数理解析研究所講究録
第 1981 巻 2016 年 51-54

ワイヤレスネットワーク最適化問題に現れる Interference 写像の性質

神奈川大学・工学部　進藤　晋
Susumu Shindoh
Faculty of Engineering, Kanagawa University

1 はじめに

1995 年に，Yates [7] は，電力制御マルチユーザワイヤレスシステムにおける干渉をモデル化するために，interference function の公理的フレームワークを与えた．その後，このフレームワークの変形版が Boche[1, 2], Feyzmahdavian[3] らによって与えられている．

一方，非線形 Perron Frobenius 理論は，非負行列に関する有名な Perron Frobenius の定理の拡張を扱う [5].

本研究の目的は，interference function の性質と非線形 Perron Frobenius 理論との関連について説明することである．

2 Homogeneous 写像

K 次元実ユークリッド空間 R^K の部分集合 R_+^K および R_{++}^K を，$R_+^K=\{x=(x_1,\cdots,x_K):x_i\geq 0,i=1,\cdots,K\}$，$R_{++}^K=\{x=(x_1,\cdots,x_K):x_i>0,i=1,\cdots,K\}$ で定義する．このとき，R_+^K は R^K 上の内点をもつ閉凸錐となる．

$x,y\in R^K$ に対して，$x\leq y$ を $y-x\in R_+^K$，すなわち，すべての $i(i=1,\cdots,K)$ に対して，$x_i\leq y_i$ で定義する．このとき，$\leq$ は R^K 上の半順序となる．

$x,y\in R^K$ とする．$f:R_+^K\rightarrow R_+^K$ に対して，$0\leq x\leq y$ ならば，$0\leq f(x)\leq f(y)$ を満たすとき，f は順序を保存するという．$\alpha>0,x\in R_+^K$ に対して，$f(\alpha x)=\alpha f(x)$ を満たすとき，f は homogeneous であるという．$0<\alpha<1,x\in R_+^K$ に対して，$\alpha f(x)\leq f(\alpha x)$ を満たすとき，f は subhomogeneous であるという．

補題 1 $f:R_+^K\rightarrow R_+^K$ が *subhomogeneous* であるための必要十分条件は，$\alpha>1,x\in R_+^K$ に対して，不等式 $f(\alpha x)\leq\alpha f(x)$ が成り立つことである．

3 Standard Interference Function

この節では，Yates が定義した standard interference function について説明する．

定義 1 *(Yates[7])*
次の公理を満たすとき，関数 $I:R_+^K\rightarrow R_+$ を *standard interference function* (以下 *SIF* と略記) という:

(1) *(positivity)* $I(p) > 0$ *for any* $p \in R_+^K$

(2) *(monotonicity)* $I(p) \geq I(q)$ *for any* $p \geq q$

(3) *(scalability)* $\alpha I(p) > I(\alpha p)$ *for any* $\alpha > 1$

注 1) $f : R_+^K \to R_+^K$ に対して，f の各成分が SIF のとき，f を standard interference map（以下 SIM と略記）とよぶことにする．上の定義と補題 1 から，SIM は順序を保存する subhomogeneous 写像となる．

Yates は [7] において，SIR (signal to interference ratio) に関する条件を，SIM を用いた不等式

$$p \geq I(p)$$

で表し，任意の初期点 $p(0) \in R_+^K$ に対する逐次アルゴリズム

$$p(t+1) = I(p(t)), t = 0, 1, \cdots \tag{1}$$

を考察して，以下の結果を得た．

定理 1 *SIM* $I : R_+^K \to R_+^K$ に対して，以下が成り立つ．

(1) 逐次アルゴリズム (1) が不動点 $p^* \in R_+^K (I(p^*) = p^*)$ をもてば，不動点は唯一である．

(2) p が *feasible,* すなわち，$p \geq I(p)$ ならば，$I^n(p)$ は単調減少し，唯一の不動点 p^* に収束する．ここで，I^n は，I による n 回の合成写像を表す．

(3) $I(p)$ が *feasible* ならば，任意の初期点 q に対して，逐次アルゴリズムは唯一の不動点 p^* に収束する．

注 2) 上の定理は，SIM I の連続性を仮定している．このことは，Boche and Schubert[1, 2]) で指摘されている（以下の系 1 参照）．

4 General Interference Function

この節では，Boche と Schubert が定義した interference function について述べる．

定義 2 *(Boche and Schubert[2])*

次の公理を満たすとき，関数 $I : R_+^K \to R_+$ を *general interference function* (以下 *GIF* と略記) という:

(1) *(positivity)* ある $p \in R_{++}^K$ が存在して，$I(p) > 0$

(2) *(monotonicity)* $I(p) \geq I(q)$ *for any* $p \geq q$

(3) *(scale invariance)* $I(\alpha p) = \alpha I(p)$ *for any* $\alpha \geq 0$

注 3) $f : R_+^K \to R_+^K$ に対して，f の各成分が GIF のとき，f を general interference map（以下 GIM と略記）とよぶことにする．GIM は，順序を保存する homogeneous 写像となる．定義 2 から，以下の補題が導かれる．

補題 2 $I : R_+^K \to R_+^K$ が *GIM* ならば，任意の $q \in R_{++}^K$ に対して，$I(q) \in R_{++}^K$，すなわち $I(q) > 0$.

補題 3 $\mathcal{K}=\{1,2,\cdots,K\}$ とする．$I:R_{+}^{K}\rightarrow R_{+}$ が *GIF* ならば，任意の $p,q\in R_{++}^{K}$ に対して，次の不等式が成り立つ：

$$min_{k\in\mathcal{K}}\frac{p_k}{q_k}I(q)\leq I(p)\leq max_{k\in\mathcal{K}}\frac{p_k}{q_k}I(q) \tag{2}$$

補題3から，GIM の連続性が導かれる (Boche and Schubert[1])．

補題 4 $I:R_{+}^{K}\rightarrow R_{+}^{K}$ が *GIM* ならば，I は R_{++}^{K} で連続となる．

さらに，Boche and Schubert[2] は，SIF が GIF として定式化できることを示した．よって，以下のことが言える：

系 1 $I:R_{+}^{K}\rightarrow R_{+}^{K}$ が *SIM* ならば，I は R_{++}^{K} で連続となる．

5 非線形 Perron Frobenius 理論

homogeneous な写像 $f:R_{+}^{K}\rightarrow R_{+}^{K}$ に対して，$\|f^m\|=sup\{\|f^m(x)\|:x\in R_{+}^{K},\|x\|\leq 1\}$ が定義できる．ここで，$\|\cdot\|$ は R^K 上のノルムを表す．

この節では，GIM $I:R_{+}^{K}\rightarrow R_{+}^{K}$ の非線形 Perron Frobenius 理論に関連する結果を与える．

命題 1 $I:R_{+}^{K}\rightarrow R_{+}^{K}$ を連続な *GIM* とする．このとき，以下が成り立つ：

(1) $r(I)=lim_{m\rightarrow\infty}\|I^m\|^{1/m}$ が存在する．

(2) ある $p\in R_{+}^{K}\backslash\{0\}$ に対して，$I(p)=\lambda p$ ならば，$\lambda\leq r(I)$

注 4) 命題 1(2) は，例えば，max-min SIR balancing 問題 [6]

$$sup_{p\in R_{++}^{K}}min_{k\in\mathcal{K}}SIR_k(p)$$

と密接な関係がある．ここで，$SIR_k(p)=p_k/I_k(p)$.

6 今後の課題

非線形 Perron Frobenius 理論の視点から，Gaubert and Gunawardena[4] は，R_{+}^{K} 上の順序を保存する homogeneous 写像の性質を研究している．そこで使用されている手法を考慮に入れて，GIM それ自身の性質，GIM から導かれる集合の性質等を調べる必要がある．

参考文献

[1] Boche, H. and M. Schubert : The structure of general interference functions and applications, IEEE Trans. Inf. Theory, Vol. 54, No. 11, pp.4980 - 4990, (2008)

[2] Boche, H. and M. Schubert : A unifying approach to interference modeling for wireless networks, IEEE Trans. Signal Process., Vol. 58, No. 6, pp.3282 - 3297, (2010)

[3] Feyzmahdavian, H. R. et al. : Contractive interference functions and rates of convergence of distributed power control laws, IEEE Trans. Wirel Commun., Vol. 11, No. 12, pp.4494 - 4502, (2012)

[4] Gaubert, S. and J. Gunawardena : The Perron Frobenius theorem for homogeneous monotone functions, Transactions of the AMS, Vol. 356, No. 12, pp.4931 - 4950, (2004)

[5] Lemmens, B. and R. Nussbaum : *Nonlinear Perron Frobenius Theory*, Cambridge University Press (2012).

[6] Vucic, N. and M. Schubert : Fixed point iteration for max-min sir balancing with general interference functions, ICASSP 2011, pp.3456 - 3459, (2011)

[7] Yates, R. D. : A framework for uplink power control in cellular radio systems, IEEE J. Select. Areas Commun. , Vol. 13, No. 7, pp.1341 - 1348, (1995)