数理解析研究所講究録
第1982巻 2016年 1-7

ダグラス環における割り算問題について I, II

日本大学薬学部　　丹羽 典朗 (Norio NIWA)

1 Hardy spaces H^p and H^∞

複素平面の単位開円板を D, 単位円周を ∂D とする．また，D 上の正則関数全体の集合を $H(D)$ とする：

$$D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

$$\partial D := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

$$H(D) := \{f : f \text{ is analytic in } D\}$$

$0 < p < \infty$ とする．

$$H^p := \left\{ f \in H(D) : \|f\|_p := \sup_{r<1} \left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

$$H^\infty := \left\{ f \in H(D) : \|f\|_\infty := \sup_{z\in D} |f(z)| < \infty \right\}$$

H^p, H^∞ に

$$(f+g)(z) := f(z) + g(z) \quad (z \in D) \qquad : \text{pointwise addition} \tag{1}$$

$$(\alpha f)(z) := \alpha \cdot f(z) \quad (z \in D, \alpha \in \mathbb{C})$$

により和とスカラー倍を定める事で，H^p, H^∞ はそれぞれ線形空間となる．

$0 < p < 1$ のとき，$\|f\|_p^p$ は H^p において距離を定め，H^p は完備距離空間となる．

$1 \leq p < \infty$ のとき，$\|f\|_p$ は H^p においてノルムを定め，H^p は Banach 空間となる．

$\|f\|_\infty$ は H^∞ においてノルムを定め，H^∞ は Banach 空間となる．さらに

$$(fg)(z) := f(z) \cdot g(z) \quad (z \in D) \qquad : \text{pointwise multiplication} \tag{2}$$

により積を定めると，$\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ を満たし，H^∞ は Banach algebra となる．

$(H^\infty)^*$ を Banach 空間 H^∞ の dual space，つまり，H^∞ 上の有界線形汎関数全体の集合とする．$M(H^\infty)$ $(\subset (H^\infty)^*)$ を H^∞ 上の (nonzero な) 乗法的有界線形汎関数全体の集合とする．$M(H^\infty)$ に weak-*-topology を入れる事により，$M(H^\infty)$ は compact Hausdorff 空間になる．$M(H^\infty)$ を H^∞ の極大イデアル空間と呼ぶ．それは，『乗法的有界線形汎関数 $m \in M(H^\infty)$ の kernel』と『Banach algebra H^∞ の極大イデアル』とが1対1に対応する事による．

$$\hat{f}(m) := m(f), \qquad f \in H^\infty,\ m \in M(H^\infty),$$

と定めると，$\hat{f}$ は $M(H^\infty)$ 上の連続関数となる．

$$H^\infty \ni f \longrightarrow \hat{f} \in C(M(H^\infty)).$$

この homomorphism を Gelfand 変換という．また，$\hat{f}$ の事を f の Gelfand 変換ともいう．$\hat{f} \in C(M(H^\infty))$ と $f \in H^\infty$ とを同一視し，$\hat{f}$ を単に f と表す事にする．

H^∞-関数 f への D の点 z の代入

$$H^\infty \ni f \longrightarrow f(z) \in \mathbb{C}$$

は，(1) のように各点ごとに和，(2) のように各点ごとに積を定める事で，H^∞ 上の乗法的有界線形汎関数と見なす事ができる．つまり，$D \subset M(H^\infty)$ である．そこで，次のような問題が生じた：

D は $M(H^\infty)$ において dense であるか？

この問題は長年未解決であったが，1962 年，Lennart Carleson により肯定的に解決された ([2])．つまり，D は $M(H^\infty)$ において dense である．これを Carleson's Corona Theorem という．

2 Singular inner function

$f \in H^p$ $(0 < p \leq \infty)$ ならば，$d\theta$ についてほとんどいたる $e^{i\theta} \in \partial D$ に対して $\lim_{z \to e^{i\theta}} f(z)$ (nontangentially) が存在する．

$$f^*(e^{i\theta}) := \lim_{z \to e^{i\theta}} f(z)$$

とおく．これにより，∂D 上のほとんどいたるところ (almost everywhere, a.e.) で定義された関数 f^* が得られるが，

$$f(z) = \int_{\partial D} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} f^*(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

によって，D 上の関数 $f(z)$ を取り戻す事ができる．よって，f^* と f を同一視する事にし，単に f と表す事にする．まとめると，$f \in H^\infty(D)$ と $f^* \in H^\infty(\partial D)$ と $\hat{f} \in C(M(H^\infty))$ を同一視する．

$\psi \in H^\infty$ かつ $|\psi(e^{i\theta})| = 1$ a.e. $e^{i\theta} \in \partial D$ を満たすとき，ψ を inner function という．

$(0 \neq) f \in H^p$ $(0 < p \leq \infty)$ とする．f は無限個の零点を持つと仮定する．f の零点列を $\{z_n\}_n$ とすると，$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|z_n|) < \infty$ を満たす．これを Blaschke condition という．$\{z_n\}_n$ が Blaschke condition を満たすとき，次の関数 $b(z)$ を定義する事ができる．

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{|z_n|} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}$$

$b(z)$ は $\{z_n\}_n$ を零点列として持つ．$b \in H^\infty$ かつ $|b(e^{i\theta})| = 1$ a.e. $e^{i\theta} \in \partial D$ を満たすので，b は inner function である．b を Blaschke product という．

$$F(z) = \exp\left(\int_{\partial D} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|f(e^{i\theta})| \frac{d\theta}{2\pi}\right)$$

$F \in H^p$ である．F を outer function という．(F を f の outer part という．)

$$\psi_\mu(z) = \exp\left(-\int_{\partial D} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} d\mu(\theta)\right)$$

ここで，$\mu \perp d\theta$ である．つまり，μ と $d\theta$ は mutually singular である．μ を singular measure という．$\psi_\mu \in H^\infty$ かつ $|\psi_\mu(e^{i\theta})| = 1$ a.e. $e^{i\theta} \in \partial D$ を満たすので，ψ_μ は inner function である．ψ_μ を singular inner function という．

任意の $f \in H^p$ は，一般に，$f = Cb\psi_\mu F$ $(C \in \mathbb{C}, |C| = 1)$ と因数分解する事ができる．

3 Douglas algebra

∂D 上の本質的有界な可測関数全体の集合を $L^\infty := L^\infty(\partial D)$ とする．L^∞ は Banach algebra である．L^∞ の極大イデアル空間を $M(L^\infty)$ とすると，$H^\infty \subset L^\infty$ より，$M(H^\infty) \supset M(L^\infty)$ である．次の結果が知られている．この結果は，inner function と $M(L^\infty)$ の特徴づけを与えている．

Theorem 1 ([6]) *m を H^∞ の complex homomorphism とする．そのとき，次の条件は同値である．*

(i) m は H^∞ の Šilov 境界にある．
(ii) m は，L^∞ の complex homomorphism の H^∞ への制限である．
(iii) $|\psi(m)| = 1$ for every inner functions ψ.
(iv) $|b(m)| = 1$ for every Blaschke products b.
(v) $\psi(m) \neq 0$ for every inner functions ψ.
(vi) $b(m) \neq 0$ for every Blaschke products b.

つまり，任意の inner function ψ に対して，$|\psi| = 1$ on $M(L^\infty)$ である．

H^∞ と L^∞ の間の uniformly closed subalgebra を Douglas algebra という．

$$H^\infty + C := \{f + g : f \in H^\infty(\partial D), g \in C(\partial D)\}$$

は H^∞ を真に含む最小の Douglas algebra である．H^∞ と $A(\subset L^\infty)$ で生成される closed subalgebra を $[H^\infty, A]$ と表す事にする．$H^\infty + C = [H^\infty, \bar{z}]$ である．ここで，z は座標関数を表し，$\bar{z}$ は z の複素共役を表す．$H^\infty + C$ の極大イデアル空間を $M(H^\infty + C)$ とすると，$M(H^\infty + C) = M(H^\infty) \setminus D$ である事が知られている．$M_{e^{i\theta}} := \{m \in M(H^\infty) \,:\, z(m) = e^{i\theta}\}$ を $M(H^\infty)$ の $e^{i\theta}$ 上の fiber という．$M(H^\infty) \setminus D = \bigcup_{e^{i\theta} \in \partial D} M_{e^{i\theta}}$ である．

次の事が知られている．

Theorem 2 ([6]) *$f \in H^\infty$ (の Gelfand 変換 $\widehat{f}$) が $M_{e^{i\theta}}$ 上で constant であるための必要十分条件は，f が D から $\{e^{i\theta}\}$ へ連続的に拡張できる事である．*

$f \in H^\infty$ とする．簡単のため

$$\{|f| < 1\} := \{m \in M(H^\infty) \,:\, |f(m)| < 1\}$$

$$Z(f) := \{m \in M(H^\infty) \,:\, f(m) = 0\}$$

とおく．

$$\psi_\mu(z) = \exp\left(- \int_{\partial D} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\mu(e^{i\theta}) \right).$$

μ の closed support set を $S(\mu)$ とすると，$\psi_\mu(z)$ は $\mathbb{C} \setminus S(\mu)$ へ解析的に拡張する事ができる．一方，$|\psi_\mu(z)|$ は D から $S(\mu)$ のどの点へも連続的に拡張する事はできない．上の結果と組み合わせると，$\bigcup_{e^{i\theta} \in \partial D \setminus S(\mu)} M_{e^{i\theta}}$ の上で $|\psi_\mu| = 1$ であり，集合 $Z(\psi_\mu)$ および $\{|\psi_\mu| < 1\}$ は $\bigcup_{e^{i\theta} \in S(\mu)} M_{e^{i\theta}}$ に含まれる：

$$|\psi_\mu| = 1 \quad \text{on} \bigcup_{e^{i\theta} \in \partial D \setminus S(\mu)} M_{e^{i\theta}}$$

$$Z(\psi_\mu),\ \{|\psi_\mu| < 1\} \subset \bigcup_{e^{i\theta} \in S(\mu)} M_{e^{i\theta}}$$

$$b(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{|z_n|} \frac{z_n - z}{1 - \bar{z}_n z}.$$

$\{z_n\}_{n=1}^\infty$ の accumulation points の集合を $S(b)$ とすると，$b(z)$ は $\mathbb{C} \setminus S(b)$ へ解析的に拡張する事ができる．一方，$|b(z)|$ は D から $S(b)$ のどの点へも連続的に拡張する事はできない．上と同様に，

$$|b| = 1 \quad \text{on} \bigcup_{e^{i\theta} \in \partial D \setminus S(b)} M_{e^{i\theta}}$$

$$Z(b),\ \{|b| < 1\} \subset \bigcup_{e^{i\theta} \in S(b)} M_{e^{i\theta}}$$

である．

4 Douglas algebra における割り算に関する結果と問題

Douglas algebra における割り算に関する結果をいくつか紹介する.

Theorem 3 (Axler-Gorkin, [1]) A を *Douglas algebra,* $M(A)$ を A の極大イデアル空間とする. さらに, $f \in A$ とし, b を *interpolating Blaschke product* とする. そのとき, $\{m \in M(A) : b(m) = 0\} \subset \{m \in M(A) : f(m) = 0\}$ が成り立つならば, $\dfrac{f}{b} \in A$ である.

Theorem 4 (Axler-Gorkin, [1]) A を *Douglas algebra,* $M(A)$ を A の極大イデアル空間とする. さらに, $f \in A$ とし, b を *interpolating Blaschke products* の *finite product* とする. そのとき, $M(A)$ において $|f| \leq |b|$ が成り立つならば, $\dfrac{f}{b} \in A$ である.

b が interpolating Blaschke product の場合, $M(A)$ における零点集合の包含関係から A における割り算可能性が導かれる. それに対して, b が interpolating Blaschke products の finite product の場合, $M(A)$ における零点集合の包含関係の情報のみでは割り算可能性を導く事はできず, $M(A)$ における不等式から割り算可能性が導かれる.

H^∞ を含む最小の Douglas algebra $H^\infty + C$ における割り算に関する結果は, 次の通りである.

Theorem 5 (Guillory-Sarason, [5]) ψ を *inner function,* $f \in H^\infty$ とする. そのとき, 次の条件は同値である.

(i) $\dfrac{f}{\psi^n} \in H^\infty + C$ *for every positive integer* n

(ii) $f(1 - |\psi|) = 0$ *on* $M(H^\infty + C)$

(iii) $\lim\limits_{|z| \to 1} f(z)(1 - |\psi(z)|) = 0$

Theorem 6 (Guillory-Sarason, [5]) 任意の *inner function* ψ に対して, *Blaschke product* b が存在して, ψ と b は $H^\infty + C$ において *codivisible* である. つまり, 任意の *inner function* ψ に対して, *Blaschke product* b が存在して, $\dfrac{\psi}{b} \in H^\infty + C$, $\dfrac{b}{\psi} \in H^\infty + C$ を満たすようにできる.

b と ψ は inner function なので, $\dfrac{\psi}{b} \in H^\infty + C$, $\dfrac{b}{\psi} \in H^\infty + C$ を $\psi\bar{b} \in H^\infty + C$, $b\overline{\psi} \in H^\infty + C$ と表す事ができる. また, $QC := (H^\infty + C) \cap \overline{(H^\infty + C)}$ とおくと, $\psi\bar{b} \in QC$ と表す事ができる.

上の定理から分かるように, $H^\infty + C$ における割り算可能性を考察するには, $Z(f)$, $\{|f| < 1\}$ という集合が重要である事が分かる.

さて, ここで, この RIMS 共同研究のテーマである Guillory-Sarason の問題を述べておこう.

Guillory-Sarason の問題 $H^\infty + C$ において codivisible な singular inner functions は存在するか？つまり，$\dfrac{\psi_\nu}{\psi_\mu} \in H^\infty + C$, $\dfrac{\psi_\mu}{\psi_\nu} \in H^\infty + C$ を満たす singular inner functions ψ_μ, ψ_ν は存在するか？ただし，$\dfrac{\psi_\nu}{\psi_\mu}$ は定数関数ではない．

5 関連する結果

singular inner function を定義する事のできる singular measure 全体の集合を M_s^+ とする．

$$M_s^+ := \{\mu \ : \ \mu \text{ is finite positive}, \ \mu \perp d\theta\}$$

$\mu \in M_s^+$ に対して，

$$L_+^1(\mu) := \{\nu \in M_s^+ \ : \ \nu \text{ is absolutely continuous with respect to } \mu, \ \nu \neq 0\}$$

Definition 1 $\mu \in M_s^+$ に対して，$\{|\psi_\mu| < 1\} \subset Z(\psi_\sigma)$ を満たす $\sigma \in L_+^1(\mu)$ が存在するとき，μ は *outer vanishing measure* を持つという．

次の定理は，2 つの singular inner functions ψ_μ, ψ_ν が $H^\infty + C$ において codivisible となるために μ が満たすべき条件を与えており，Guillory-Sarason の問題にアタックする際の手がかりになると思われる．

Theorem 7 (Izuchi, [8]) $\mu \in M_s^+$ とする．もし，$\mu \perp \nu$ であり，かつ，ψ_μ と ψ_ν が $H^\infty + C$ において *codivisible* となるような $\nu \in M_s^+$ が存在するならば，μ は *outer vanishing measure* を持つ．

1999 年頃，泉池と丹羽は，singular inner function ψ_μ に対して，$Z(\psi_\mu)$, $\{|\psi_\mu| < 1\}$，および，それらの集合の $\nu \in L_+^1(\mu)$ に関する和集合 $\bigcup_{\nu \in L_+^1(\mu)} Z(\psi_\nu)$, $\bigcup_{\nu \in L_+^1(\mu)} \{|\psi_\nu| < 1\}$ について詳しく調べた．

以下は，$S(\mu) = \partial D$ を満たす singular measure μ に関する結果である．

Theorem 8 (Izuchi-Niwa, [9]) $\mu \in M_s^+$ は $S(\mu) = \partial D$ を満たすとする．そのとき，任意の *Blaschke product* b に対して，$\nu \in L_1^+(\mu)$ が存在して，$\{|b| < 1\} \subset Z(\psi_\nu)$ を満たすようにできる．

Guillory-Sarason の定理より，$\{|b| < 1\} \subset Z(\psi_\nu)$ を満たす ψ_ν と b に対して，

$$\frac{\psi_\nu}{b^n} \in H^\infty + C \quad \text{for every positive integer } n$$

である事が分かる．

Corollary 1 $\mu \in M_s^+$ は $S(\mu) = \partial D$ を満たすとする．そのとき，$f \in L^\infty(\partial D)$ に対して，$\nu \in L_+^1(\mu)$ が存在して，$\psi_\nu f \in H^\infty + C$ を満たす．

Theorem 9 (Izuchi-Niwa, [9]) $\mu \in M_s^+$ とする．そのとき，次の条件は同値である．

(i) $S(\mu) = \partial D$.

(ii) $\displaystyle\bigcup_{\nu \in L^1_+(\mu)} Z(\psi_\nu) = M(H^\infty) \setminus (D \cup M(L^\infty))$.

(iii) $\displaystyle\bigcup_{\nu \in L^1_+(\mu)} \{|\psi_\nu| < 1\} = M(H^\infty) \setminus (D \cup M(L^\infty))$.

(iv) $L^\infty = [H^\infty, \{\overline{\psi_\nu} : \nu \in L^1_+(\mu)\}]$.

参考文献

[1] S. Axler and P.Gorkin, *Divisibility in Douglas algebras*, Michigan Math. J., 31 (1984), 89–94.

[2] L. Carleson, *Interpolations by bounded analytic functions and the corona problem*, Ann. of Math., 76 (1962), 547–559.

[3] J. Garnett, *Bounded Analytic Functions*, Academic Press, New York, 1981.

[4] P. Gorkin, *Singular functions and division in $H^\infty + C$*, Proc. Amer. Math. Soc. 92 (1984), 268–270.

[5] C. Guillory and D. Sarason, *Division in $H^\infty + C$*, Michigan Math. J. 28 (1981), 173–181.

[6] K. Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.

[7] Kei-Ji Izuchi, *Singular inner functions of L^1-type II*, J. Math. Soc. Janpan, 53 (2001), 285–305.

[8] Kei-Ji Izuchi, *Outer and inner vanishing measures and division in $H^\infty + C$*, Rev. Mat. Iberoamericana, 18 (2002), 511–540.

[9] Kei-Ji Izuchi and N. Niwa, *Singular inner functions of L^1-type*, J. Korean Math. Soc. 36 (1999), 787–811.

Research Office of Mathematics
School of Pharmacy
Nihon University
Narashinodai 7-7-1, Funabashi, Chiba 274-8555
JAPAN
E-mail address : niwa.norio@nihon-u.ac.jp