen, B.-Y., A simple proof of the Ohsawa-Takegoshi extension theorem, arXiv:1105.2430v1 [math.CV].
[Dm-1] Demailly, J.-P., Holomorphic Morse inequalities. Several complex variables and complex geometry, Part 2 (Santa Cruz, CA, 1989), 93–114, Proc. Sympos. Pure Math., 52, Part 2, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.
[Dm-2] ____, Extension of holomorphic functions defined on non reduced analytic subvarieties, preprint.
[D-F] Donnely, H. and Fefferman, C., L^2 cohomology of the Bergman metric. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 80 (1983), no. 10 i., 3136–3137.
[G] Griffiths, P. A., Hermitian differential geometry, Chern classes, and positive vector bundles, 1969 Global Analysis (Papers in Honor of K. Kodaira) pp. 185–251 Univ. Tokyo Press, Tokyo
[G-Z] Guan, Q. and Zhou, X.-Y., A solution of L^2 extension problem with optimal estimate and applications, Ann. Math. 181 (2015), 1139-1208.

[G-Z-Z-1] Guan, Q., Zhou, X.-Y. and Zhu, L., On the Ohsawa–Takegoshi L^2 extension theorem and the twisted Bochner–Kodaira identity, CR Acad Math. 349(13), (2011), 797-800.

[G-Z-Z-2] ____, On the Ohsawa-Takegoshi L^2 extension theorem and the Bochner-Kodaira identity with non-smooth twist factor, J. Math. Pures Appl. (9) 97 (2012), no. 6, 579–601.

[H] Hörmander, L., L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, Acta Math. 113 (1965), 89-52.

[M-Y] Maitani, F. and Yamaguchi, H., Variations of Bergman metrics on Riemann surfaces, Math. Ann. 330. (2004), 477-489.

[Oh-1] Ohsawa, T., On the extension of L^2 holomorphic functions. III. Negligible weights. Math. Z. 219 (1995), no. 2, 215–225.

[Oh-2] ____, Addendum to: "On the Bergman kernel of hyperconvex domains" [Nagoya Math. J. 129 (1993), 43–52; MR1210002 (93k:32049)]. Nagoya Math. J. 137 (1995), 145–148.

[Oh-3] ____, Application and Simplified proof of a Sharp L^2 extension theorem, to appear in Nagoya Math. J.

[Oh-T] Ohsawa, T. and Takegoshi, K., On the extension of L2 holomorphic functions. Math. Z. 195 (1987), no. 2, 197–204.

[Sp] Seip, K., Beurling type density theorems in the unit disk, Invent. math. 113, Issue 1(1993), 21-39.

[S] Suita, N., Capacities and kernels on Riemann surfaces. Arch. Rational Mech. Anal. 46 (1972), 212–217.

[W] Witten, E., Supersymmetry and Morse theory. J. Differential Geom. 17 (1982), no. 4, 661–692 (1983).