数理解析研究所講究録
第 1980 巻 2016 年 166-183

連立作用素方程式, Schwartz 再生核空間及び de Branges 空間

東京学芸大学教育学部　山田 陽
Akira Yamada
Tokyo Gakugei University

1 概要

前半では再生核空間論の応用として任意個数の連立線形作用素方程式の有界解の存在定理を示す. これは補間問題で有用な Douglas の割算定理と Parrott の定理の自然な拡張として導かれる. 方法としては L. Schwartz による局所凸空間に含まれる再生核 Hilbert 空間の理論を用いる. 2 個の連立方程式の解の存在条件を与える Parrott の定理は Hilbert 空間に関する定理であるが, 値域を Hilbert 空間から局所凸空間へ拡張することができる. この少し拡張された Parrott の定理を用いると, Hilbert 空間の直積や直和をとることで無限個の連立作用素方程式の解の存在条件が容易に得られる. 詳細は [13] を参照されたい.

後半では整函数に関する de Branges 空間は内積と再生核が具体的に表されるが, その理由を調べることで, 同様な性質をもつ $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の再生核空間を定義し, de Branges 空間と類似の性質が成り立つことを示す.

2 Schwartz 流再生核空間

以下, 局所凸空間には常に Hausdorff 分離公理を仮定する. 線形位相空間の一般論は例えば [9] を見てください. 次は L. Schwartz [10] による再生核 Hilbert 空間の定義である.

定義 1. 局所凸空間 C に含まれる Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は包含写像 $j\colon \mathcal{H}\hookrightarrow C$ が連続な時, C-再生核 Hilbert 空間, *C-reproducing kernel Hilbert space* (C-RKHS) または C の *Hilbert* **部分空間** *(Hilbertian subspace)* といい, 作用素 $jj^*\in\mathcal{L}(C^*,C)$ を $\mathcal{H}$ の再生核

(reproducing kernel) という.

Hilbert 空間の場合と記号及び共役空間の概念を合わせるために, 局所凸空間 C の dual を C' とおいて, $C^* = \overline{C'}$ を C の *antidual* という. i.e. C の共役連続線形汎函数の空間を C^* とする. $C \times C^*$ 上の半双線形形式 (sesquilinear form) を内積の形で

$$\overline{y(x)} = \langle x, y \rangle_C, \quad x \in C,\ y \in C^*$$

と表す. 連続作用素 $A \in \mathcal{L}(C, D)$ の adjoint $A^* \in \mathcal{L}(D^*, C^*)$ は

$$\langle Ax, y \rangle_D = \langle x, A^*y \rangle_C, \quad x \in C,\ y \in D^* \tag{1}$$

で定義され一意的に存在する.

注意 1. $\mathcal{H}$ が Hilbert 空間の場合は写像

$$x \in \mathcal{H} \mapsto \langle x, \cdot \rangle_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}^*$$

が線形等長同型であるので, この対応で $\mathcal{H}$ とその antidual $\mathcal{H}^*$ を常に同一視する. このとき, $\langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}$ は $\mathcal{H}$ の内積と一致する. また, 空間 C または D が Hilbert 空間の場合, 上記の同一視により (1) の対応する右辺または左辺は Hilbert 空間の内積となり, 通常の Hilbert 空間の作用素の adjoint と両立する.

定義 2. E, F を線形空間, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を $E \times F$ 上の sesquilinear form とする. 線形写像 $T \in L(F, E)$ が Hermite $\iff$ $\forall x \in F$, $\langle Tx, x \rangle \in \mathbb{R}$. 線形写像 $S, T \in L(F, E)$ が Hermite のとき, $S \leq T \iff \forall x \in F$, $\langle Sx, x \rangle \leq \langle Tx, x \rangle$. 特に $S \geq 0$ のとき, S は**正値** *(positive)* という.

定義 3 (Operator range)**.** $\mathcal{H}$ は Hilbert 空間, C は局所凸空間とする. 連続線形作用素 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, C)$ に対して, 線形写像 $A \colon \mathcal{H} \to \operatorname{ran} A$ が coisometry (i.e. $(\ker A)^\perp$ と $\operatorname{ran} A$ が等長同型) になるような $\operatorname{ran} A$ 上の Hilbert 空間構造は一意的に定まる. この Hilbert 空間を $\mathcal{M}(A)$ で表し, 作用素 A の *operator range* という. また $\mathcal{M}(A)$ のノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{M}(A)}$ を A の *range norm* という.

定義より作用素 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, C)$ は分解 $A = jA_0$ を持つことに注意する. ただし, 包含写像 $j \colon \mathcal{M}(A) \hookrightarrow C$ は連続で $A_0 \colon \mathcal{H} \to \mathcal{M}(A)$ は coisometry である.

命題 1. *$\mathcal{H}$ は Hilbert 空間, C は局所凸空間で $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, C)$ のとき, 次が成り立つ:*

$\forall x \in \mathcal{M}(A)$, $\forall y \in C^*$,

$$\begin{aligned} \langle x, y\rangle_C &= \langle x, AA^*y\rangle_{\mathcal{M}(A)}, \\ \langle AA^*y, y\rangle_C &= \|AA^*y\|^2_{\mathcal{M}(A)} = \|A^*y\|^2_{\mathcal{H}} \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

特に, $AA^* = jj^* \in \mathcal{L}(C^*, C)$ は弱連続 (*i.e.* $\sigma(C^*, C)$-$\sigma(C, C^*)$ 連続) かつ正値である.

証明. $x \in \mathcal{H}$, $y \in C^*$ のとき, $A^*y \in (\ker A)^\perp$ だから operator range の定義より,

$$\langle Ax, AA^*y\rangle_{\mathcal{M}(A)} = \langle x, A^*y\rangle_{\mathcal{H}} = \langle Ax, y\rangle_C.$$

この等式より (2) と $AA^* = jj^*$ が分かる. $AA^* \geq 0$ は $\|AA^*y\|^2_{\mathcal{M}(A)} = \langle AA^*y, y\rangle_C$ より明らか. □

命題 1 より直ちに次の事実が得られる. 簡単だが重要であるので定理として述べる.

定理 1. *$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間, C を局所凸空間とする. 連続線形作用素 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, C)$ の operator range $\mathcal{M}(A)$ は C-RKHS で再生核 AA^* をもち, 再生性 (2) が成り立つ.*

この意味で, 再生核空間とは「*Hilbert* **空間から局所凸空間への連続線形作用素の像空間**」と言うことができ, 極めて一般的かつ身近な対象である. 集合 E 上の複素函数からなる通常の再生核 Hilbert 空間は, 局所凸空間 C として直積空間 $\mathbb{C}^E$ をとった場合であり, 再生核への応用においては空間が直積である場合が重要である. $\{H_x\}_{x\in E}$ を局所凸空間の族とする. このとき, 直積空間 $\prod_{x\in E} H_x$ 及び局所凸直和空間 $\oplus_{x\in E} H_x^*$ は局所凸空間であり互に他の antidual になる. 次の事実は有用である.

命題 2 ([10], Proposition 21)**.** *C, D は局所凸空間で $T \in \mathcal{L}(C, D)$ とする. C-RKHS $\mathcal{H}$ の再生核が k のとき, 作用素 $T|_{\mathcal{H}}$ による $\mathcal{H}$ の operator range は D-RKHS であり, その再生核は TkT^* となる.*

次の事実は, 作用素の正値性と通常の再生核の正定値性の同値を意味する.

命題 3. *$\mathcal{H}$ が Hilbert 空間で $H = \prod_{x\in E} H_x$ を局所凸空間の直積とする. $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, H)$ のとき, $p_x\colon H \to H_x$ を射影として $A_x = p_x A$ とおくと, $A_x \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, H_x)$ で $\forall g = (g_x) \in H^*$ に対して,*

$$\langle AA^*g, g\rangle_H = \sum_{x,y} \langle A_x A_y^* g_y, g_x\rangle_{H_x}.$$

次の定理は C-正値作用素と C-RKHS は局所凸空間 C が準完備の仮定の下に一対一対応があることを示している [10].

定理 2. C は準完備局所凸空間とする．線形写像 $k \in L(C^*, C)$ に対して，次は同値である．

(i) k は *C-positive, i.e.* $\langle kx, x\rangle_C \geq 0$, $\forall x \in C^*$.

(ii) $\forall y \in C^*$, $\exists M_y \geq 0$ *s.t.* $\forall x \in C^*$, $|\langle kx, y\rangle_C|^2 \leq M_y \langle kx, x\rangle_C$.

(iii) *Hilbert* 空間 $\mathcal{H}$ と連続作用素 $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, C)$ が存在して，$k = AA^*$ となる．*(Kolmogorov decomposition)*

(iv) k を再生核としてもつ *C-RKHS* $\mathcal{H}$ が一意的に存在する，

3 Complementary space と Triangle Lemma

我々は再生核と再生核空間の一対一対応に基づいて de Branges [3] による complementary space を定義する．この定義のメリットは次の定理の証明に見るように complementary space に関する性質を計算により容易に得ることが出来ることにある．作用素 $A \in \mathcal{L}(H_1, H)$ を Hilbert 空間 H_1 から Hilbert 空間 H への contraction とする．A が contraction の仮定は $AA^* \leq 1$ と同値であることに注意する．

定義 4 (再生核版)**.** 再生核 $1 - AA^* \in \mathcal{L}(H)$ をもつ H-RKHS を $\mathcal{H}(A)$ と書き，operator range $\mathcal{M}(A)$ の *complementary space* という．

Hilbert 空間の完備性より $\mathcal{L}(H)$ に属する正値作用素と H-RKHS の間に全単射があるので，上の定義は well-defined である．参考までに de Branges や Sarason による complementary space の上と同値な定義は次の通り．

定義 5 (de Branges [3], 1966)**.** $x \in H$ に対して，

$$\|x\|_A^2 = \sup_{y \in H_1} \{\|x + Ay\|^2 - \|y\|^2\}$$

とおく．$\|x\|_A$ をノルムとする Hilbert 空間 $\{x \in H \colon \|x\|_A < \infty\}$ を $\mathcal{H}(A)$ と定義する．

定義 6 (Sarason [8], 1994)**.** Operator range $\mathcal{M}((1 - AA^*)^{1/2})$ を $\mathcal{H}(A)$ と定義する．

$\mathcal{M}((1 - AA^*)^{1/2})$ の再生核は $1 - AA^*$ であるから，再生核空間の一意性より $\mathcal{H}(A) = \mathcal{M}((1 - AA^*)^{1/2})$ となり，Sarason の定義と我々の定義が同値であることがすぐ分かる．次はよく知られた事実である．

命題 4 (Sarason [8])**.** $A \colon H_1 \to H$ が *contraction* のとき，次は同値．

(i) *A: partial isometry.*

(ii) $\mathcal{M}(A)$ は H の *subspace (as a Hilbert space).*

(iii) $\mathcal{H}(A)$ は H の *subspace (as a Hilbert space).*

(iv) $\mathcal{M}(A) \cap \mathcal{H}(A) = \{0\}$, *i.e.* $H = \mathcal{M}(A) \oplus \mathcal{H}(A)$.

(v) $\mathcal{M}(A) \perp \mathcal{H}(A)$ *in* H.

ここで, 同じ定義域をもつ Hilbert 空間の有界作用素 A, B が与えられたとき, 方程式 $XA = B$ を満たす contraction X 全体の集合を $\mathrm{Con}(A, B)$ と表すことにする.

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "A"'] \arrow[dr, "B"] & \\ H_1 \arrow[rr, dotted, "X"] & & H_2 \end{tikzcd} \tag{3}$$

Douglas の定理より,

$$\mathrm{Con}(A, B) \neq \emptyset \iff B^*B \leq A^*A.$$

次の定理は部分的に de Branges [3] や Sarason [8] で得られているが, Hilbert 空間の contraction に関して基本的で応用も広い.

定理 3 (Triangle Lemma). 図式 (3) において A は *contraction* で $X \in \mathrm{Con}(A, B)$ と仮定する. このとき, B は *contraction* で $A' = A|_{\mathcal{H}(A^*)}$, $B' = B|_{\mathcal{H}(A^*)}$, $X' = X|_{\mathcal{H}(A)}$ とおくと, 次が成り立つ.

(i) $A'\colon \mathcal{H}(A^*) \to \mathcal{H}(A)$, $B'\colon \mathcal{H}(A^*) \to \mathcal{H}(B)$, $X'\colon \mathcal{H}(A) \to \mathcal{H}(B)$ は全て *contraction.*

(ii) X に X' を対応させて $\mathrm{Con}(A, B)$ と $\mathrm{Con}(A', B')$ の間の一対一対応が得られる. その逆写像は次で与えられる*:*

$$X = BA^* + i_{\mathcal{H}(B)} X' i^*_{\mathcal{H}(A)} = BA^* + X'(1 - AA^*).$$

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "A"'] \arrow[dr, "B"] & \\ H_1 \arrow[rr, dotted, "X"] & & H_2 \end{tikzcd} \quad \overset{1:1}{\iff} \quad \begin{tikzcd} & \mathcal{H}(A^*) \arrow[dl, "A'"'] \arrow[dr, "B'"] & \\ \mathcal{H}(A) \arrow[rr, dotted, "X'"] & & \mathcal{H}(B) \end{tikzcd}$$

(iii) $\mathcal{H}(X') = \mathcal{H}(X)$. 特に, X が *coisometry* $\iff$ X'が *coisometry.*

*(*証明の要点*).* 再生核を用いて計算する. 先ず, 次の不等式に注意すると左の三角形から右の三角形が得られる (命題 2 と再生核の大小関係より分かる).

$$(a)\quad (1-AA^*)-A(1-A^*A)A^*=(1-AA^*)^2\geq 0.$$
$$(b)\quad (1-BB^*)-B(1-A^*A)B^*\geq (1-BB^*)^2\geq 0.$$
$$(c)\quad (1-BB^*)-X(1-AA^*)X^*=1-XX^*\geq 0.$$

上の不等式の確認は, $B^*B\leq A^*A$ より

$$(1-AA^*)-A(1-A^*A)A^*=1-2AA^*+(AA^*)^2=(1-AA^*)^2\geq 0,$$
$$(1-BB^*)-B(1-A^*A)B^*\geq (1-BB^*)-B(1-B^*B)B^*=(1-BB^*)^2\geq 0,$$
$$(1-BB^*)-X(1-AA^*)X^*=1-XX^*\geq 0.$$

□

4 連立作用素方程式の有界解

Triangle Lemma の 1 つの応用としては, 次の連立作用素一次方程式系の解の存在判定条件がある. これは有名な Parrott の定理 [7] 等の拡張になっている.

定理 4. $\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2$ は *Hilbert* 空間, H, K は局所凸空間, $A\in\mathcal{L}(H,\mathcal{H}_1)$, $B\in\mathcal{L}(H,\mathcal{H}_2)$, $C\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,K)$, $D\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_2,K)$ は連続線形作用素とする. このとき, 連立方程式

$$\begin{cases} XA=B, \\ CX=D, \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[dl, "A"'] \arrow[dr, "B"] & \\ \mathcal{H}_1 \arrow[rr, dotted, "X"] \arrow[dr, "D"'] & & \mathcal{H}_2 \arrow[dl, "C"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

が有界作用素 $X\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$ を解としてもつ必要十分条件は, 実数 $\lambda\geq 0$ が存在して次の *(i)-(iii)* が成り立つことである*:*

(i) $DA=CB$.
(ii) $B^*B\leq\lambda^2A^*A$.
(iii) $DD^*\leq\lambda^2CC^*$.

この時, 等式

$$\min\{\|X\|\colon X \text{ は (4) を満たす}\}=\min\{\lambda\colon \lambda\geq 0 \text{ は } (ii) \text{ と } (iii) \text{ を満たす}\}$$

が成り立つ.

上の定理において H を局所凸直和 $\oplus_{x\in E}H_x$, K を直積 $\prod_{y\in F}K_y$ とおくことで, 容易に次の系が得られる.

系 1. $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ を *Hilbert* 空間, $\{H_x\}_{x\in E}$, $\{K_y\}_{y\in F}$ を局所凸空間の族とする. 任意の $x \in E$ に対して, $A_x \in \mathcal{L}(H_x, \mathcal{H}_1)$, $B_x \in \mathcal{L}(H_x, \mathcal{H}_2)$, 任意の $y \in F$ に対して $C_y \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, K_y)$, $D_y \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, K_y)$ であるとき, 連立方程式

$$\begin{cases} XA_x = B_x, & \forall x \in E, \\ C_yX = D_y, & \forall y \in F, \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
& H_x \arrow[dl, "A_x"'] \arrow[dr, "B_x"] & \\
\mathcal{H}_1 \arrow[rr, dotted, "X"] \arrow[dr, "D_y"'] & & \mathcal{H}_2 \arrow[dl, "C_y"] \\
& K_y &
\end{tikzcd}$$

を満たす有界作用素 $X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ が存在する必要十分条件は実数 $\lambda \geq 0$ が存在して次の *(i)-(iii)* が成り立つことである:

(i) $D_yA_x = C_yB_x$, $\forall x \in E$, $\forall y \in F$.
(ii) $(B_x^*B_y) \ll \lambda^2(A_x^*A_y)$ *on* $E \times E$.
(iii) $(D_xD_y^*) \ll \lambda^2(C_xC_y^*)$ *on* $F \times F$.

この系は Parrott の定理 [7] および Strong Parrott Theorem (cf. [6], [12], [1], [11], [2]) の拡張になっている.

5 半平面上の再生核の対応

上半平面 $\mathbb{C}_+ = \{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ の Riemann 写像 $\psi\colon \mathbb{C}_+ \to \mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ は一次変換

$$\psi(z) = \frac{z-i}{z+i}, \quad \psi^{-1}(z) = i\frac{1+z}{1-z},$$

で与えられる. この場合 ψ は等式

$$1 - \psi(z) = \frac{2i}{z+i}, \quad \psi'(z) = \frac{(1-\psi(z))^2}{2i} \tag{4}$$

を満たすことに注意する. 後で都合がいいように, Hardy 空間のノルムを次のように正規化しておく.

定義 7. $\sup_y \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2\, dx < \infty$ を満たす $\mathbb{C}_+$ 上の正則函数 f のなすベクトル空間

にノルム

$$\|f\|^2 = \sup_y \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(x+iy)|^2 \, dx$$

を与えた Hilbert 空間を上半平面 $\mathbb{C}_+$ 上の Hardy 空間と言い $H^2(dt)$ で表す. $f \in H^2(dt)$ は $\mathbb{R}$ 上 a.e. に非接境界値 $f(t)$ をもち,

$$\|f\|^2 = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 \, dt$$

が成り立つ. 一方, 単位円板 $\mathbb{D}$ 上の Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ のノルムは正規化して

$$\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(e^{i\theta})|^2 \, d\theta$$

で与える.

次の事実はよく知られている.

命題 5. $H^2(\mathbb{D})$ 及び $H^2(dt)$ は $\mathbb{D}$ または $\mathbb{C}_+$ 上の再生核 *Hilbert* 空間で, 再生核はそれぞれ $\dfrac{1}{1-z\overline{w}}$, $\dfrac{2i}{z-\overline{w}}$.

以下, 簡単のため次の記号を用いる.

$$\mathcal{P} = \{f\colon \mathbb{C}_+ \to \overline{\mathbb{C}}_+ \text{ s.t. } f \text{ は正則}\}, \quad \mathcal{B} = \{F\colon \mathbb{D} \to \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\} \text{ s.t. } F \text{ は正則}\}.$$

ただし, $\overline{\mathbb{C}}_+ = \mathbb{C}_+ \cup \mathbb{R}$ とする. 区別するため, 一般に大文字で $\mathcal{B}$ の元, 小文字で $\mathcal{P}$ の元を表すことにする. 集合 $\mathcal{P}$ の元を *Pick* 函数という. 正則函数 $F \in \mathcal{B}$ と $f \in \mathcal{P}$ から作られた 2 つの再生核

$$k_F(z,w) = \frac{1 - F(z)\overline{F(w)}}{1 - z\overline{w}},$$
$$k_f(z,w) = \frac{f(z) - \overline{f(w)}}{z - \overline{w}},$$

の関係を調べよう. 上記の一次変換 $\psi\colon \overline{\mathbb{C}}_+ \to \overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ を用いて函数 F, f の間の対応を

$$F = \psi \circ f \circ \psi^{-1}$$

で与えると,

$$\begin{aligned} f(z) - \overline{f(w)} &= i\left\{\frac{1+F(\psi(z))}{1-F(\psi(z))} + \frac{1+\overline{F(\psi(w))}}{1-\overline{F(\psi(w))}}\right\} = \frac{2i(1-F(\psi(z))\overline{F(\psi(w))})}{(1-F(\psi(z)))(1-\overline{F(\psi(w))})} \\ &= \psi^*\left[\frac{2i(1-F(z)\overline{F(w)})}{(1-F(z))(1-\overline{F(w)})}\right]. \end{aligned}$$

したがって, $f(z)=z \iff F(z)=z$ と (4) に注意して,

$$k_f(z,w)=\psi^*\left[\frac{(1-z)(1-\overline{w})k_F(z,w)}{(1-F(z))(1-\overline{F(w)})}\right]=\frac{(f(z)+i)(\overline{f(w)}-i)}{(z+i)(\overline{w}-i)}\psi^* k_F(z,w). \tag{5}$$

ついでに逆の表示も求めておく. 同様の計算をしてもいいが, (5) より直ちに,

$$k_F(z,w)=\psi^{-1*}\left[\frac{(z+i)(\overline{w}-i)k_f(z,w)}{(f(z)+i)(\overline{f(w)}-i)}\right]=\frac{(1-F(z))(1-\overline{F(w)})}{(1-z)(1-\overline{w})}\psi^{-1*}k_f(z,w). \tag{6}$$

定理 5. $\psi(z)=(z-i)/(z+i)$ としたとき,

$$f\in\mathcal{P}\mapsto F=\psi\circ f\circ\psi^{-1}\in\mathcal{B}$$

の対応で 集合 $\mathcal{P}$ と $\mathcal{B}$ が一対一に対応して, k_f, k_F はそれぞれ $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{D}$ 上で半正定値である. これらの正定値核を再生核とする *RKHS* をそれぞれ $\mathcal{H}_f$, $\mathcal{H}_F$ とすると, $\mathcal{H}_F$ は $H^2(\mathbb{D})$ に *contractive* に含まれる *Hilbert* 空間であり, ユニタリ作用素

$$U_F\colon g\in\mathcal{H}_f\mapsto\left[\frac{z+i}{f(z)+i}\cdot g(z)\right]\circ\psi^{-1}(z)=\frac{1-F(z)}{1-z}\cdot g(\psi^{-1}(z))\in\mathcal{H}_F,$$
$$U_F^{-1}\colon G\in\mathcal{H}_F\mapsto\left[\frac{(1-z)G(z)}{1-F(z)}\right]\circ\psi=\frac{f(z)+i}{z+i}\cdot G(\psi(z))\in\mathcal{H}_f,$$

により $\mathcal{H}_f$ と $\mathcal{H}_F$ は等長同型である. また, 次の作用素 $T\colon\mathcal{H}_f\to H^2(dt)$

$$(Tg)(z)=\frac{2i\,g(z)}{f(z)+i},\quad g\in\mathcal{H}_f$$

は *contraction* であり, 次の不等式が成り立つ:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|g(t)|^2}{|f(t)+i|^2}\,dt\le\|g\|_{\mathcal{H}_f}^2.$$

ただし, $g(t)$ は $t\in\mathbb{R}$ における函数 g の非接境界値である. 作用素 T が *isometry* となる必要十分条件は, 函数 f が定数 i であるか, または $\mathbb{C}_+$ の *inner* 函数, *i.e.* f の $\mathbb{R}$ 上の境界値が *a.e.* に実数であることである. このとき, 作用素 T により $\mathcal{H}_f$ は $H^2(dt)\ominus(\psi\circ f)H^2(dt)$ と等長同型である.

証明. 函数 F による Hardy 空間 $H^2(\mathbb{D})$ の積作用素は contraction だから, その complementary space の再生核として $k_F(z,w)$ は半正定値. 等式 (5) より $k_f(z,w)$ も半正定値. $k(z,w)=1/(1-z\overline{w})$ を $\mathbb{D}$ の (正規化) Szegö 核とすると $k_F\ll k$ だから, 包含写像

$j\colon \mathcal{H}_F \hookrightarrow H^2(\mathbb{D})$ は contraction. (6) と再生核の一般論より, $\mathcal{H}_F$ の元は $\mathcal{H}_f$ の元に函数 $(z+i)/(f(z)+i)$ を掛け, 次に ψ^{-1} を合成して得られる. これらの作用は正則函数の一致の定理より単射だから等長である. したがって, 作用素 $U_F\colon \mathcal{H}_f \to \mathcal{H}_F$ を

$$g \in \mathcal{H}_f \mapsto \left[\frac{z+i}{f(z)+i}\cdot g(z)\right] \circ \psi^{-1}(z) = \frac{1-F(z)}{1-z}\cdot g(\psi^{-1}(z)) \in \mathcal{H}_F$$

と定義できて unitary となる. 特に, $F = 0$ $(\leftrightarrow f = i)$ とすると, $\mathcal{H}_F = H^2(\mathbb{D})$, $\mathcal{H}_f = H^2(dt)$ で $U_0\colon H^2(dt) \to H^2(\mathbb{D})$ は unitary である. ここで, contraction $j\colon \mathcal{H}_F \hookrightarrow H^2(\mathbb{D})$ が等長作用素である必要十分条件は F が定数 0 または inner であることに注意する.

$(\because)$ $\mathcal{H}_F$ は函数 F による積作用素 $M_F\colon H^2(\mathbb{D}) \to H^2(\mathbb{D})$ による operator range $\mathcal{M}(M_F)$ の complementary space である. 包含写像 j が等長となるための条件は $\mathcal{H}_F$ が $H^2(\mathbb{D})$ の部分ノルム空間になることであり, これは命題 4 より, $\mathcal{M}(M_F)$ が $H^2(\mathbb{D})$ の部分ノルム空間であることと同値である. したがって, mulitplier M_F が partial isometry となる条件を考えればよい. F による場合分け. $F=0$ の場合は自明で, $F\neq 0$ ならば正則函数の積作用素として M_F は単射だから, M_F が isometry と同値. これは F が inner と同値である. //

ゆえに合成作用素 $T = U_0^{-1} j U_F\colon \mathcal{H}_f \to H^2(dt)$ s.t.

$$Tg = \frac{2ig}{f+i}$$

は contraction で, F が 0 または inner のときに限り isometry になる:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_F & \xhookrightarrow{\ j\ } & H^2(\mathbb{D}) \\ {\scriptstyle U_F}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle U_0} \\ \mathcal{H}_f & \overset{T}{\dashrightarrow} & H^2(dt) \end{array}$$

このとき $\mathcal{H}_F = H^2(\mathbb{D}) \ominus FH^2(\mathbb{D})$ だから, $\mathcal{H}_f$ は $H^2(dt) \ominus (\psi\circ f)H^2(dt)$ と unitary 同型である. したがって,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|g(t)|^2}{|f(t)+i|^2}\,dt \le \|g\|_{\mathcal{H}_f}^2.$$

任意の $g \in \mathcal{H}_f$ で等号となるのは, 函数 f が定数 i であるか, または $f(x)\in\mathbb{R}$ for a.e. $x\in\mathbb{R}$ のときに限る. □

命題 6. $F, G \in \mathcal{B}$ のとき, 次が成り立つ.

(i) $\mathcal{H}_F$ が $\mathcal{H}_G$ の *contractive* な部分空間 $\iff G = HF, \exists H \in H^\infty(\mathbb{D})$ *s.t.* $\|H\|_\infty \le 1$.

(ii) G が *inner* を仮定すると, $\mathcal{H}_F$ が $\mathcal{H}_G$ の等長部分空間 $\iff G = HF$ で F, H が *inner*.

証明. (i) 再生核の一般論から $\mathcal{H}_F \hookrightarrow \mathcal{H}_G$ は次と同値である:

$$\frac{1 - F(z)\overline{F(w)}}{1 - z\overline{w}} \ll \frac{1 - G(z)\overline{G(w)}}{1 - z\overline{w}}. \tag{*}$$

$z = w$ として $|G(z)| \le |F(z)|$, $\forall z \in \mathbb{D}$. $F \equiv 0$ ならば $G \equiv 0$ より OK. $F \not\equiv 0$ ならば $H = G/F$ とすると H の存在は OK. 逆にこのとき, 次の式より (*) が分かる:

$$\frac{1 - G(z)\overline{G(w)}}{1 - z\overline{w}} - \frac{1 - F(z)\overline{F(w)}}{1 - z\overline{w}} = \frac{F(z)\overline{F(w)}(1 - H(z)\overline{H(w)})}{1 - z\overline{w}} \gg 0.$$

(ii) 一般に, $\mathcal{H}_F$ が $H^2(\mathbb{D})$ の等長部分空間 $\iff F$ が inner または $F = 0$.

($\because$) $\mathcal{H}_F$ が等長部分空間であることは, 上の命題により F による multiplier M_F が partial isometry であることと同値である. $\mathcal{H}_0 = H^2(\mathbb{D})$ だから $F = 0$ のときは等長である. $F \neq 0$ ならば M_F は単射だから, M_F が isometry であることと同値. しかしこれは, F は inner と同値. なぜなら, 特に函数 $1 \in H^2(\mathbb{D})$ のノルムを考えると, 等長の条件は

$$\int_{\mathbb{T}} (1 - |F(e^{i\theta})|^2)\, d\theta = 0.$$

$\|F\|_\infty \le 1$ だから, $|F(e^{i\theta})| = 1$ a.e., すなわち F は inner. 逆に, F が inner のとき等長は明らか. //

G が inner の仮定より $\mathcal{H}_G$ は $H^2(\mathbb{D})$ と等長だから, F の条件は F が inner, すなわち H が inner と同値. □

6 De Branges の定理

次は Pick 函数に関する Herglotz 積分表示である [5, p. 20].

定理 6 (Herglotz)**.** $\forall \phi \in \mathcal{P}$ は次の表示を *unique* に持つ.

$$\phi(\zeta) = \alpha\zeta + \beta + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{x - \zeta} - \frac{x}{x^2 + 1} \right\} d\mu(x). \tag{7}$$

ここで, μ は実軸上の正値 *Borel* 測度で $\int_{\mathbb{R}} (x^2 + 1)^{-1}\, d\mu(x) < \infty$ を満たし,

$$\alpha = \lim_{y \to \infty} \mathrm{Im}\ \phi(iy)/y \ge 0, \quad \beta = \mathrm{Re}\ \phi(i) \in \mathbb{R}.$$

Pick 函数 ϕ に対して, $\phi^*(z) = \overline{\phi(\overline{z})}$ として,

$$\phi(z) = \begin{cases} \phi(z), & (z \in \mathbb{C}_+) \\ \phi^*(z), & (z \in \mathbb{C}_-) \end{cases}$$

のように同じ記号 ϕ で定義域を $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に拡張しておく.

定理 7. 任意の *Pick* 函数 $\phi \in \mathcal{P}$ に対して, 函数

$$k_\phi(z, w) = \frac{\phi(z) - \overline{\phi(w)}}{z - \overline{w}} \tag{8}$$

は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ で正定値である. この函数を再生核とする $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上の *RKHS* を $L(\phi)$ とする. *Pick* 函数 ϕ の *Herglotz* 測度を μ としたとき $F \in L^2(d\mu)$ の *Cauchy* 変換 T: $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して,

$$(TF)(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{F(t)}{t - z}\, d\mu(t)$$

は *isometry* T: $L^2(d\mu) \to L(\phi)$ を与え, $L(\phi) \ominus \operatorname{ran} T$ は高々定数函数からなる. 特に, $L(\phi)$ は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上の正則函数からなる. 更に, ϕ が *inner (i.e.* 非接境界値が実数 *a.e.)* のとき, 次は同値.

(i) $g \in L(\phi)$.

(ii) g は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上の正則函数で $g/(\phi + i)$, $g^*/(\phi + i) \in H^2(dt)$ かつ $g_+ = g_-$ *a.e.* ただし, $g_\pm(x)$ は g の $\mathbb{C}_+$, $\mathbb{C}_-$ における $x \in \mathbb{R}$ での非接境界値.

このとき, $g \in L(\phi)$ のノルムは

$$\|g\|^2 = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{|g(t)|^2}{\phi(t)^2 + 1}\, dt$$

で与えられる.

証明. 先ず, Pick 函数 ϕ に対して定理の前に述べた拡張は Herglotz 積分表示 (7) による ϕ の拡張と一致することに注意する. Herglotz 表示 (7) より $\exists \alpha \geq 0$ s.t.

$$\frac{\phi(z) - \overline{\phi(w)}}{z - \overline{w}} = \alpha + \int_{\mathbb{R}} \frac{d\mu(t)}{(t - z)(t - \overline{w})}.$$

したがって, (8) は正定値核の和として $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上の再生核になる. 上で示したように, $F \in L^2(d\mu)$ の Cauchy 変換

$$(TF)(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{F(t)}{t - z}\, d\mu(t)$$

は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の正則函数で isometry $T\colon L^2(d\mu)\to \operatorname{ran}T$ を与える. 再生核の一般論より $L(\phi)$ は $\operatorname{ran}T$ と定数の和であるが, これらの部分空間の共通部分が 0 だから, $L(\phi)$ は $\operatorname{ran}T$ と高々定数函数の直交和になる.

ϕ が inner のとき, 境界値は実数だからその虚部として μ の Poisson 積分の境界値は a.e. で 0. したがって, μ は特異測度である. よって, 特異測度の Cauchy 変換と定数の和として $f_+=f_-$ a.e. $\forall f\in L(\phi)$. 残りの事実は定理 5 より分かる. □

定理 8 (De Branges [4, Theorem 5, p. 9]). *$\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の RKHS $L(\phi)$ は次の性質をもつ.*

(L1) $TF=f \implies \forall w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ T(F/(\cdot-w))=(f-f(w))/(\cdot-w)$.

(L2) $\forall f\in L(\phi),\ \forall w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ (f-f(w))/(\cdot-w)\in L(\phi)$.

(L3) $\forall f,g\in L(\phi),\ \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$,

$$\Big\langle \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}, g(z)\Big\rangle_{L(\phi)} - \Big\langle f(z), \frac{g(z)-g(\beta)}{z-\beta}\Big\rangle_{L(\phi)} = (\alpha-\overline{\beta})\Big\langle \frac{f(z)-f(\alpha)}{z-\alpha}, \frac{g(z)-g(\beta)}{z-\beta}\Big\rangle_{L(\phi)}.$$

逆に上の定理の性質によって $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の函数空間 $L(\phi)$ を特徴付けすることができる. 次の定理は de Branges の original より正則性を仮定しない所だけ少し良くなっている.

定理 9 (De Branges [4, Theorem 6]). *$\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の函数 Hilbert 空間 H が, $\exists w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ において point evaluation が有界で, 定理 8 の条件 (L2), (L3) (において $L(\phi)$ を H に変更したもの) を満たすならば, $H=L(\phi)$, $\exists\phi\in\mathcal{P}$ の形である. 特に, H の元は正則函数である.*

証明. 先ず, H は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の RKHS を示す. $\forall\alpha\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ とする. (L3) で $\alpha=\beta$, $f=g\in H$ とおくと, Schwarz の不等式より

$$|\operatorname{Im}\alpha|\Big\|\frac{f-f(\alpha)}{\cdot-\alpha}\Big\|^2 \le \|f\|\Big\|\frac{f-f(\alpha)}{\cdot-\alpha}\Big\| \implies \Big\|\frac{f-f(\alpha)}{\cdot-\alpha}\Big\| \le \frac{1}{|\operatorname{Im}\alpha|}\|f\|.$$

したがって, (L2) より函数

$$f+(\alpha-w)\frac{f-f(\alpha)}{\cdot-\alpha}\in H$$

を点 w で evaluate して,

$$|f(\alpha)|\le C\Big\|f+(\alpha-w)\frac{f-f(\alpha)}{\cdot-\alpha}\Big\| \le C\Big(1+\frac{|\alpha-w|}{|\operatorname{Im}\alpha|}\Big)\|f\|.$$

ゆえに point evaluation $f(\alpha)$ も f に関して有界だから, H は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の RKHS である. また, 最後の不等式より H の函数族はノルム有界ならば局所有界だから, $(f(z)-$

$f(\alpha))/(z-\alpha)$ は $z\to\alpha$ のとき有界. したがって, $\forall f\in H$ は連続となり, 条件 (L2) より微分可能. よって, H の元は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ で正則である. 点 $w\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ における再生核を k_w とおくと, (L3) で $\alpha=\overline{\beta}$ として

$$\left\langle f(z), \frac{k_w(z)-k_w(\alpha)}{z-\alpha}\right\rangle = \left\langle \frac{f(z)-f(\overline{\alpha})}{z-\overline{\alpha}}, k_w(z)\right\rangle = \frac{f(w)-f(\overline{\alpha})}{w-\overline{\alpha}} = \left\langle f(z), \frac{k_w(z)-k_{\overline{\alpha}}(z)}{\overline{w}-\alpha}\right\rangle.$$

$f\in H$ は任意だから, $\forall z, w, \alpha$ に対して,

$$\frac{k_w(z)-k_w(\alpha)}{z-\alpha} = \frac{k_w(z)-k_{\overline{\alpha}}(z)}{\overline{w}-\alpha}.$$

よって,

$$(z-\overline{w})k_w(z) = (z-\alpha)k_{\overline{\alpha}}(z) + (\alpha-\overline{w})k_w(\alpha). \tag{9}$$

ここで,

$$\psi(z) = (z-\alpha)k_{\overline{\alpha}}(z)$$

とおくと, (9) より

$$\begin{aligned}\psi(z)-\overline{\psi(w)} &= (z-\alpha)k_{\overline{\alpha}}(z) - \overline{(w-\alpha)k_{\overline{\alpha}}(w)} \\ &= (z-\overline{w})k_w(z) - \{(\alpha-\overline{w})k_w(\alpha) - (\overline{\alpha}-\overline{w})k_w(\overline{\alpha})\} \\ &= (z-\overline{w})k_w(z) - (\alpha-\overline{\alpha})k_\alpha(\alpha).\end{aligned}$$

よって,

$$\phi(z) = \psi(z) + \frac{\alpha-\overline{\alpha}}{2}k_\alpha(\alpha)$$

とおくと, $k_\alpha(\alpha)\in\mathbb{R}$ より

$$k_w(z) = \frac{\phi(z)-\overline{\phi(w)}}{z-\overline{w}}.$$

これを (9) に代入して $\phi(\alpha)=\overline{\phi(\overline{\alpha})}$ を得る. $k_z(z)=\|k_z\|^2\geq 0$ より $\mathrm{Im}\ \phi(z)/\mathrm{Im}\ z\geq 0$ だから, $\mathbb{C}_+$ 上で $\mathrm{Im}\ \phi\geq 0$. ϕ は正則より, $\phi\in\mathcal{P}$. 再生核が一致するので再生核空間の一意性より $H=L(\phi)$. □

7 De Branges space on $\mathbb{C}$

整函数 $E(z)$ は $\forall z\in\mathbb{C}_+$ で不等式

$$|E(z)| > |E(\overline{z})|$$

を満たすとする. 一般に $f^*(z)=\overline{f(\overline{z})}$ と書くことにして,

$$A(z)=\frac{E(z)+E^*(z)}{2},\quad B(z)=\frac{E(z)-E^*(z)}{2i}$$

とおくと, $A(z),B(z)$ は実軸上で実数値をとる整函数であり, $E=A+iB$, $E^*=A-iB$ となる. このとき, ノルムが

$$\|f\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{f(t)}{E(t)}\right|^2 dt<\infty$$

で $|f(z)|^2\le\|f\|^2K(z,z)$, $\forall z\in\mathbb{C}$ を満たす整函数 f からなる空間を $\mathcal{H}_E$ とおく. ただし,

$$\begin{aligned}K(z,w)&=\frac{A(z)\overline{B(w)}-B(z)\overline{A(w)}}{\pi(z-\overline{w})}\\&=-\frac{E(z)\overline{E(w)}-E^*(z)\overline{E^*(w)}}{2\pi i(z-\overline{w})}.\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_E$ は $\mathbb{C}$ 上の RKHS で $K(z,w)$ を再生核にもつ. $\mathcal{H}_E$ を整函数 E に付随する *de Branges space* という.

注意 2. (i) 上記の表現は de Branges の本 [4] とは符号が異なることに注意する. De Branges は $E=A-iB$ と分解しているので函数 A は同一だが, B の方は符号が上の定義と逆である.

(ii) $f=A/B$ と定義すると, f は $\mathbb{C}$ 上の有理型函数であり, $\mathbb{C}_+$ で正則で $\mathrm{Im}\ f(z)>0$, $z\in\mathbb{C}_+$. $f(z)$ は B の零点を除いて $\mathbb{R}$ 上で有限な境界値 $f(x)\in\mathbb{R}$ をもつ, i.e. f は Pick 函数で $\mathbb{C}_+$ の inner function.

($\because$) $|E(z)|>|E^*(z)|$ より $|A+iB|>|A-iB|$. したがって, $z\in\mathbb{C}_+$ ならば $B\neq 0$ より f は正則. また, $|f+i|>|f-i|\implies \mathrm{Im}\ f>0$ on $\mathbb{C}_+$. //

このとき, $\mathcal{H}_E$ の再生核は

$$K(z,w)=B(z)\overline{B(w)}\cdot\frac{f(z)-\overline{f(w)}}{\pi(z-\overline{w})}$$

と表される. したがって, $\mathcal{H}_E=B\cdot L(f)$ であり, $\mathcal{H}_E$ は $L(f)$ と等長であることが分かる.

例 1 (定数の空間)**.** De Branges space の一番簡単な例は定数函数の空間 $\mathbb{C}$ である.
$E(z)=z+i$, $A(z)=z$, $B(z)=1$, $f(z)=z$, $k(z,w)=1/\pi$, $\langle a,b\rangle=\pi a\overline{b}$.

例 2 (Payley-Winer 空間). De Branges space の重要な例として, $E(z) = \exp(-iaz)$ $(a > 0)$ の場合を考える. この場合,

$$A(z) = \cos az, \quad B(z) = -\sin az, \quad f(z) = -\cot(az) \in \mathcal{P}$$

であり, 再生核は

$$K(z,w) = \frac{\sin a(z-\overline{w})}{\pi(z-\overline{w})}.$$

対応する再生核空間は, いわゆる台が区間 $[-a, a]$ に含まれる函数の Fourier 変換のなす空間, i.e. *Paley-Wiener* **空間**であり, exponetial type が a 以下で $\mathbb{R}$ 上 2 乗可積な整函数全体からなる.

7.1 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ における de Branges 型空間

De Branges 空間は複素平面 $\mathbb{C}$ 上の RKHS であるが, これを少し一般化して $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の類似の RKHS を考える事ができる. 以下, その説明を述べる. $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ とする. $E(z)$ を $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上の正則函数で $\forall z \in \mathbb{C}_+$ に対して不等式

$$|E(z)| > |E(\overline{z})|$$

が成り立つと仮定する.

$$A(z) = \frac{E(z) + E^*(z)}{2}, \quad B(z) = \frac{E(z) - E^*(z)}{2i}$$

とおくと, $A(z)$, $B(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ 上の正則函数で $A^* = A$, $B^* = B$ かつ $E = A + iB$, $E^* = A - iB$ と表される. 仮定より $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ で $B(z) \neq 0$ だから, $f = A/B$ と定義すると, f は $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ で正則で $f^* = f$ かつ $\mathbb{C}_+$ で $\mathrm{Im}\, f > 0$ (i.e. Pick 函数). このとき,

$$\begin{aligned} K(z,w) &= \frac{A(z)\overline{B(w)} - B(z)\overline{A(w)}}{\pi(z-\overline{w})} \\ &= B(z)\overline{B(w)} \cdot k_f(z,w), \end{aligned}$$

ただし,

$$k_f(z,w) = \frac{f(z) - \overline{f(w)}}{\pi(z-\overline{w})}.$$

Pick 函数の Herglotz 表示より f は Cauchy 変換として $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ の正則函数へ拡張され, $k_f(z,w)$ 及び $K(z,w)$ は簡単な計算で $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ で正定値核であることが分かる. De Branges space のようにノルムが積分で explicit に表現できるように, $\mathbb{C}_+$ で Pick 函数 f の境界値 f_+ が $\partial\mathbb{C}_+ = \mathbb{R}$ 上で実数値 a.e. $\Longleftrightarrow$ 有界正則函数 E^*/E が $\mathbb{C}_+$ で inner という条件を仮定する. このとき, K を再生核とする $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ 上の RKHS を $\mathcal{H}_E$ と表し, $\mathcal{H}_E$ を $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ の *de Branges* **型空間**という. 整函数の de Branges 空間の $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ への制限は de Branges 型空間となっている.

命題 7. *De Branges* 型空間 $\mathcal{H}_E$ の元は $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ の正則函数 g で $g/E,\ g^*/E \in H^2(dt)$ かつ $(g/E)_+ = (g/E)_-$ *a.e.* として特徴付けられ, ノルムは

$$\|g\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{g(t)}{E(t)}\right|^2 dt \tag{10}$$

で与えられる. ただし, $g(t)/E(t)$ は点 $t\in\mathbb{R}$ における函数 g/E の上下で共通の非接境界値である.

証明. 定理 5 より k_f を再生核とする $\mathbb{C}_+$ 上の RKHS $\mathcal{H}_f$ の元 g は $g/(f+i)\in H^2(dt)$ で特徴付けられ, そのノルムは

$$\|g\|_{k_f}^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{|g(t)|^2}{1+f^2(t)} dt$$

である. 正則函数 $B(z)$ による積作用素は単射だから, $\mathbb{C}_+$ 上の RKHS $\mathcal{H}_E|_{\mathbb{C}_+}$ の元 h は $h = Bg,\ g\in\mathcal{H}_f$ の形に表され, そのノルムは

$$\|h\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{|g(t)|^2}{1+f^2(t)}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{h(t)}{E(t)}\right|^2 dt$$

で与えられる. 仮定より f は inner だから, f の Herglotz 表現を与える測度 μ は特異であり, $\mathcal{H}_f$ の元 g は $L^2(\mu)$ の元の Cauchy 変換 + 高々定数の形だから, $g_+ = g_-$ a.e. $H^2(dt)$ の元は境界値で定まるので, $g|_{\mathbb{C}_+}$ の $\mathbb{C}_-$ への拡張は一意的. よって, $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ の $\mathcal{H}_E$ のノルムと $\mathbb{C}_+$ 上に制限した RKHS $\mathcal{H}_E|_{\mathbb{C}_+}$ のノルムは一致する. したがって, $\mathcal{H}_E$ のノルムは (10) で与えられる. □

参考文献

[1] T. Ando and T. Hara, *Another approach to the strong Parrott theorem*, J. Math. Anal. Appl. **171** (1992), no. 1, 125–130.

[2] M. Bakonyi and H. J. Woerdeman, *On the strong Parrott completion problem*, Proc. Amer. Math. Soc. **117** (1993), no. 2, 429–433.

[3] L. de Branges and J. Rovnyak, *Square summable power series*, Rinehart and Winston, New York, 1966.

[4] L. de Branges, *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968.

[5] W. F. Donoghue, *Monotone matrix functions and analytic continuation*, Springer-Verlag, New York, 1974, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 207.

[6] C. Foias and A. Tannenbaum, *A strong Parrott theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), no. 3, 777–784.

[7] S. Parrott, *On a quotient norm and the Sz.-Nagy - Foiaş lifting theorem*, J. Funct. Anal. **30** (1978), no. 3, 311–328.

[8] D. Sarason, *Sub-Hardy Hilbert spaces in the unit disk*, University of Arkansas Lecture Notes in the Mathematical Sciences, 10, John Wiley & Sons Inc., New York, 1994, A Wiley-Interscience Publication.

[9] H. H. Schaefer, *Topological vector spaces*, Springer-Verlag, New York, 1971, Third printing corrected, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 3.

[10] L. Schwartz, *Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés (noyaux reproduisants)*, J. Analyse Math. **13** (1964), 115–256.

[11] Z. Sebestyén, *Short proof to a strong Parrott theorem*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **36** (1993), 129–131.

[12] D. Timotin, *A note on Parrott's strong theorem*, J. Math. Anal. Appl. **171** (1992), no. 1, 288–293.

[13] A. Yamada, *Parrott's theorem, complementary spaces and reproducing kernel Hilbert spaces*, in preparation.