

## 半無限半正定値計画問題に対する主双対パス追跡法

奥野 貴之  
Takayuki Okuno

東京理科大学工学部 1 部経営工学科  
Department of Management Science, Faculty of Engineering Division I,  
Tokyo University of Science

福島 雅夫  
Masao Fukushima

南山大学情報理工学部情報システム数理学科  
Department of Information systems and Mathematical Sciences,  
Faculty of Information Sciences and Engineering, Nanzan University

### 概要

半無限計画問題とは、有限個の決定変数と無限個の制約式で特徴付けられる最適化問題であり、チェビシェフ近似問題やフィルター設計など重要な応用例が多く存在することから盛んに研究されてきた。そして、近年では半正定値錐や 2 次錐など特殊な凸錐を制約として含むような半無限計画問題が研究されてきている。本研究では、半正定値錐制約をもち、関数がすべて線形である半無限計画問題 (Linear semi-infinite semi-definite programming problem: LSISDP) について考える。LSISDP の最適解を求めるためにパス追跡型のアルゴリズムを提案し、その大域的収束性を示す。

## 1 はじめに

本研究では、つぎのような半正定値錐制約と無限個の線形不等式を持つ半無限計画問題 (Linear semi-infinite semi-definite programming problem: LSISDP) を考える。

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } c^\top x \\ & \text{subject to } a(\tau)^\top x - b(\tau) \leq 0 \quad (\tau \in T), \\ & \quad \quad \quad F(x) \in S_+^m. \end{aligned} \tag{1.1}$$

ここで、 $c \in \mathbb{R}^n$ 、および  $a : T \rightarrow \mathbb{R}^n$ 、 $b : T \rightarrow \mathbb{R}$  は与えられたベクトルと連続関数とする。また  $S^m$  は  $m$  次元実対称行列の集合、 $S_+^m$ 、 $S_{++}^m$  はそれぞれ  $m$  次元半正定値対称行列と正定値対称行列の集合であり、行列値関数  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow S^m$  は、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  に対して  $F(x) := F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i$ 、 $F_i \in S^m$  ( $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ) で与えられるアフィン関数とする。(1.1) に等式制約も含めて考えることができるが、本稿では簡単のため等式制約がない形だけを考える。安定性を考慮したあるフィルター設計問題 [28] などが LSISDP として定式化される。

もし、最初の線形半無限不等式  $a(\tau)^\top x - b(\tau) \leq 0$  ( $\tau \in T$ ) がなければ、LSISDP (1.1) はよく知られた半正定値計画問題 (Semi-definite programming problem: SDP) に他ならない。SDP はその表現能力の高さから最適化分野に限らない各方面で問題解決のための強力な道具として注目されている最適化問題である [26, 27, 24]。また SDP は、線形計画問題 (Linear programming problem: LP), 凸 2 次制約つき 2 次計画問題, 2 次錐計画問題 (Second-order cone programming problem: SOCP) をサブクラスとして含んでいる。そうした SDP を解くための手法として主双対内点法 [15, 11, 1, 9], 拡張ラグランジュ法 [35], 相補性関数を用いて構成した SDP と等価な方程式系へのニュートン型手法の適用 [3, 33] などがあげられる。それらの中でも主双対内点法が最も有効な手法であると考えられており, SDPT3[25], SDPA[32], SeDuMi[22] といった主双対内点法を実装した強力なフリーソルバも公開されている。また非線形関数を含んだ SDP の研究もまだ多くはないものの近年活発に行われている [30, 31, 5]。

また、半正定値錐制約  $F(x) \in S^m$  がなければ、LSISDP (1.1) は線形半無限計画問題 (Linear semi-infinite programming problem: LSIP) という半無限計画問題の中で最も基本的な問題になる [6]。通常の LP と同じように、単体法的な手法 [2] が LSIP に対して開発されている。同様に、主内点法 [23], 主双対内点法 [21] やパス追跡法 [4] といった手法も LSIP に対して提案はされているものの、LP に対するそれらとは異なり、際立った成果の報告はない。

LSISDP (1.1) のような錐制約を持つ半無限計画問題に関する研究は SDP や SIP 自身の研究に比べて少ないものの、近年進んできている。例えば、[8] では有限個の 2 次錐制約を持つ LSIP に対して陽的交換法を、[13] では有限個の半正定値錐制約を持つ LSIP に対して緩和切除平面アプローチを、また [17] では、無限個の閉凸錐制約を持つ凸な SIP に対して陽的交換法と正則化法を組み合わせた正則化陽的交換法を提案した。これらの方法はいずれも各反復で SOCP や SDP を正確に解くことを要求している。しかしながら、SOCP や SDP を効率よく解く手法が確立されているといえども、それらを解く計算コストは小さいとはいえない。

本研究の目的は、LSISDP (1.1) をより効率的に解くために、SDP を逐次的に解くことに頼らないアルゴリズムを構築することである。提案手法は [31] における非線形な SDP に対する主双対内点法のアイデアにもとづき、後に定義する BKKT 点から構成されるパ斯的な集合を近似的にたどりながら、KKT 点に到達するパス追跡型の手法となっている。また提案手法の各反復では、近似 BKKT 点を見つけるために有限個の線形制約を持つ 2 次計画問題を解くだけであり、SDP を解く必要はない。

本稿の構成は次のようになる。まず、第 2 節では、提案手法を述べるための準備として LSISDP (1.1) に関する KKT 条件と BKKT 条件を導入し、それらに関連して KKT 点と BKKT 点を定義する。また LSISDP (1.1) に対する Haar の双対問題を導き、それと KKT 点、BKKT 点との関係について述べる。第 3 節では、LSISDP (1.1) の KKT 点を求めるためのパス追跡法を提案し、その大域的収束性を証明する。第 4 節では、BKKT 点を求めるために SQP 法と交換法を組み合わせる手法を提案する。最後の 5 節でまとめと今後の課題について述べる。

なお、本稿では、上の文章中で定義したものに加えて以下の記号を用いる。まず  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  を  $(x_i)_{i=1}^n$  で表し、非負錐  $\mathbb{R}_+^n$  を  $\mathbb{R}_+^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0 \ (i = 1, 2, \dots, n)\}$  とする。また行列空間  $\mathbb{R}^{m \times m}$  における内積  $\bullet$  とノルム  $\|\cdot\|_F$  として、 $X, Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$  に対して  $X \bullet Y := \text{tr}(X^\top Y)$ ,  $\|X\|_F := \sqrt{X \bullet X}$  で定義する。さらに作用素  $\circ : S^m \times S^m \rightarrow S^m$  を  $X \circ Y := (XY + YX)/2$  で定義する。

## 2 準備

### 2.1 LSISDP に対する KKT 条件

本節では, LSISDP (1.1) の最適解が満たすべき必要十分条件である Karush-Kuhn-Tucker (KKT) 条件について説明し, あとで提案する手法のためにバリア KKT (BKKT) 条件を導入する.

まず LSISDP (1.1) における Slater 制約想定を以下のように定義する.

**定義 2.1** (Slater 制約想定). LSISDP (1.1) において Slater 制約想定が成り立つとは, ある  $\tilde{x}$  が存在して以下を満たすときをいう.

$$a(\tau)^\top \tilde{x} - b(\tau) < 0 \quad (\tau \in T), \quad F(\tilde{x}) \in S_{++}^m.$$

LSISDP (1.1) は無限個の制約を持つため, その最適解における KKT 条件は無限個の制約を用いて表現されるのが自然である. ところが Slater 制約想定が LSISDP (1.1) で成り立っているならば, KKT 条件は適当な  $n$  個 (決定変数  $x$  の次元) の制約関数だけで記述することができる.

**定理 2.1.**  $x^* \in \mathbb{R}^n$  を LSISDP (1.1) の最適解とする. このとき, Slater 制約想定が LSISDP で成り立つならば  $n$  個の添字  $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_n^* \in T$ ,  $n$  個のラグランジュ乗数  $y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^* \in \mathbb{R}$ , ある行列  $V_* \in S^m$  が存在して以下が成り立つ.

$$c + \sum_{j=1}^n a(\tau_j^*) y_j^* - \begin{pmatrix} F_1 \bullet V_* \\ \vdots \\ F_n \bullet V_* \end{pmatrix} = 0, \quad (2.1)$$

$$F(x^*) \bullet V_* = 0, \quad F(x^*) \in S_+^m, \quad V_* \in S_+^m, \quad (2.2)$$

$$a(\tau_j^*)^\top x^* - b(\tau_j^*) \leq 0, \quad y_j^* \geq 0, \quad \left( a(\tau_j^*)^\top x^* - b(\tau_j^*) \right) y_j^* = 0 \quad (1 \leq j \leq n) \quad (2.3)$$

逆に,  $x^*$  が LSISDP (1.1) における実行可能点で上の条件 (2.1)–(2.3) が成り立つならば,  $x^*$  は LSISDP (1.1) の最適解である.

(2.2) は半正定値相補性条件である. この条件は SDP に対する主双対内点法においてニュートン方程式を導出する際に, 1 節の最後で定義した  $\circ$  を用いた等価な条件

$$F(x^*) \circ V_* = 0, \quad F(x^*) \in S_+^m, \quad V_* \in S_+^m \quad (2.4)$$

でしばしば置き換えられるが, 本研究でも (2.2) ではなく, (2.4) を採用する. また KKT 条件を満たす LSISDP (1.1) の実行可能点  $x \in \mathbb{R}^n$ , 添字  $\tau^* := (\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_n^*) \in T^n := \overbrace{T \times \dots \times T}^{n \text{ 個の積}}$ , そしてラグランジュ乗数である  $(y^*, V_*) \in \mathbb{R}_+^n \times S_+^m$  (ただし  $y^* := (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)^\top \in \mathbb{R}^n$  とする) をあわせて LSISDP の KKT 点とよぶことにする.

上の定理から LSISDP (1.1) の最適解を求めるためには KKT 点を求めれば十分であることがわかる. 通常の SDP と最も異なる点は, (2.1), (2.3), (2.4) が成り立つ添字  $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_n^* \in T$  を推定しなければならないことである. また LSISDP に対する実行可能点を見つけるのも, 通常の SDP と比べて簡単ではない.

次に BKKT 条件を定義する.  $\mu \geq 0$  を一つとり,  $I \in \mathbb{R}^{m \times m}$  を単位行列とする. BKKT 条件とは, KKT 条件 (2.1), (2.3), (2.4) において半正定値相補性条件 (2.4) を  $F(x^*) \circ V_* = \mu I$ ,  $F(x) \in S_+^m, V_* \in S_+^m$  で置き換えたものである.

**定義 2.2** (バリア KKT (BKKT) 条件).  $x^* \in \mathbb{R}^n$  を LSISDP (1.1) の実行可能点,  $\mu \in \mathbb{R}$  を与えられた非負のパラメータとする. このとき,  $x^*$  で BKKT 条件が成り立つとは,  $n$  個の添字  $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_n^* \in T$  と  $y^* := (y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)^\top \in \mathbb{R}^n$  および  $V_* \in S^m$  が存在して

$$c + \sum_{j=1}^n a(\tau_j^*) y_j^* - \begin{pmatrix} F_1 \bullet V_* \\ \vdots \\ F_n \bullet V_* \end{pmatrix} = 0,$$

$$F(x^*) \circ V_* = \mu I, \quad F(x^*) \in S_+^m, \quad V_* \in S_+^m,$$

$$a(\tau_j^*)^\top x^* - b(\tau_j^*) \leq 0, \quad y_j^* \geq 0, \quad \left( a(\tau_j^*)^\top x^* - b(\tau_j^*) \right) y_j^* = 0 \quad (1 \leq j \leq n)$$

が成り立つときをいう. また  $\mu$  をバリアパラメータとよび, BKKT 条件を構成する  $(x^*, y^*, V_*, \tau^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^n \times S_+^m \times T^n$  を LSISDP (1.1) のバリアパラメータ  $\mu$  に関する BKKT 点とよぶ.

## 2.2 Haar の双対問題

LSISDP (1.1) を主問題としたとき, その双対問題は以下のように書くことができる.

$$\begin{aligned} & \underset{u, V}{\text{Maximize}} && - \int_T b(\tau) u(d\tau) - F_0 \bullet V \\ & \text{subject to} && c + \int_T a(\tau) u(d\tau) - (F_i \bullet V)_{i=1}^n = 0, \\ & && V \in S_+^m, \quad u \in M_+(T). \end{aligned}$$

ただし,  $M_+(T)$  は  $T$  上の有界な非負ボレル測度の集合である. この問題を変数として測度  $u \in M_+(T)$  が含まれており, 直接取り扱うのは難しい. そのため,  $M_+(T)$  を非負の有界離散測度で置き換えた Haar の双対問題とよばれる以下の問題を導入する.

$$\begin{aligned} & \underset{u, V}{\text{Maximize}} && - \sum_{\tau \in T} b(\tau) u(\tau) - F_0 \bullet V \\ & \text{subject to} && c + \sum_{\tau \in T} a(\tau) u(\tau) - (F_i \bullet V)_{i=1}^n = 0, \\ & && V \in S_+^m, \quad u \in \mathbb{R}_+^{(T)}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで  $\mathbb{R}_+^{(T)} := \{u : T \rightarrow \mathbb{R}_+ \mid |\text{supp}(u)| < \infty\}$ ,  $\text{supp}(u) := \{\tau \in T \mid u(\tau) \neq 0\}$  である.

主問題と双対問題の任意の実行可能解の組  $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{V})$  に対して以下の弱双対性が成り立つ.

$$c^\top \bar{x} \geq - \sum_{\tau \in T} b(\tau) \bar{u}(\tau) - F_0 \bullet \bar{V}.$$

さらに, Slater 制約想定の下で次のような強双対性も成り立つ. 主問題 (1.1) が最適解  $x^*$  を持つとする. このとき, 双対問題 (2.5) は最適解  $u^* \in \mathbb{R}_+^{(T)}$ ,  $V_* \in S_+^m$  をもち,  $c^\top x^* = - \sum_{\tau \in T} b(\tau) u^*(\tau) - F_0 \bullet V_*$

を満たす.

### 2.3 KKT 点, BKKT 点と主問題, 双対問題との関係

LSISDP における KKT 点  $(x^*, y^*, V_*, \tau^*) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S^m \times T^n$  において  $u^* : T \rightarrow \mathbb{R}_+$  を

$$u^*(\tau) := \begin{cases} \sum_{i \in I(\tau)} y_i^* & (I(\tau) := \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \tau = \tau_i^*\}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

とおけば,  $x^*$  は主問題 (1.1) の最適解,  $(u^*, V^*)$  は Haar の双対問題 (2.5) の最適解となる. 一方, 主問題, 双対問題において半正定値錐制約  $F(x) \in S_+^m, V \in S_+^m$  を対数バリア関数を用いて目的関数に付け加えた問題はそれぞれ

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } c^\top x - \mu \log \det F(x) \\ & \text{subject to } a(\tau)^\top x - b(\tau) \leq 0 \quad (\tau \in T), \\ & \quad \quad \quad F(x) \in S_{++}^m. \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} & \text{Maximize}_{u, V} \quad - \sum_{\tau \in T} b(\tau) u(\tau) - F_0 \bullet V + \mu \log \det V \\ & \text{subject to } \quad c + \sum_{\tau \in T} a(\tau) u(\tau) - (F_i \bullet V)_{i=1}^n = 0, \\ & \quad \quad \quad V \in S_{++}^m, \quad u \in \mathbb{R}_+^{(T)}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

であるが, BKKT 点  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{V}, \bar{\tau}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S^m \times T^n$  が与えられたとき,  $\bar{x}$  は問題 (2.6) の最適解となり,  $\bar{u} \in \mathbb{R}_+^{(T)}$  を

$$\bar{u}(\tau) := \begin{cases} \sum_{i \in \bar{I}(\tau)} \bar{y}_i & (\bar{I}(\tau) := \{i \in \{1, 2, \dots, n\} \mid \tau = \bar{\tau}_i\}) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

で定義すれば  $(\bar{u}, \bar{V})$  は問題 (2.7) の最適解になる.

## 3 パス追跡型アルゴリズム

本節では, LSISDP (1.1) を解くためのパス追跡型アルゴリズムを提案し, その収束定理を与える.

### 3.1 アルゴリズム

本稿のアルゴリズムでは, 各  $\mu > 0$  に対して BKKT 点を近似的に求めながら,  $\mu$  の値を小さくしていくことによって KKT 点を求める. アルゴリズムを記述するために, バリアパラメータ  $\mu \geq 0$  に対する関数  $R_\mu : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S^m \times T^n \rightarrow \mathbb{R}$  を次のように定義する.

$$R_\mu(x, y, V, \tau) := \sqrt{\|\varphi_1(x, y, V, \tau)\|^2 + \|\varphi_2(x, V, \mu)\|_F^2 + \varphi_3(x)^2}$$

ただし,  $y := (y_j)_{j=1}^n, \tau := (\tau_j)_{j=1}^n \in T^n$  とし,

$$\varphi_1(x, y, z, V, \tau) := \begin{pmatrix} c + \sum_{j=1}^n a(\tau_j) y_j - (F_i \bullet V)_{i=1}^n \\ y_1 (a(\tau_1)^\top x - b(\tau_1)) \\ \vdots \\ y_n (a(\tau_n)^\top x - b(\tau_n)) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_2(x, V, \mu) := F(x) \circ V - \mu I,$$

$$\varphi_3(x) := \max_{\tau \in T} \left( a(\tau)^\top x - b(\tau) \right)_+, (\cdot)_+ := \max(\cdot, 0)$$

とする. 方程式  $R_\mu(x, y, V, \tau) = 0$  と BKKT 条件の間には, 以下の関係が成り立つ.

$$R_\mu(x, y, V, \tau) = 0, F(x) \in S_+^m, V \in S_+^m, y \in \mathbb{R}_+^n \iff (x, y, V, \tau) \text{ は } \mu > 0 \text{ に関する BKKT 点,}$$

また  $\mu = 0$  とおけば KKT 条件とのつながりも示される.

$$R_0(x, y, V, \tau) = 0, F(x) \in S_+^m, V \in S_+^m, y \in \mathbb{R}_+^n \iff (x, y, V, \tau) \text{ は KKT 点.}$$

さて, 以下の提案手法では,  $F(x) \in S_+^m, V \in S_+^m$  を満たしながら方程式  $R_\mu(x, y, V, \tau) = 0$  を近似的に解くことを繰り返す. 同時に  $R_\mu(x, y, V, \tau) = 0$  を解く精度を高め, かつ  $\mu$  の値を 0 に近づけていく. 具体的には以下のように記述される.

### Algorithm 1 (パス追跡型アルゴリズム)

**Step 0 (初期設定):** 初期点  $(x^0, y^0, V_0, \tau^0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S^m \times T^n$  を  $F(x^0) \in S_{++}^m, V_0 \in S_{++}^m, y^0 \in \mathbb{R}_+^n$  であるように選ぶ. また正のパラメータ列  $\{\mu_k\}_{k \geq 0}$  および  $\{\varepsilon_k\}_{k \geq 0}$  を  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$  であるように選ぶ.  $k := 0$  とする.

**Step 1 (終了条件):** 以下を満たせばアルゴリズムを終了する.

$$R_0(x^k, y^k, V_k, \tau^k) = 0, F(x^k) \in S_+^m, V_k \in S_+^m, y^k \in \mathbb{R}_+^n.$$

**Step 2 (近似 BKKT 点を求める):** 以下を満たす近似 BKKT 点  $(x^{k+1}, y^{k+1}, V_{k+1}, \tau^{k+1})$  を求める.

$$R_{\mu_k}(x^{k+1}, y^{k+1}, V_{k+1}, \tau^{k+1}) \leq \varepsilon_k, F(x^{k+1}) \in S_+^m, V_{k+1} \in S_+^m, y^{k+1} \in \mathbb{R}_+^n.$$

**Step 3 (更新):**  $k := k + 1$  として Step 1 へ戻る.

適当な条件<sup>1</sup> の下で, 各バリアパラメータ  $\mu > 0$  に対してバリア付き LSISDP (2.6) の最適解は存在すれば一つであり, それを  $x^*(\mu)$  とおくと  $\cup_{\mu > 0} x^*(\mu)$  はパスを構成すると考えられる. このことから Algorithm 1 は, BKKT 条件を近似的に満たす  $y \in \mathbb{R}_+^n, V \in S_+^m, \tau \in T^n$  を求めながらパス  $\cup_{\mu > 0} x^*(\mu)$  を辿っていくアルゴリズムであると見ることができる.

<sup>1</sup>例えば  $F_i \in S^m$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) が  $S^m$  において線形独立であるなどがあげられる. すなわち,  $c_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $c_1 F_1 + c_2 F_2 + \dots + c_n F_n = O$  ならば  $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$  である.

### 3.2 収束解析

収束を解析するにあたって、次のような仮定をおく。

#### Assumption A

- (a) LSISDP (1.1) の実行可能領域が非空なコンパクト集合である。
- (b) Slater 制約想定が LSISDP (1.1) で成り立つ。

さて、生成される点列の有界性に関して以下が成り立つ。

**命題 3.1.** Assumption A-(a) の下で、Algorithm 1 によって生成された点列  $\{x^k\}$  は有界である。

**命題 3.2.** Assumption A の下で、Algorithm 1 によって生成されたラグランジュ乗数の列  $\{V_k\} \subseteq S_+^m$ ,  $\{y^k\} \subseteq \mathbb{R}_+^n$  は有界である。

これらの命題より、生成された点列は必ず集積点をもち、それらは LSISDP の KKT 点であることが示すことができる。

**定理 3.2.** Assumption A の下で  $\{(x^k, y^k, V_k, \tau^k)\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^n \times S_+^m \times T^n$  は必ず集積点をもち、それらは LSISDP の KKT 点となる。とくに  $\{x^k\}$  の任意の集積点は LSISDP (1.1) の最適解となる。

## 4 BKKT 点を求めるアルゴリズム

前節では、各バリアパラメータ  $\mu > 0$  に対する BKKT 点を逐次的に求めながら、 $\mu$  の値を 0 に近づけていくことで最終的に KKT 点を求めるパス追跡型アルゴリズムを提案した。本節では、バリアパラメータ  $\mu$  を固定し、それに関する BKKT 点を求める方法を提案する。また以降では、Algorithm 1 における反復点と区別するため、反復回数を  $r$  で表し、生成する点列を  $\{(x^r, y^r, V_r, \tau^r)\} \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S^m \times T^n$  で表す。本手法は、

$$F(x^r) \in S_{++}^m, V_r \in S_{++}^m, y^r \in \mathbb{R}_+^n, \tau^r \in T^n$$

を維持しながら、バリア関数つき LSISDP (2.6) に対して SQP 法を適用して点列を生成していくものである。

以下では、探索方向の生成の仕方とステップサイズの決め方を説明する。

### 4.1 探索方向の生成方法

現在点  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{V}, \bar{\tau}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^n \times S_{++}^m \times T^n$  における探索方向  $dw = (dx, dy, dV, d\tau) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times S^m \times \mathbb{R}^{n\ell}$  の求め方を説明する。

### $dx, dy, d\tau$ の導出方法について

まず  $x$ -空間における探索方向  $dx$  を生成するために,  $\bar{x}$  においてバリア関数つき LSISDP (2.6) の目的関数を 2 次近似し, 制約関数を 1 次近似した次の半無限 2 次計画問題 (Semi-infinite quadratic programming problem: SIQP) を考える.

$$\begin{aligned} & \underset{d \in \mathbb{R}^n}{\text{Minimize}} && \frac{1}{2} d^\top B d + c^\top d - \mu \sum_{i=1}^n d_i F_i \bullet F(\bar{x})^{-1} \\ & \text{subject to} && a(\tau)^\top (\bar{x} + d) - b(\tau) \leq 0 \quad (\tau \in T). \end{aligned} \quad (4.1)$$

ここで  $B \in S^m$  は任意の正定値対称行列である. 元問題である LSISDP (1.1) が実行可能解を持てば, SIQP (4.1) も実行可能であり, 目的関数が強凸関数であることから唯一つの解を持つ. LSISDP (1.1) の Slater 制約想定の下で SIQP (4.1) の KKT 条件は次のように記述される. すなわち,  $d$  が SIQP (4.1) の最適解とすると, ある  $n$  個の添字  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n \in T$  と  $n$  個のラグランジュ乗数  $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  が存在して

$$\begin{aligned} B d + c - \mu (F_i \bullet F(\bar{x})^{-1})_{i=1}^n + \sum_{i=1}^n y_i a(\tau_i) &= 0, \\ y_i (a(\tau_i)^\top (\bar{x} + d) - b(\tau_i)) &= 0, \quad y_i \geq 0, \\ a(\tau_i)^\top (\bar{x} + d) - b(\tau_i) &\leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

が成り立つ.  $d = 0$  かつ  $F(\bar{x}) \in S_{++}^m$  のとき,  $\mu F(\bar{x})^{-1} = V$  とおけば, 上の条件から LSISDP (1.1) の BKKKT 条件が得られる.

SQP 法の中で SIQP (4.1) を逐次的に解けば, LSISDP (1.1) の最適解を得ることが期待できる. ところが, SIQP (4.1) は半無限計画問題であり, 正確に解くことが難しい. そこで凸半無限計画問題を解くためのアルゴリズムの一つである交換法 [17, 34, 8, 12] を用いて, inexact に解くことを考える. 交換法とは, 有限部分添字集合列  $\{T_k\} \subseteq T$  に対して定義される, 半無限計画問題の有限緩和問題を逐次的に解くことで点列を発生させる方法である. 交換法にはいくつかバリエーションがあるが, SIQP (4.1) に対して以下のような交換法を考える.

#### SIQP (4.1) に対する交換法

- Step 0:** 緩和パラメータ  $\gamma > 0$  と初期有限添字集合  $T_0 (\subset T)$  を選ぶ.  $l := 0$  とする.
- Step 1:**  $T$  を  $T_l$  で置き換えて有限緩和した SIQP (4.1) の最適解  $d^l$  とラグランジュ乗数  $y^l \in \mathbb{R}_+^{|T_l|}$  を求める.
- Step 2:**  $a(\tau)^\top (\bar{x} + d^l) - b(\tau) > \gamma$  となる  $\tau \in T$  が存在しなければ終了. 見つければ, それを  $T_l$  に付加したものを  $\tilde{T}_l$  にする.
- Step 3:**  $T_{l+1} := \{\tau \in \tilde{T}_l \mid y_\tau \neq 0\}$  とする.
- Step 4:**  $l := l + 1$  として Step 1 へ.

この交換法は, 与えられた  $\gamma > 0$  に対して次を満たす  $T$  の有限添字部分集合  $E = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\} (\subset$



$T$ ), 解  $d \in \mathbb{R}^n$ , そしてラグランジュ乗数  $y_1, \dots, y_p \in \mathbb{R}$  を有限回の反復後に出力する.

$$Bd + c - \mu (F_i \bullet F(\bar{x})^{-1})_{i=1}^n + \sum_{i=1}^p y_i a(\tau_i) = 0, \quad (4.2)$$

$$y_i \left( a(\tau_i)^\top (\bar{x} + d) - b(\tau_i) \right) = 0, \quad y_i \geq 0, \quad (4.3)$$

$$a(\tau_i)^\top (\bar{x} + d) - b(\tau_i) \leq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, p), \quad (4.4)$$

$$a(\tau)^\top (\bar{x} + d) - b(\tau) \leq \gamma \quad (\tau \in T). \quad (4.5)$$

最初の3行は SIQP (4.1) で  $T$  を  $E$  に置き換えてできる2次計画問題 (Quadratic programming problem: QP) の KKT 条件であり,  $d$  はその QP の最適解である. 最後の不等式は, 半無限制約  $a(\tau)^\top (\bar{x} + d) - b(\tau) \leq 0$  ( $\tau \in T$ ) を  $\gamma > 0$  だけ緩和したものになっている. また交換法の Step 3 において  $d^l$  でアクティブ<sup>2</sup> ではない制約に対応する添字を除去する操作により,  $p (= |E|)$  は殆どの場合に変数の数  $n$  で抑えることができ, 必要ならばダミーの添字を挿入する<sup>3</sup> ことで  $p = n$  とできる. 以後, この事実から, 交換法によって出力される添字の個数  $p$  は  $n$  であると仮定する.

提案手法では, 交換法によって出力された (4.2)–(4.5) を満たす  $d \in \mathbb{R}^n$ , 有限添字集合  $E = \{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n\}$ , およびラグランジュ乗数  $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}$  から  $x$ -空間,  $y$ -空間,  $\tau$ -空間におけるそれぞれの探索方向  $dx, d\tau, dy$  を

$$dx = d, \quad d\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)^\top - \bar{\tau}, \quad dy = (y_1, y_2, \dots, y_n)^\top - \bar{y} \quad (4.6)$$

とおく.

#### $dV$ の導出方法について

前で導いた  $dx$  をもとに, スケーリングした半正定値相補性条件  $F(x) \circ V = \mu I$ ,  $F(x) \in S_+^m$ ,  $V \in S_+^m$  のニュートン方程式から  $dV$  を計算する. そのために, まず適当な正則行列  $P \in \mathbb{R}^{m \times m}$  を用いて  $F(x)$  と  $V$  を次のように  $F_P(x)$  と  $V_P$  へスケーリング<sup>4</sup> する.

$$F_P(x) = P^\top F(x) P, \quad V_P = P^{-1} V P^{-\top}$$

行列  $P$  は  $F_P(x) V_P = V_P F_P(x)$  を満たすように選ぶ.<sup>5</sup> 半正定値相補性条件  $F(x) \circ V = \mu I$ ,  $F(x) \in S_+^m$ ,  $V \in S_+^m$  はスケーリングされた空間で

$$F_P(x) \circ V_P = \mu I, \quad F_P(x) \in S_+^m, \quad V_P \in S_+^m$$

と表現されるが, 点  $(\bar{x}, \bar{V}_P)$  における  $F_P(x) \circ V_P = \mu I$  に対するニュートン方程式は

$$F_P(\bar{x}) \circ \bar{V}_P + F_P(\bar{x}) \circ dV_P + dF_P(\bar{x}) \circ \bar{V}_P = \mu I \quad (4.7)$$

<sup>2</sup>  $a(\tau)^\top (\bar{x} + d) - b(\tau) = 0$  のとき, 制約  $a(\tau)^\top (\bar{x} + d) - b(\tau) \leq 0$  は  $d = d^l$  でアクティブであるという.

<sup>3</sup> 実際に出力された個数  $p$  が  $p < n$  を満たすとき, (4.4) を満たすようにダミー添字  $\tau_{p+1}, \dots, \tau_n \in T$  を導入し, それらに対応する不等式制約に関するラグランジュ乗数を  $y_{p+1} = y_{p+2} = \dots = y_n = 0$  とおけばよい.

<sup>4</sup> スケーリングは, SDP に対する主双対内点法においてよく使われる技法である [9, 15, 31].

<sup>5</sup> こうした  $P$  の選び方として  $P = F(\bar{x})^{-\frac{1}{2}}, \left( F(\bar{x})^{\frac{1}{2}} \left( F(\bar{x})^{\frac{1}{2}} V F(\bar{x})^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}} F(\bar{x})^{\frac{1}{2}} \right)^{-\frac{1}{2}}$  などがあげられる.

である。ただし、 $dF_P(\bar{x}) := \sum_{i=1}^n dx_i P^\top F_i P$ ,  $dV_P := P^{-1} dV P^{-\top}$  である。さて、 $X \in S^m$  に対して線形写像  $\mathcal{L}_X : S^m \rightarrow S^m$  を  $\mathcal{L}_X(Y) := X \circ Y$  で定義すると (4.7) は

$$\mathcal{L}_{F_P(\bar{x})}(V_P + dV_P) + dF_P(\bar{x}) \circ \bar{V}_P = \mu I \quad (4.8)$$

と書き直すことができる。  $X \in S_{++}^m$  のとき  $\mathcal{L}_X$  は全単射であることに注意すると  $F_P(\bar{x}) \in S_{++}^m$  より  $\mathcal{L}_{F_P(\bar{x})}^{-1}$  が存在して、(4.8) から

$$dV_P = \mu F_P(\bar{x})^{-1} - \bar{V}_P - \mathcal{L}_{F_P(\bar{x})}^{-1} (dF_P(\bar{x}) \circ \bar{V}_P)$$

である。このことと  $dV_P = P^{-1} dV P^{-\top}$  から元の  $V$ -空間における探索方向  $dV$  は

$$\begin{aligned} dV &= \mu P F_P(\bar{x})^{-1} P^\top - P \bar{V}_P P^\top - P \mathcal{L}_{F_P(\bar{x})}^{-1} (dF_P(\bar{x}) \circ \bar{V}_P) P^\top \\ &= \mu F(\bar{x})^{-1} - \bar{V} - P \mathcal{L}_{F_P(\bar{x})}^{-1} (dF_P(\bar{x}) \circ \bar{V}_P) P^\top \end{aligned} \quad (4.9)$$

となる。

## 4.2 ステップサイズの決定方法

求めた  $x$ -空間と  $V$ -空間における探索方向  $(dx, dV)$  のステップサイズを直線探索で決定する。直線探索の際、[31]において非線形 SDP の BKT 点を求めるために提案された主双対メリット関数を拡張した以下のような関数  $\Phi_{\rho, \mu} : \mathbb{R}^n \times S^m \rightarrow \mathbb{R}$  をメリット関数として用いる。

$$\Phi_{\rho, \mu}(x, V) := \varphi_{\rho, \mu}^{\text{bp}}(x) + \nu \varphi_{\mu}^{\text{cp}}(x, V) \quad (4.10)$$

ここで  $\nu > 0$  は正の定数パラメータ、 $\rho > 0$  はペナルティパラメータであり、

$$\begin{aligned} \varphi_{\rho, \mu}^{\text{bp}}(x) &:= c^\top x - \mu \log \det F(x) + \rho \max_{\tau \in T} \left( a(\tau)^\top x - b(\tau) \right)_+, \\ \varphi_{\mu}^{\text{cp}}(x, V) &:= F(x) \bullet V - \mu \log \det F(x) V \end{aligned}$$

である。  $\varphi_{\rho, \mu}^{\text{bp}}(x)$  がバリア関数つき LSISDP (2.6) に関するメリット関数、  $\varphi_{\mu}^{\text{cp}}(x, V)$  が半正定値相補性条件に関するメリット関数である。

メリット関数  $\Phi_{\rho, \mu}$  の値を降下させつつ、  $F(x + sdx) \in S_{++}^m, V + sdV \in S_{++}^m$  であるような  $(dx, dV)$  方向のステップサイズ  $s \in (0, 1]$  を決定するために Armijo ルールを元にした以下の手順 (S1)–(S3) を順番に実行する。

### ステップサイズの決定手順

(S1): ペナルティパラメータ  $\rho$  を

$$\rho = \begin{cases} \rho & (\text{if } \rho > \|\bar{y} + dy\|_1), \\ \|\bar{y} + dy\|_1 + \delta_1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と更新する。ただし、  $\delta_1 > 0$  は与えられた定数である。

(S2): 以下を満たす最小の非負整数  $r = 0, 1, 2, \dots$  を決定する.

$$\Phi_{\rho, \mu}(\bar{x} + \theta\beta^r dx, \bar{V} + \theta\beta^r dV) \leq \Phi_{\rho, \mu}(\bar{x}, \bar{V}) + \alpha\theta\beta^r (-dx^\top B dx + (\varphi_\mu^{\text{CP}})'(x, V; dx, dV)) + \rho\theta\beta^r \gamma. \quad (4.11)$$

ただし  $(\varphi_\mu^{\text{CP}})'(x, V; dx, dV)$  は  $\varphi_\mu^{\text{CP}}$  の  $x, V$  における  $dx, dV$  方向の方向微分であり,  $\theta := \min(1, \theta_x, \theta_V)$  であり,  $\theta_x, \theta_V$  は

$$\theta_x := \begin{cases} 1 & (\text{if } \lambda_{\min}(F(\bar{x})^{-1} \sum_{i=1}^n dx_i F_i) \geq 0), \\ -\frac{\delta_2}{\lambda_{\min}(F(\bar{x})^{-1} \sum_{i=1}^n dx_i F_i)} & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

$$\theta_V := \begin{cases} 1 & (\text{if } \lambda_{\min}(\bar{V}^{-1} dV) \geq 0), \\ -\frac{\delta_2}{\lambda_{\min}(\bar{V}^{-1} dV)} & (\text{otherwise}), \end{cases}$$

である. また  $\gamma$  は SIQP に関する緩和パラメータ ((4.5) 参照),  $\alpha \in (0, 1), \beta \in (0, 1)$  は Armijo パラメータ,  $\delta_2 \in (0, 1)$  は与えられた定数,  $\lambda_{\min}(X)$  は行列  $X$  の最小固有値とする.

(S3): ステップサイズ  $s$  を  $s = \theta\beta^r$  とおく.

Step 2 での  $\theta$  の選び方によって,  $F(x + sdx) \in S_{++}^m, V + sdV \in S_{++}^m$  ( $s \in [0, \theta]$ ) とできる. また (4.11) において  $\gamma = 0$  とおけば, (4.11) は Armijo ルールに基づいた通常の直線探索であり, SIQP (4.1) の最適解が降下方向になっていると考えられる. しかしながら, 今回は SIQP (4.1) は正確には解いておらず, 交換法によって inexact に求めた解  $dx$  は  $\Phi_{\rho, \mu}$  の降下方向であるとは限らない. そこで, (4.11) のように  $\rho\theta\beta^r \gamma$  の項を右辺に加える. この修正により, 上の手順は well-defined であることが示すことができる.

**命題 4.3.** 直線探索 (4.11) は有限回で終了する.

$\gamma$  を 0 に近づけていくことによって, (4.11) はメリット関数  $\Phi_{\rho, \mu}$  に関する通常の直線探索に近づき, LSISDP (1.1) の BKKT 点へ近づいていくと期待される.

### 4.3 点列の更新

上で求めた探索方向  $dx \in \mathbb{R}^n, dy \in \mathbb{R}^n, dV \in S^m, d\tau \in \mathbb{R}^\ell$ , およびステップサイズ  $s$  を用いて次の反復点  $(x_+, y_+, V_+, \tau_+) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^n \times S_{++}^m \times T^n$  を

$$x_+ := \bar{x} + sdx, y_+ := \bar{y} + dy, V_+ := \bar{V} + sdV, \tau_+ := \bar{\tau} + d\tau$$

で更新する.

### 4.4 BKKT 点を求めるアルゴリズム

固定されたバリアパラメータ  $\mu > 0$  に対する BKKT 点を求めるアルゴリズムを以下のように提案する.

Algorithm 2 (BKKT 点を求めるアルゴリズム)

Step 0 (初期設定): 初期点として

$$x^0 \in \mathbb{R}^n, y^0 \in \mathbb{R}_+^n, V_0 \in S_{++}^m, \tau^0 \in T^m$$

を  $F(x^0) \in S_{++}^m$  を満たすように選ぶ. パラメータとして  $\varepsilon > 0, \rho_0 > 0, \nu > 0, \alpha \in (0, 1), \beta \in (0, 1), \delta_1 > 0, \delta_2 \in (0, 1)$  を選ぶ. また正の緩和パラメータ列  $\{\gamma_r\}_{r \geq 0}$  として  $\sum_{r=0}^{\infty} \gamma_r < \infty$  となるように選ぶ. さらに初期行列  $B_0 \in S_{++}^m$ , 初期スケールリング行列  $P_0 \in \mathbb{R}^{m \times m}$  を選ぶ.  $r := 0$  とする.

Step 1 (終了条件): もし  $R_\mu(x^r, y^r, V_r, \tau^r) = 0$  ならば終了する.

Step 2 (探索方向の導出):  $B = B_r, \gamma = \gamma_r$  とおいた SIQP (4.1) から交換法を用いて (4.2)–(4.5) を満たす解  $d \in \mathbb{R}^n$ , 有限添字集合  $E \subsetneq T$ , ラグランジュ乗数  $y \in \mathbb{R}_+^n$  を導出する. それらを用いて, (4.6) から  $dx \in \mathbb{R}^n, dy \in \mathbb{R}^n, d\tau \in \mathbb{R}^{n\ell}$  を決定する. さらに  $P = P_r$  とした (4.9) から  $dV \in S^m$  を計算する.

Step 4 (ステップサイズの決定): ステップサイズ  $s \in (0, 1]$  を手順 (S1) から (S3) によって決定する.

Step 5 (点  $(x^r, y^r, V_r, \tau^r)$  と行列  $B_r, P_r$  の更新):  $(x^{r+1}, y^{r+1}, V_{r+1}, \tau^{r+1}) = (x^r + sdx, y^r + dy, V_r + sdV, \tau^r + d\tau)$  とし,  $B_{r+1} \in S_{++}^m$  であるように行列  $B_r$  を更新する. スケールリング行列  $P_r$  を  $F_{P_r}(x^{r+1})V_{P_r} = V_{P_r}F_{P_r}(x^{r+1})$  であるよう更新する.

Step 6:  $r := r + 1$  として Step 1 へ戻る.

## 4.5 収束解析

Assumption A に加えて以下を仮定する. 次のような仮定をおく.

### Assumption B

- (a) スケールリング行列  $\{P_r\}_{r \geq 0}, \{P_r^{-1}\}_{r \geq 0}$  が有界である.
- (b) ある  $M > 0$  が存在して  $\frac{1}{M}I \preceq B_r \preceq MI$  が任意の  $r \geq 0$  について成り立つ.
- (c) ペナルティパラメータ列  $\{\rho_r\}_{r \geq 0}$  が有界である.

**定理 4.3.** Assumption A および B の下で, Algorithm 2 によって生成された点列  $\{(x^r, y^r, V_r, \tau^r)\}_{r \geq 0}$  は有界であり, その任意の集積点は LSISDP (1.1) の BKKT 点である.

## 5 まとめと今後の課題

本稿では, 半正定値錐制約を含む半無限計画問題 (LSISDP) について考察し, LSISDP の KKT 点, BKKT 点を定義した. そして, KKT 点を求めるために BKKT 点を近似的に逐次計算していく

パス追跡型のアルゴリズムを提案した。さらに BKKT 点を求めるために SQP 法と交換法を組み合わせた手法も提案した。また、それらの大域的収束性を示した。

今後は、まず直近の課題として、数値実験を行い、提案手法の実際上の能力を調べることが挙げられる。また [30] で述べられているように、KKT 点への超 1 次収束といった速い収束を達成するためにはバリアパラメータの調整方法が重要と思われる。このバリアパラメータの調整方法の検討も重要な課題である。

## References

- [1] F. ALIZADEH, A. H. JEAN-PIERRE, AND M. L. OVERTON, *A new primal-dual interior-point method for semidefinite programming*, (1994).
- [2] E. J. ANDERSON AND A. S. LEWIS, *An extension of the simplex algorithm for semi-infinite linear programming*, *Mathematical Programming*, 44 (1989), pp. 247–269.
- [3] X. CHEN AND P. TSENG, *Non-interior continuation methods for solving semidefinite complementarity problems*, *Mathematical Programming*, 95 (2003), pp. 431–474.
- [4] S.-C. FANG AND S.-Y. WU, *An inexact approach to solving linear semi-infinite programming problems*, *Optimization*, 28 (1994), pp. 291–299.
- [5] R. W. FREUND, F. JARRE, AND C. H. VOGELBUSCH, *Nonlinear semidefinite programming: sensitivity, convergence, and an application in passive reduced-order modeling*, *Mathematical Programming*, 109 (2007), pp. 581–611.
- [6] M. A. GOBERNA, *Linear semi-infinite optimization: Recent Advances*, in *Continuous Optimization*, Springer, 2005, pp. 3–22.
- [7] G. GRAMLICH, R. HETTICH, AND E. W. SACHS, *Local convergence of SQP methods in semi-infinite programming*, *SIAM Journal on Optimization*, 5 (1995), pp. 641–658.
- [8] S. HAYASHI AND S.-Y. WU, *An explicit exchange algorithm for linear semi-infinite programming problems with second-order cone constraints*, *SIAM Journal on Optimization*, 20 (2009), pp. 1527–1546.
- [9] C. HELMBERG, F. RENDL, R. J. VANDERBEI, AND H. WOLKOWICZ, *An interior-point method for semidefinite programming*, *SIAM Journal on Optimization*, 6 (1996), pp. 342–361.
- [10] R. HETTICH, *An implementation of a discretization method for semi-infinite programming*, *Mathematical Programming*, 34 (1986), pp. 354–361.
- [11] M. KOJIMA, S. SHINDOH, AND S. HARA, *Interior-point methods for the monotone semidefinite linear complementarity problem in symmetric matrices*, *SIAM Journal on Optimization*, 7 (1997), pp. 86–125.

- [12] H. C. LAI AND S.-Y. WU , *On linear semi-infinite programming problems*, Numerical Functional Analysis and Optimization, 13 (1992), pp. 287–304.
- [13] S. LI, S.-Y. WU, X. YANG, AND K.-L. TEO, *A relaxed cutting plane method for semi-infinite semi-definite programming*, Journal of computational and applied mathematics, 196 (2006), pp. 459–473.
- [14] M. LÓPEZ AND G. STILL, *Semi-infinite programming*, European Journal of Operational Research, 180 (2007), pp. 491–518.
- [15] R. D. MONTEIRO, *Primal–dual path-following algorithms for semidefinite programming*, SIAM Journal on Optimization, 7 (1997), pp. 663–678.
- [16] T. OKUNO AND M. FUKUSHIMA, *Local reduction based SQP-type method for semi-infinite programs with an infinite number of second-order cone constraints*, Journal of Global Optimization, 60 (2014), pp. 25–48.
- [17] T. OKUNO, S. HAYASHI, AND M. FUKUSHIMA, *A regularized explicit exchange method for semi-infinite programs with an infinite number of conic constraints*, SIAM Journal on Optimization, 22 (2012), pp. 1009–1028.
- [18] A. PEREIRA, M. COSTA, AND E. FERNANDES, *Interior point filter method for semi-infinite programming problems*, Optimization, 60 (2011), pp. 1309–1338.
- [19] L. QI, S. WU, AND G. ZHOU, *Semismooth Newton methods for solving semi-infinite programming problems*, Journal of Global Optimization, 27 (2003), pp. 215–232.
- [20] R. REEMTSEN, *Discretization methods for the solution of semi-infinite programming problems*, Journal of optimization theory and applications, 71 (1991), pp. 85–103.
- [21] R.-L. SHEU, S.-Y. WU, AND S.-C. FANG, *A primal-dual infeasible-interior-point algorithm for linear semi-infinite programming*, Computers & Mathematics with Applications, 29 (1995), pp. 7–18.
- [22] J. F. STURM, *Using SeDuMi 1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones*, Optimization methods and software, 11 (1999), pp. 625–653.
- [23] M. J. TODD, *Interior-point algorithms for semi-infinite programming*, Mathematical programming, 65 (1994), pp. 217–245.
- [24] ———, *Semidefinite optimization*, Acta Numerica, 10 (2001), pp. 515–560.
- [25] K. C. TOH, M. J. TODD, AND R. H. TÜTÜNCÜ, *SDPT3—a MATLAB software package for semidefinite programming, version 2.1*, Optimization Methods and Software, 11 (1999), pp. 545–581.
- [26] L. VANDENBERGHE AND S. BOYD, *Semidefinite programming*, SIAM review, 38 (1996), pp. 49–95.

- [27] H. WOLKOWICZ, R. SAIGAL, AND L. VANDENBERGHE, *Handbook of semidefinite programming: theory, algorithms, and applications*, vol. 27, Springer Science & Business Media, 2012.
- [28] S.-P. WU, S. BOYD, AND L. VANDENBERGHE, *FIR filter design via semidefinite programming and spectral factorization*, Proceedings IEEE Conference on Decision and Control (1996), pp. 271276.
- [29] ———, *FIR filter design via spectral factorization and convex optimization*, in Applied and computational control, signals, and circuits, Springer, 1999, pp. 215–245.
- [30] H. YAMASHITA AND H. YABE, *Local and superlinear convergence of a primal-dual interior point method for nonlinear semidefinite programming*, Mathematical programming, 132 (2012), pp. 1–30.
- [31] H. YAMASHITA, H. YABE, AND K. HARADA, *A primal-dual interior point method for nonlinear semidefinite programming*, Mathematical programming, 135 (2012), pp. 89–121.
- [32] M. YAMASHITA, K. FUJISAWA, AND M. KOJIMA, *Implementation and evaluation of SDPA 6.0 (semidefinite programming algorithm 6.0)*, Optimization Methods and Software, 18 (2003), pp. 491–505.
- [33] N. YAMASHITA AND M. FUKUSHIMA, *A new merit function and a descent method for semidefinite complementarity problems*, in Reformulation: nonsmooth, piecewise smooth, semismooth and smoothing methods, Springer, 1999, pp. 405–420.
- [34] L. ZHANG, S. WU, AND M. LÓPEZ, *A new exchange method for convex semi-infinite programming*, SIAM Journal on Optimization, 20 (2010), pp. 2959–2977.
- [35] X.-Y. ZHAO, D. SUN, AND K.-C. TOH, *A Newton-CG augmented Lagrangian method for semidefinite programming*, SIAM Journal on Optimization, 20 (2010), pp. 1737–1765.